



- Centre de masse
- 3^{ème} loi généralisée
- Lois de la dynamique
- Principes de conservation

Mécanique | 2013 6

Bonjour, bienvenue au cours de Physique Générale de l'EPFL. Dans cette leçon, on va voir les principes généraux auxquels on doit se référer, si on veut faire une analyse dynamique d'un système de points matériels. Jusqu'à maintenant, essentiellement, on a regardé un seul point matériel, la seule exception, c'était l'analyse qualitative d'une collision. Ici, on va définir le centre de masse d'un système de points matériels, on va, exprimer une généralisation de la troisième loi de Newton, ce qui va nous donner, des lois de la dynamique pour le système de points matériels; et de là, on va tirer des principes de conservation, de la quantité de mouvement et du moment cinétique, qui sont des principes généraux.

Notes

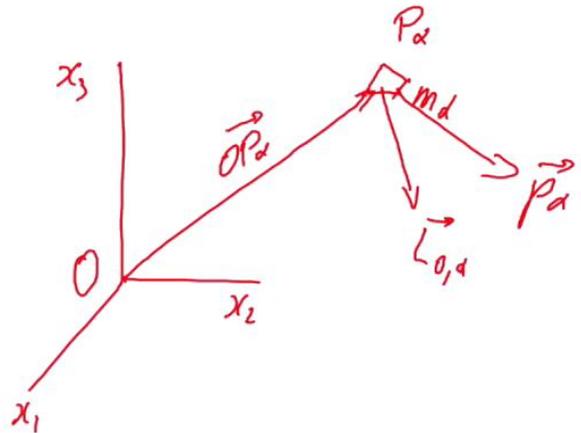
Summary



Définition : centre de masse

Système de points matériels :

- masse m_α
- aux points P_α



Je commence avec la définition du centre de masse. Alors, j'imagine que j'ai un système de points matériels, il faut voir la chose comme ceci : vous avez, un référentiel, x_1 , x_2 , x_3 , un point O du référentiel, donc je matérialise le référentiel par un système d'axes de coordonnées, j'ai une masse, m , que je vais noter m_α et α vaut 1, 2, 3, 4, etc... À la position P_α , j'ai donc un rayon vecteur OP_α . Ce point matériel a une quantité de mouvement, que je vais dessiner peut-être, comme ceci, petit p indice α , la quantité de mouvement. Et puis, on aura un moment cinétique, qui vaut $OP \times p_\alpha$ règle à main droite, sur mon dessin, il aura une allure comme ceci, voilà un L en O , indice α , le moment cinétique, de ce point matériel P_α . Voilà essentiellement la notation qu'on va utiliser quand on va parler d'un système de points matériels.

Notes

Summary



Définition : centre de masse

Système de points matériels :

- masse m_α
- aux points P_α

Centre de masse, G , défini par :

$$OG = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} OP_{\alpha} \quad M = \sum_{\alpha} m_{\alpha}$$

Définition indépendante du choix de O :

Maintenant, je vais définir le centre de masse, avec cette définition-là, vous voyez que je fais une somme au fond, une moyenne des vecteurs OP alpha, pondérée par les masses et je divise par la masse totale M , grand M c'est la masse totale du système de points matériels. Maintenant, cette définition fait apparaître O , mais cette définition de G est indépendante du choix de O .

Notes

Summary



Définition : centre de masse

Système de points matériels :

- masse m_α
- aux points P_α

Centre de masse, G , défini par :

$$OG = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} OP_{\alpha} \quad M = \sum_{\alpha} m_{\alpha}$$

Définition indépendante du choix de O :

$$\begin{aligned} O'G' &= \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} O'P_{\alpha} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} O'O + \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} OP_{\alpha} \\ &= O'O + OG = O'G \end{aligned} \quad G = G'$$

$O' \in \text{ref.}$
 \downarrow
 G'

