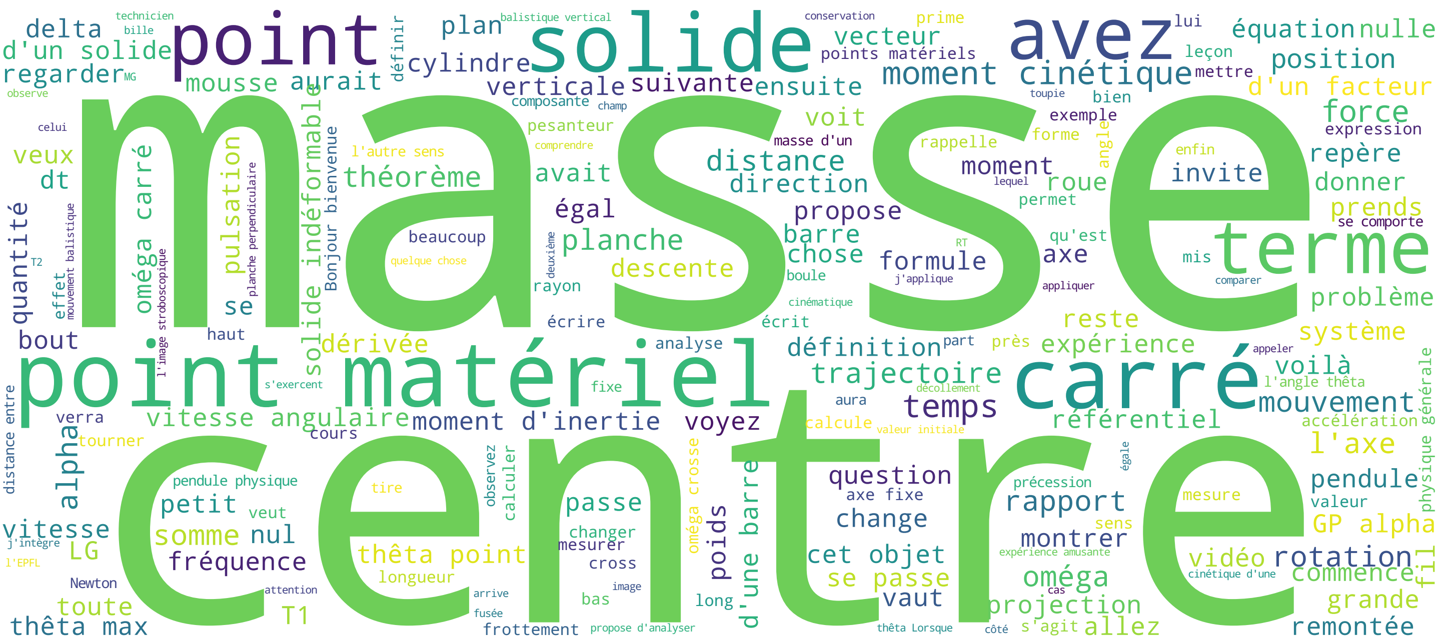
Expériences : solides avec axe fixe

Mécanique, cours 20.exp

Jean-Philippe Ansermet



Search MOOC

Video

Expériences : solides avec axe fixe

- Carré de mousse lancé
- Pendule physique
- Treuil
- Chute de planche et bille

Mécanique | 2013 6

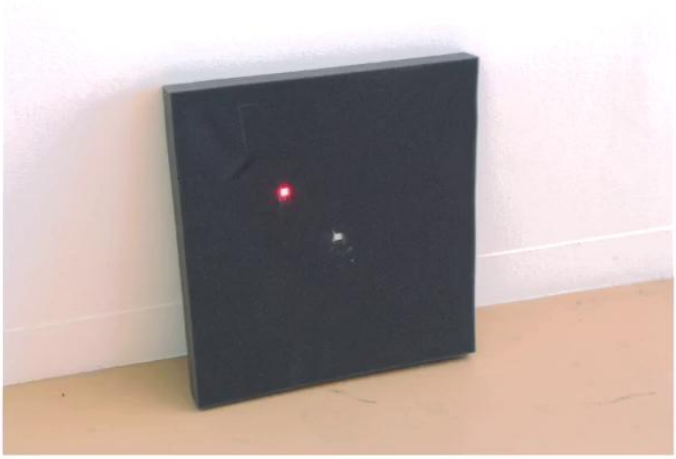
Bonjour, bienvenue au cours de physique générale de l'EPFL. Dans cette leçon, on a traité de problèmes de solides indéformables avec un axe fixe. Quand je dis axe fixe, je veux dire que l'orientation de l'axe est fixe par rapport au référentiel, cependant le solide lui-même peut avoir un mouvement de translation. J'aimerais élaborer sur la question de savoir ce que le théorème du centre de masse nous dit. Il est conventionnel de dire que le théorème du centre de masse déclare que le centre de masse d'un solide indéformable se comporte comme un point matériel auquel toutes les forces seraient exercées et qui aurait la masse de tout le solide. Quand on dit cela, il faut faire attention : les forces dont il s'agit sont les forces qui s'exercent sur le solide et pas sur le point matériel. Alors, dans un premier temps, je vais montrer une expérience où on va lancer un carré de mousse et on va observer le mouvement du centre de masse, et on verra une expression du fait que le centre de masse se comporte comme un point