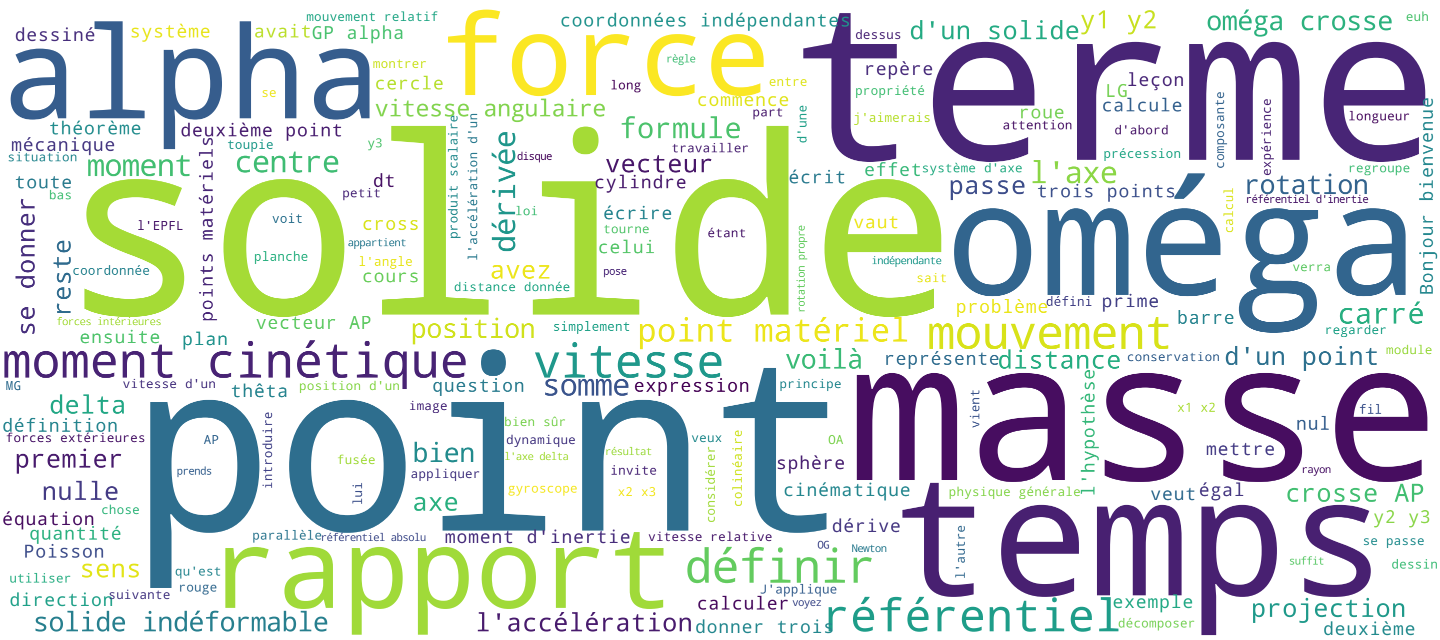
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