Je peux le montrer de la manière suivante. Avec cette série d'égalités, je suppose que j'ai un point O prime qui appartient au référentiel, et que ce O prime me donne une définition G prime du centre de masse. Alors je calcule O prime G prime, en appliquant la définition, cette définition-là, mais je mets le point en O prime. Et maintenant je décompose le vecteur O prime, P alpha, en O prime O , et OP alpha. Dans le premier terme, j'ai cette somme, la somme sur alpha ne porte que sur m alpha et là j'ai la masse totale qui se simplifie avec ce terme-là, donc il reste O prime O , ce que j'ai noté ici; et ça, ce n'est rien d'autre que notre définition de OG . Donc voilà OG et O prime O , plus OG , ça fait O prime G . Alors qu'est-ce que j'ai montré? C'est que ici, et là, j'ai le même vecteur, donc G est identique à G prime. En d'autres termes, ma définition de G , la position du centre de masse, est indépendante du choix de O . C'est ce que je voulais démontrer.

Notes

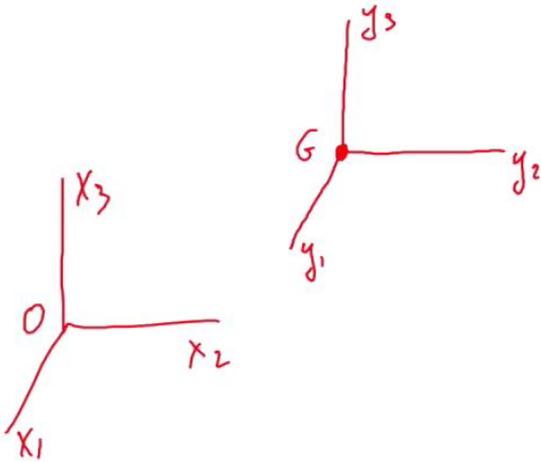
Summary



Définition : référentiel centre de masse

Soit un référentiel et un système de points matériels.

Le référentiel qui contient le centre de masse et qui est en translation par rapport au référentiel donné, est appelé **référentiel centre de masse**.



Maintenant, je vais définir le référentiel centre de masse. Encore une fois, je me donne un système de points matériels et je me donne un référentiel, dans lequel je vais travailler. Je vais appeler le référentiel centre de masse, le référentiel qui en tout temps est en translation par rapport au référentiel que je m'étais donné. Et pour le, je peux faire une représentation de ce que je veux dire de la manière suivante : je me donne mon référentiel, O, x_1, x_2, x_3 , je ne dessine pas de système de points matériels, je dessine seulement le centre de masse G , et maintenant, je conviens de créer un référentiel, que je matérialise par un système d'axes, qui en tout temps, sont des axes qui sont parallèles à x_1, x_2, x_3 et je vais les appeler y_1, y_2, y_3 .

Notes

Summary



Définition : référentiel centre de masse

Soit un référentiel et un système de points matériels.

Le référentiel qui contient le centre de masse et qui est en translation par rapport au référentiel donné, est appelé **référentiel centre de masse**.

Translation : pour tout repère lié au référentiel centre de masse

$$(G, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3) \quad \frac{d\hat{e}_i}{dt} = 0$$

Vitesse dans le référentiel donné : v_α

Vitesse dans le référentiel centre de masse : v'_α

Le référentiel centre de masse, c'est ce référentiel G, y_1, y_2, y_3 , avec les axes y_1, y_2, y_3 toujours parallèles à x_1, x_2, x_3 . Une autre façon de dire les choses, c'est de dire que si je définis un repère lié au référentiel centre de masse, noté G, e_1, e_2, e_3 , les vecteurs unités e_1, e_2, e_3 , sont des constantes. Si je fais référence aux formules de Poisson, c'est dire que le oméga qui décrit le mouvement du référentiel centre de masse, par rapport au référentiel que je me suis donné initialement, ce oméga est nul. Maintenant, je vais utiliser la notation suivante : je vais appeler, noter v_α , la position du point alpha si vous voulez, je peux écrire d sur dt de OP_α , et dans le référentiel centre de masse, dans le référentiel centre de masse, je vais noter v prime, simplement je vais mettre ce prime pour indiquer que j'ai une vitesse mesurée dans le référentiel centre de masse. J'évoque maintenant deux propriétés du référentiel centre de masse. Voici la première qui me dit qu'au fond, mon centre de masse, comme son nom l'indique d'ailleurs, est au centre des masses, au sens de cette moyenne-là.