matériel, mais ensuite, pour rendre les choses bien claires, on va regarder un pendule physique, on va changer la forme du pendule tout en gardant sa masse constante et on verra que la période du pendule change, et pourtant, le centre de masse est le même et la masse reste la même.

Notes

Summary

0m 03s

Carré de mousse lancé



- On lance un carré de mousse synthétique muni de 2 LED, une au centre, l'autre au centre de masse décentré par la présence d'une batterie.

Mécanique | 2013 7

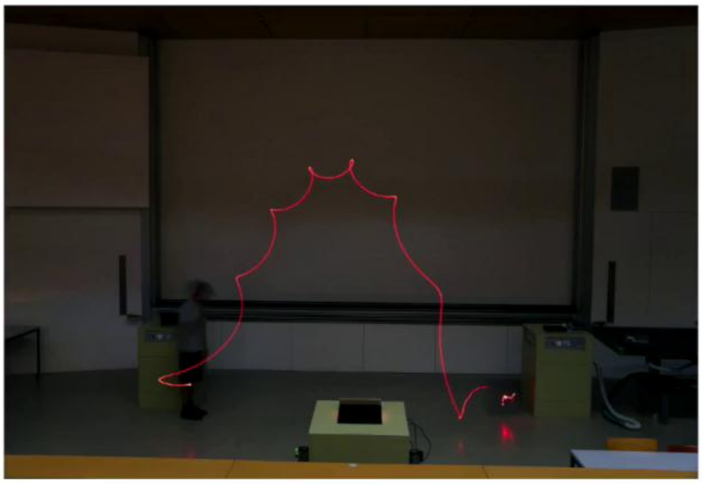
Ensuite on regardera un problème de treuil, donc c'est un fil qui tire sur un cylindre en rotation, et enfin on examinera une expérience amusante avec une bille et une planche qui tombe en même temps, et ça nous donnera l'occasion de réfléchir à la dynamique d'un point du solide. Je commence avec la question de la trajectoire du centre de masse d'un solide. Vous avez ici un carré de mousse et, on ne le voit pas, mais là derrière, il y a un objet de masse importante tel que ce point-là est au centre de masse de cet objet considéré comme un solide. Nous avons aussi la possibilité de mettre une diode au centre du carré, nous allons observer d'abord la trajectoire du centre de masse, puis la trajectoire du centre du carré.

Notes

Summary

2m 02s

Carré de mousse lancé



- Trajectoire de la LED à côté du centre de masse.