http://go.epfl.ch/traite-meca-1-18

Cinématique du solide

Mécanique, cours 18.1

Jean-Philippe Ansermet



Search MOOC

Video

EPFL

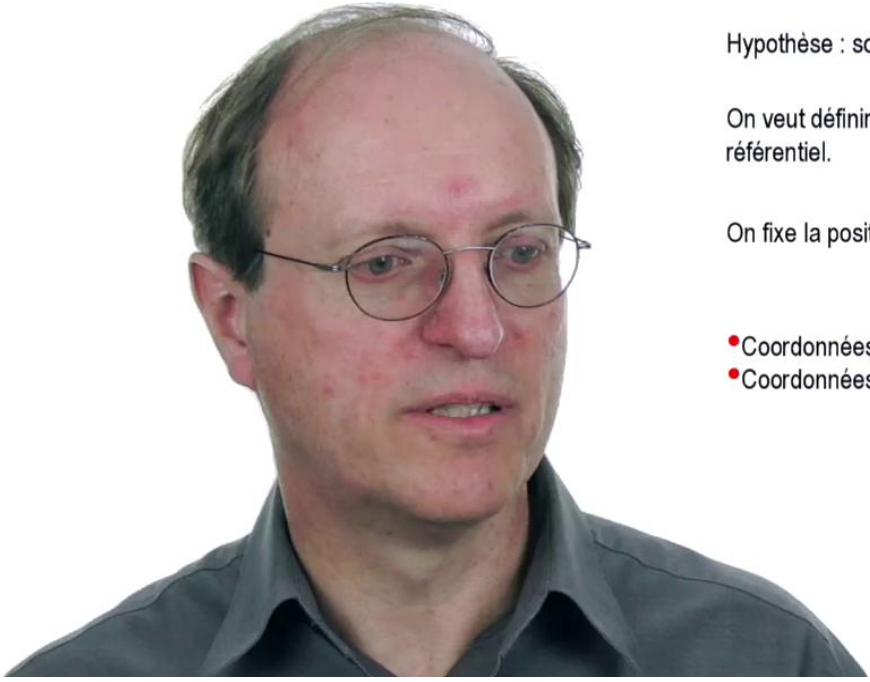
Bonjour, bienvenue au cours de physique générale de l'EPFL. Dans cette leçon, je commence la mécanique du solide indéformable. Jusqu'ici, on a travaillé avec le modèle du point matériel, or, dans les vidéos d'expériences, je montre des situations avec des solides en mouvement et clairement, on ne peut pas rendre compte du mouvement du solide, avec l'hypothèse du point matériel. Il faut considérer la distribution spatiale de masse. On doit donc revoir notre cinématique. On va le faire avec l'hypothèse simplificatrice selon laquelle le solide est indéformable. On va d'abord voir combien de coordonnées indépendantes, il faut se donner pour définir la position d'un solide indéformable par rapport à un référentiel, on va ensuite dériver une expression pour la vitesse de tout point du solide, dont on aura besoin pour calculer le moment cinétique, et ensuite, on verra aussi l'accélération de tout point du solide.

Notes

Summary

0m 04s

Coordonnées indépendantes



Hypothèse : solide **indéformable**

On veut définir la position d'un solide indéformable par rapport au référentiel.

On fixe la position de trois points non colinéaires du solide.

- Coordonnées d'un point du solide : 3
- Coordonnées d'un deuxième point : 2

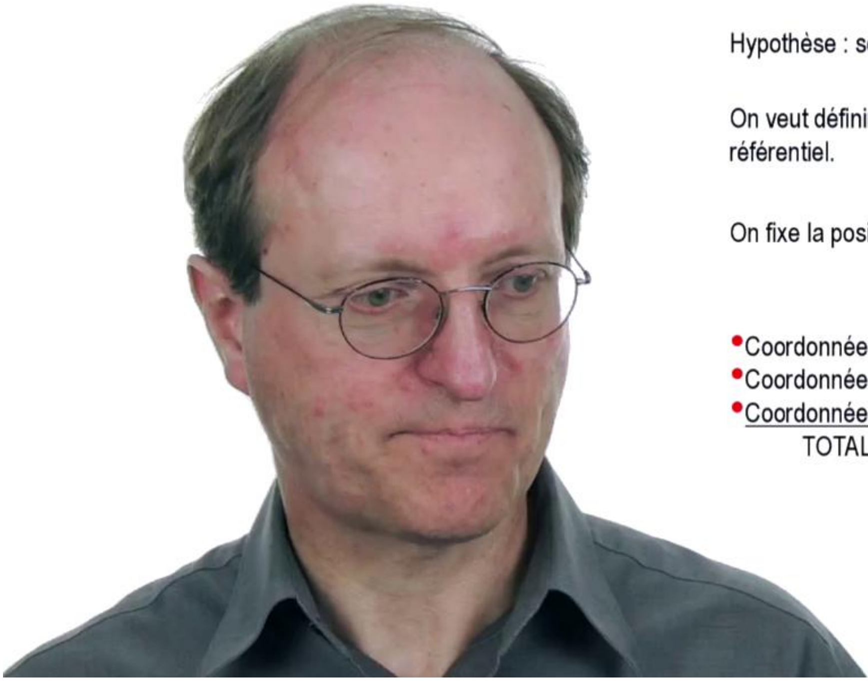
Je commence avec la question du nombre de coordonnées indépendantes qu'il faut se donner pour définir la position d'un solide, par rapport à un référentiel. Alors d'abord, j'insiste, on va travailler sous l'hypothèse, que le solide est indéformable, ça veut dire que, la distance entre deux points quelconques du solide est indépendante du temps, quoiqu'il arrive au solide. On va maintenant voir comment on va définir cette position, on va se donner trois points. Pourquoi trois points? Parce que si je donne deux points, mon solide peut encore tourner autour de l'axe qui passe par ces deux points. On voit bien qu'il faut se donner trois points, qui ne sont pas colinéaires. Alors maintenant, pour le premier point, comme pour le point matériel, il faudra se donner trois coordonnées indépendantes, pour définir la position de ce point. Maintenant, pour le deuxième point, et bien le deuxième point, on sait qu'il est à une distance donnée du premier. Ce deuxième point est donc sur une sphère, et il faut deux coordonnées pour définir la position sur une sphère. Par exemple, un parallèle et un méridien. Donc il faut deux coordonnées pour le deuxième point.