Notes

Summary



Propriétés du référentiel centre de masse

Démonstration :

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{GP}_{\alpha} = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{OG} &= \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{OP}_{\alpha} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{OG} + \vec{GP}_{\alpha}) \\ &= \vec{OG} + \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{GP}_{\alpha} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{GP}_{\alpha}) = \frac{d}{dt} (\vec{GO} + \vec{OP}_{\alpha})$$

Démonstration :

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}'_{\alpha} = 0$$

$$\vec{OP}_{\alpha} = \vec{OG} + \vec{GP}_{\alpha} \implies \vec{v}_{\alpha} = \vec{V}_G + (\vec{v}_{\alpha} - \vec{V}_G) = \vec{V}_G + \vec{v}'_{\alpha}$$

Comment est-ce que j'arrive à ce résultat-là? Il suffit d'appliquer la définition, ici j'ai réécrit la définition de OG, j'écris le vecteur OP alpha comme OG, plus GP alpha, c'est ce que j'ai fait ici, dans le premier terme ici, j'ai cette somme qui se simplifie avec les M, il me reste OG, et là il me reste cette somme des M alpha, GP alpha. Et maintenant, ce terme-là, et celui-là s'annulent, il me reste donc que ce terme doit être nul, c'est la propriété annoncée. La deuxième propriété, c'est qu'au fond, les points matériels vus dans le référentiel centre de masse, c'est un peu comme s'ils éclataient dans tous les sens, de telle manière que les quantités de mouvements, relatives au référentiel centre de masse ont une somme nulle. Comment arriver à ce résultat? Je pars de cette décomposition : OP alpha c'est OG plus GP alpha; si je dérive par rapport au temps, cette équation, la dérivée de OP alpha, ça me donne v alpha, la dérivée de OG, ça me donne V de G, et la dérivée de GP alpha, la dérivée par rapport au temps de GP alpha, ça fait, la dérivée par rapport au temps, de GO plus OP alpha. La dérivée de GO ça fait moins la dérivée de OG, ça fait moins VG et ça, ça me donne P alpha.

Notes

Summary



Propriétés du référentiel centre de masse

Démonstration :

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{GP}_{\alpha} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{OG} &= \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{OG} + \mathbf{GP}_{\alpha}) \\ &= \mathbf{OG} + \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{GP}_{\alpha} \end{aligned}$$

Démonstration :

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{OP}_{\alpha} = \mathbf{OG} + \mathbf{GP}_{\alpha} &\implies \mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{V}_G + (\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{V}_G) = \mathbf{V}_G + \mathbf{v}'_{\alpha} \\ \cancel{\mathbf{V}_G} &= \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{V}_G + \mathbf{v}'_{\alpha}) \\ &= \cancel{\mathbf{V}_G} + \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha} \end{aligned}$$

Ici, la vitesse, absolue en un sens, la vitesse, par rapport au référentiel du problème, moins la vitesse du centre de masse, c'est la vitesse dans le référentiel centre de masse, v prime alpha, et j'ai donc un résultat qu'on connaît bien de composition des vitesses, qu'on avait obtenu quand on avait fait le formalisme du mouvement relatif. Avec cette formule-là, je vais maintenant calculer, la vitesse du centre de masse, pour obtenir cette formule ici, je pars de la définition du centre de masse, et je la dérive par rapport au temps. La dérivée de \mathbf{OG} ça me donne \mathbf{V}_G , et ici, j'ai la dérivée des \mathbf{OP} alpha, ça me donne \mathbf{v} alpha. Le \mathbf{v} alpha, j'utilise cette relation-là, ça me donne ce terme, ce premier terme, encore une fois cette somme des masses simplifiée avec M , il me reste \mathbf{V}_G , et après, il me reste ce terme, cette somme-là qu'on aimerait analyser. Alors, ce terme s'annule avec celui-là, il me reste la nullité de cette somme.