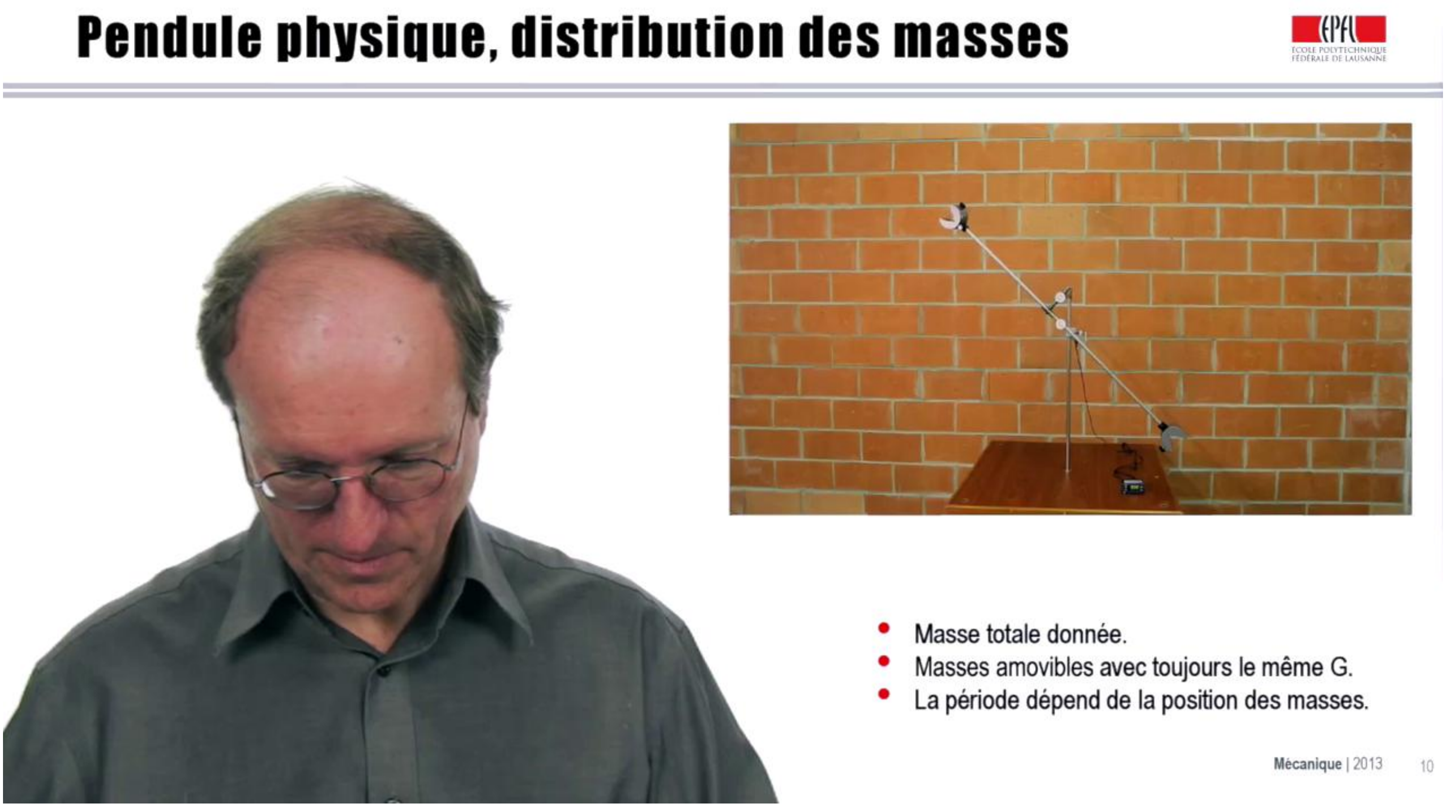
Mécanique | 2013 9

Alors voici, grâce à un temps d'exposition très long, voici la trajectoire du centre de masse. Alors, en effet, on voit quelque chose de presque parabolique. Il est normal que la trajectoire ne soit pas exactement parabolique parce qu'il y a les frottements de l'air, qui sont particulièrement importants puisque, je le rappelle, le solide est un gros bloc de mousse, mais on a la trajectoire qui ressemble à celle qu'on aurait si on avait un point matériel. On peut aussi regarder la trajectoire du centre du carré, qui n'est pas le centre de masse parce qu'il y a cet objet lourd qui est mis dans le coin du carré, et vous avez une trajectoire très intéressante, qui suggère notamment que la rotation du solide sur lui-même est freinée par le frottement de l'air bien plus, et affecte bien plus la trajectoire que, ce caractère oscillant de la trajectoire que la forme parabolique. Maintenant, je passe à un pendule. Vous avez ici une barre à laquelle on a attaché deux masses, et le technicien a mis une petite étiquette O sur la position de l'axe de rotation de cet objet, et vous observez, en-dessous, G, qui est le centre de masse.

Notes

Summary

2m 49s



À mon avis, l'étiquette est mise un petit peu de côté, mais vous allez voir que cette étiquette permet de montrer que le centre de masse n'a pas changé entre cette expérience et la suivante où on va déplacer les deux masses le long de la barre.

Notes

Summary

4m 26s

Je vous invite à regarder l'expérience, on va mesurer la fréquence d'oscillation du pendule Là, vous êtes d'accord avec moi, le centre de masse est légèrement décalé. Vous voyez le capteur, qui permet de mesurer la fréquence. Et pour les deux masses situées pratiquement au bout de la barre, on a, voilà maintenant on va faire la mesure de la fréquence, on va trouver à peu près 0,6 Hertz, et comme l'appareil