Notes

Summary

1m 14s

Coordonnées indépendantes



Hypothèse : solide **indéformable**

On veut définir la position d'un solide indéformable par rapport au référentiel.

On fixe la position de trois points non colinéaires du solide.

• Coordonnées d'un point du solide :	3
• Coordonnées d'un deuxième point :	2
• Coordonnées d'un troisième point :	1
TOTAL :	**6**

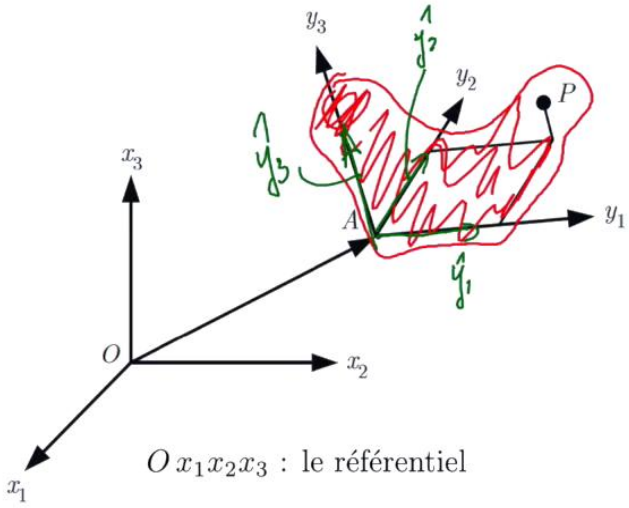
Mécanique | 2013 13

Maintenant, le troisième point, est à une distance donnée du premier, et une autre distance du deuxième. Ce point est donc à l'intersection de deux sphères, c'est-à-dire, il est sur un cercle. Et il suffit de une coordonnée, pour définir la position du point sur ce cercle.

Notes

Summary

2m 34s



$O\,x_1x_2x_3$: le référentiel

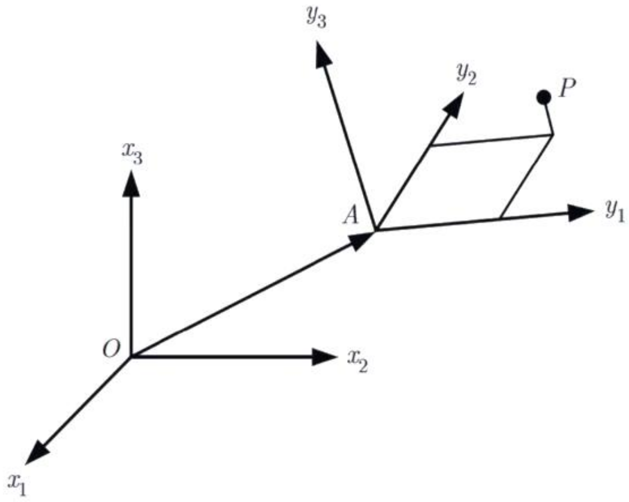
On a donc au total, six coordonnées, indépendantes, en général. Passons maintenant à la question de la cinématique. Je représente un référentiel avec un système d'axes 0 x1, x2, x3, comme ceci. Maintenant, j'ai un solide et ici, j'ai dessiné des axes, qui sont, si vous voulez, plantés dans le solide. Je peux esquisser un solide comme ceci, je vais mettre le point P dans le solide, voilà, ça c'est notre solide; et j'ai donc symbolisé ce solide, par ces axes-là. Maintenant, je dois définir comment ce solide évolue dans le référentiel d'inertie. Je vais donc introduire des vecteurs, y1, y2, et dans ce sens-là, on a y3, je vais définir un repère, voilà, je définis un repère, y1, y2, y3, qui est donc lié au solide.