Notes

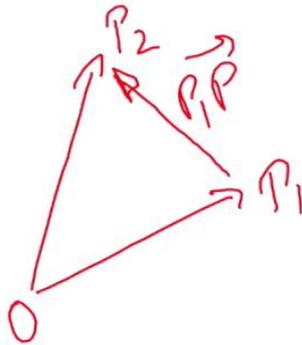
Summary



3^{ème} loi de Newton généralisée

On distingue :

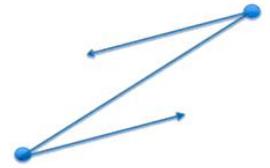
- forces intérieures,
- forces extérieures.



Soient deux points matériels : $\mathbf{F}^{2 \rightarrow 1} + \mathbf{F}^{1 \rightarrow 2} = 0$

On impose en plus : $OP_1 \wedge \mathbf{F}^{2 \rightarrow 1} + OP_2 \wedge \mathbf{F}^{1 \rightarrow 2} = 0$

$$\begin{aligned} OP_1 \wedge \mathbf{F}^{2 \rightarrow 1} + OP_2 \wedge \mathbf{F}^{1 \rightarrow 2} &= \\ OP_2 \wedge \mathbf{F}^{1 \rightarrow 2} - OP_1 \wedge \mathbf{F}^{1 \rightarrow 2} &= \\ = P_1 P_2 \wedge \mathbf{F}^{1 \rightarrow 2} & \end{aligned}$$



C'est ce que je voulais démontrer. Je passe, maintenant, à une généralisation de la troisième loi de Newton, vous allez voir que c'est une généralisation assez naturelle, mais elle est très importante, pour la dynamique d'un système de points matériels. Alors, je commence par vous rappeler que on a distingué les forces intérieures, les forces d'interaction entre les, les points matériels du système et les forces extérieures. Pour les forces d'interaction, les forces intérieures, on avait cette loi-là, qui était déclarée comme étant la troisième loi de Newton. Maintenant, je vais ajouter à cette loi-là une autre qui dit la chose suivante : c'est ce que j'ai écrit ici, vous noterez donc, ici, on a le point matériel 1, et ici j'ai la force que 2 exerce sur 1. Donc, cet objet-là, c'est le moment en O, pour la particule 1, des forces intérieures. D'accord? Et là vous avez la particule 2, enfin le point matériel 2 et une force que 1 exerce sur 2; on a la même chose et on est en train de dire que, cette somme de moments est nulle. Maintenant, vous allez voir que c'est une relation qui n'est pas arbitraire, qui dit quelque chose de très naturel sur les forces. Je reprends ce terme, je réécrit cette équation ici et dans cette équation, le F, la force que 2 exerce sur 1, j'utilise cette relation-là pour dire que c'est moins la force que 1 exerce sur 2.

Notes

Summary



Système de points matériels :

$$P = \sum_{\alpha} p_{\alpha}, \quad p_{\alpha} = m_{\alpha} v_{\alpha} \quad L_0 = \sum_{\alpha} L_{0,\alpha} \quad L_{0,\alpha} = OP_{\alpha} \wedge p_{\alpha}$$

La troisième loi de Newton prend donc l'allure suivante : si je calcule la quantité de mouvement totale, somme des quantités de mouvement de chaque point matériel et pour le moment cinétique, je fais la somme des moments cinétiques de chaque point matériel, vous reconnaissez ici la définition du moment cinétique pour un point matériel. Alors j'ai la deuxième loi de Newton qui s'applique pour chaque point matériel et le théorème du moment cinétique qui s'applique pour chaque point matériel avec les moments de forces définis comme ceci. Maintenant si je calcule la somme des forces intérieures parce que je veux avoir la quantité de mouvement totale, je veux calculer son évolution donc je dois sommer toutes ces équations-là, je vais me retrouver avec une somme de forces et maintenant si je regarde la somme des forces intérieures, ces forces intérieures sont des forces d'interaction entre alpha et bêta, donc ici j'ai mis la force que toutes les particules bêta exercent sur alpha et je renumérote ma sommation et je peux en faire une esquisse de ce que je vais faire quand je fais cette restriction-là, alpha plus petit que bêta.

Notes

Summary



Système de points matériels :

$$P = \sum_{\alpha} p_{\alpha}, \quad p_{\alpha} = m_{\alpha} v_{\alpha} \quad L_0 = \sum_{\alpha} L_{0,\alpha} \quad L_{0,\alpha} = OP_{\alpha} \wedge p_{\alpha}$$

Si mes particules sont 1, 2, 3, 4, 5, 6 etc, je vais regarder l'interaction 1 2, 1 3, 1 4, 1 5, après je vais faire 2 3, 2 4, 2 5, je les prends deux à deux, c'est pour ça qu'ici j'ai mis deux termes mais j'ai restreint la somme. Et maintenant on a la troisième de Newton qui s'applique sur cette somme donc on a zéro ici. La somme des forces intérieures est nulle. Pour ce qui est des moments, je calcule la somme des moments des forces intérieures. Les forces intérieures c'est des forces d'interaction de bêta avec alpha et je somme sur bêta. Et je fais le même truc, je restreins la somme et je les prends en paires, ici vous avez le moment de la force que bêta exerce sur alpha et c'est bien en alpha, une force qui s'exerce sur le point alpha, et puis j'ai maintenant sur le point bêta, la force que alpha exerce sur bêta, je les prends en paire comme ceci. La force F bêta alpha, ça vaut moins la force F alpha bêta, je me retrouve avec un OP bêta moins OP alpha qui vaut P alpha P bêta et là ces termes, donc ces deux vecteurs sont colinéaires, cette somme est nulle donc tous les termes sont nuls. Donc ici j'ai le moment de toutes les forces intérieures et je trouve qu'il est nul grâce à cette nouvelle troisième loi de Newton.

Notes

Summary



Système de points matériels :

$$P = \sum_{\alpha} p_{\alpha}, \quad p_{\alpha} = m_{\alpha} v_{\alpha} \quad L_0 = \sum_{\alpha} L_{0,\alpha} \quad L_{0,\alpha} = OP_{\alpha} \wedge p_{\alpha}$$

En conséquence les lois de la dynamique du système de points matériels peuvent être écrites de la manière suivante : je vais simplifier les écritures comme beaucoup le font mais vous allez voir que il ne faut pas se tromper sur le sens des choses. La somme des forces extérieures, je vais écrire F extérieur, la somme des moments des forces extérieures sont de forces, vous le voyez par cette notation, qui s'exercent au point P alpha mais je vais, pour simplifier les écritures, écrire que tous ces moments de force se somment en un objet que j'appelle M_0 extérieur. Maintenant je calcule la quantité de mouvement, je fais la somme des quantités de mouvement de tous les points matériels, la somme des forces intérieures s'annule, donc il ne me reste que les forces extérieures. Et maintenant j'applique ma définition du centre de masse, je la dérive par rapport au temps, ici je vais avoir la vitesse du centre de masse, ce que je note V de G , ici j'ai la somme des m alpha, v alpha, c'est la somme des quantités de mouvement, c'est ce que j'ai noté grand P . Alors maintenant je peux énoncer ce principe dynamique : la masse totale fois l'accélération du centre de masse est égale à la somme des forces.