Notes

Summary

3m 02s

Vitesse de tout point du solide



$$\boldsymbol{V}(P) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{OA} + \frac{d}{dt}\boldsymbol{AP} \qquad \boldsymbol{AP} = \sum_i y_i \hat{\boldsymbol{y}}_i$$

$$\boldsymbol{V}(P) = \boldsymbol{V}(A) + \frac{d}{dt}\left(\sum_i y_i \hat{\boldsymbol{y}}_i\right) = \boldsymbol{V}(A) + \sum_i y_i \frac{d\hat{\boldsymbol{y}}_i}{dt}$$

$$= \boldsymbol{V}(A) + \sum_i y_i (\boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\boldsymbol{y}}_i) = \boldsymbol{V}(A) + \boldsymbol{\omega} \wedge \underbrace{\sum_i y_i \hat{\boldsymbol{y}}_i}_{\overline{AP}}$$

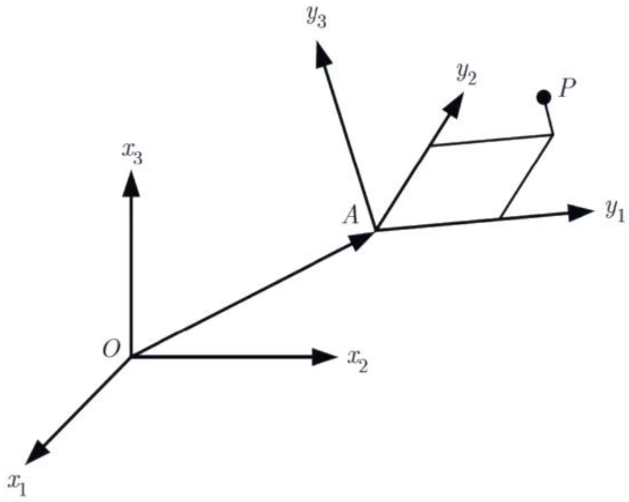
Et maintenant, on sait comment caractériser l'évolution d'un repère dans le temps, c'est par les formules de Poisson. Ici, oméga représente la vitesse angulaire caractéristique du solide. Je passe maintenant au calcul de la vitesse d'un point du solide. Alors, on veut calculer comment le rayon vecteur OP, évolue dans le temps. Or, on a ici le vecteur AP et on peut écrire que OP c'est OA plus AP. Et maintenant, on dérive par rapport au temps. La vitesse du point P, c'est la dérivée de OA, plus la dérivée de AP. Là, on aura simplement la vitesse du point A, et ici, il faut faire un peu attention, on va utiliser le fait que on peut décomposer le vecteur AP ici, a les projections que j'ai dessiné, on a un y1 ici, y2 là, le y3 est là. Maintenant, comme il s'agit d'un solide indéformable, y1, y2, y3 ne changent pas dans le temps. Ces yi sont indépendants du temps, les vecteurs, eux, dépendent du temps. Donc, quand je calcule cette dérivée-là, je dois faire porter la dérivée seulement sur les yi chapeau, les vecteurs unités. C'est ce que j'ai écrit ici. J'applique la formule de Poisson, elle est là, je regroupe tous les termes qui dépendent de i ici, et là, je reconnais, le vecteur AP.

Notes

Summary

4m 18s

Vitesse de tout point du solide



$$\boldsymbol{V}(P) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{OA} + \frac{d}{dt}\boldsymbol{AP} \qquad \boldsymbol{AP} = \sum_i y_i \hat{\boldsymbol{y}}_i$$

$$\boldsymbol{V}(P) = \boldsymbol{V}(A) + \frac{d}{dt}\left(\sum_i y_i \hat{\boldsymbol{y}}_i\right) = \boldsymbol{V}(A) + \sum_i y_i \frac{d\hat{\boldsymbol{y}}_i}{dt}$$

$$= \boldsymbol{V}(A) + \sum_i y_i \left(\boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\boldsymbol{y}}_i\right) = \boldsymbol{V}(A) + \boldsymbol{\omega} \wedge \sum_i y_i \hat{\boldsymbol{y}}_i$$

$$\boldsymbol{V}(P) = \boldsymbol{V}(A) + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{AP}$$

Mécanique | 2013 22

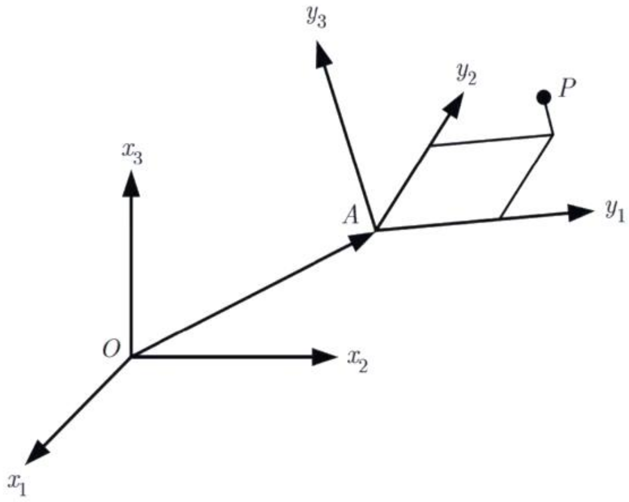
Et je peux conclure, la vitesse de n'importe quel point P du solide, c'est la vitesse d'un point A du solide, plus oméga crosse AP. J'ai écrit cette formule en rouge, parce que je vous recommande fortement de l'apprendre par coeur.

Notes

Summary

6m 04s

Accélération de tout point du solide



$$\boldsymbol{V}(P) = \boldsymbol{V}(A) + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{AP}$$

$$\boldsymbol{a}(P) = \dot{\boldsymbol{V}}(P) = \dot{\boldsymbol{V}}(A) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \boldsymbol{AP} + \boldsymbol{\omega} \wedge \frac{d\boldsymbol{AP}}{dt}$$

$$\boldsymbol{a}(P) = \boldsymbol{a}(A) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \boldsymbol{AP} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{AP})$$

Calculons maintenant l'accélération. On part de notre expression de la vitesse et on la dérive par rapport au temps. Quand on fait la dérivée de V de A, par rapport au temps, on a bien sûr, l'accélération du point A. Ensuite, la dérivée portée là-dessus donne deux termes, le terme en oméga point, et un terme de dérivée de AP sur dt, et là, on vient de le voir, ceci nous donne un oméga crosse AP. Voilà, j'ai la réponse finale pour l'accélération de tout point du solide, c'est l'accélération d'un point du solide, A, plus un terme en oméga point crosse AP, et un terme de type centripète, oméga crosse oméga, crosse AP. Ces termes-là devraient vous être familiers, en effet, on a traité de problèmes du mouvement relatif à un référentiel en mouvement lui-même par rapport à un référentiel absolu, c'est bien ce que représente cette image, on a un référentiel, ici, qui est en mouvement par rapport à celui-là, simplement que l'hypothèse, du solide indéformable, implique que ce point P est immobile dans y1, y2, y3. Donc de la grande formule qu'on avait pour l'accélération d'un point, quand on a un mouvement relatif, il ne reste que les termes que j'ai indiqués ici, parce que on pose dans cette formule VR, vitesse relative est nulle et l'accélération est nulle aussi.

Notes

Summary

6m 25s