Notes

Summary



Système de points matériels :

$$P = \sum_{\alpha} p_{\alpha}, \quad p_{\alpha} = m_{\alpha} v_{\alpha} \quad L_0 = \sum_{\alpha} L_{0,\alpha} \quad L_{0,\alpha} = OP_{\alpha} \wedge p_{\alpha}$$

Et là il y a un piège. Cette équation est parfaitement juste mais ce qu'on en dit peut porter à confusion. On est tenté de dire que tout se passe comme si la masse totale du système de points matériels était centrée au centre de masse et que toutes les forces s'y exerçaient. Je n'ai rien dit de faux mais je veux dire que ce sont ces forces-là, c'est les forces qui s'exercent sur le système de points matériels, que j'applique au centre de masse auquel j'ai rassemblé toute la masse. C'est comme ça qu'il faut comprendre les choses. L'erreur qu'on fait quand on sur-interprète cette équation-là c'est de mettre toute la masse au centre de masse et d'analyser le problème de point matériel avec la force qu'on a pour le point matériel. Ça c'est faux. On verra avec la dynamique du solide indéformable ce point de détail dans l'interprétation de cette équation-là. Maintenant pour le moment cinétique on a l'équation suivante : si je fais la somme des moments cinétiques de tous les points matériels j'ai d de L_0 sur dt qui apparaît et ici les moments des forces intérieures s'annulent, il reste donc les moments en-haut des forces extérieures.

Notes

Summary



Système de points matériels :

$$P = \sum_{\alpha} p_{\alpha}, \quad p_{\alpha} = m_{\alpha} v_{\alpha} \quad L_0 = \sum_{\alpha} L_{0,\alpha} \quad L_{0,\alpha} = OP_{\alpha} \wedge p_{\alpha}$$

Ça j'appelle le théorème du moment cinétique et l'autre le théorème de la quantité de mouvement, j'utilise ce terme-là parce que ce sont deux résultats essentiels quand vous voulez aborder la dynamique d'un système de points matériels, je vous recommande de toujours examiner ce que ces deux lois dynamiques vous disent sur le système. Enfin, je vais utiliser ces équations-là pour dériver les principes de conservation. Regardez, si par exemple le système est isolé il n'y a donc aucune force extérieure, à ce moment-là ce terme est nul, donc V de G est constante donc la quantité de mouvement est constante Et ça c'est un principe très général. Si maintenant les moments des forces extérieures ont une somme nulle, alors c'est le moment cinétique qui est conservé. Il y a plus à dire, si il existe une direction u qui appartient au référentiel donc une direction, disons, si un vecteur unité \hat{u} qui appartient au référentiel et pour lequel les projections des forces ont une résultante nulle dans la direction \hat{u} . Alors vous avez la projection de la quantité de mouvement totale sur la direction \hat{u} qui est une constante. Pourquoi je dis ça?

Notes

Summary



Système de points matériels :

$$P = \sum_{\alpha} p_{\alpha}, \quad p_{\alpha} = m_{\alpha} v_{\alpha} \quad L_0 = \sum_{\alpha} L_{0,\alpha} \quad L_{0,\alpha} = OP_{\alpha} \wedge p_{\alpha}$$

Parce que on a d de P sur d de t qui vaut les forces extérieures, si maintenant je multiplie au sens du produit scalaire, par le vecteur \hat{u} des deux cotés, ici j'ai zéro, c'est ce que je suppose, et là je peux écrire d sur dt de \hat{u} produit scalaire avec P. Et donc ça c'est nul. Pourquoi je peux le faire? Parce que là, une dérivée d'un produit, il doit y avoir deux termes normalement, ce terme-là et ce terme-là mais, je le rappelle, je suppose que \hat{u} appartient au référentiel. Dans ce cas-là, la dérivée est de \hat{u} par rapport au temps et nulle donc il n'y a bien que ce seul terme-là qui apparaît dans cette dérivée. De la même manière, si les moments des forces extérieures ont une résultante qui a une projection nulle dans la direction \hat{u} , alors c'est le moment cinétique projeté dans cette direction \hat{u} qui est une constante. Je peux faire le même raisonnement en partant de cette équation-là et on l'a multiplié au sens du produit scalaire par \hat{u} , on obtient ce résultat-là. Dans le module suivant on va appliquer ces principes de conservation.

Notes

Summary