fonctionne, les 0,6 Hertz correspondent à deux fois la fréquence du pendule. Maintenant, on déplace, vous voyez que le technicien ajuste la position par rapport à des repères qu'il avait marqués sur la tige, et il a remarqué ces repères, pour que, encore une fois, le centre de masse soit à la même position. Voilà. Maintenant on va faire osciller le système. On a la même masse, et maintenant la fréquence est deux fois plus grande.

Notes

Summary

4m 53s

Pendule physique, distribution des masses

$$I_\Delta \ddot{\theta} = -MgR\sin\theta \quad (R = |\boldsymbol{OG}|)$$

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\theta \quad \omega^2 = \frac{MgR}{I_\Delta}$$

N masses égales

$$\frac{g/R}{\omega^2} = \sum_i \frac{m_i}{M}\left(\frac{d_i}{R}\right)^2 = \frac{1}{NR^2}\sum_i^N d_i^2$$

Mécanique | 2013 15

Comment est-ce qu'on peut comprendre ce phénomène? Comment est-ce qu'on peut en rendre compte? Alors, voilà l'équation du mouvement pour un pendule physique, avec la notation habituelle, I Delta le moment d'inertie, vous avez R la distance du centre de masse à l'axe de rotation du pendule, et vous avez sinus thêta, thêta c'est l'angle d'écart par rapport à la verticale, comme d'habitude. Maintenant, je peux réécrire cette formule de cette manière-là, j'introduis oméga carré, le carré de la pulsation de ce système, si les angles sont petits on a un oscillateur harmonique, c'est pour ça que je vais appeler oméga carré la pulsation, et maintenant notez que, si j'avais non pas un solide mais un point matériel, au dénominateur j'aurais ici M fois R carré donc j'aurais g sur R, ça c'est seulement pour un point matériel. D'accord. Maintenant si j'ai N masses égales, je vais comparer ce rapport g sur R, la pulsation carrée qu'on aurait si on avait un point matériel avec le oméga carré, et je vais, comme je divise le solide en N masses m i, j'applique la définition du moment d'inertie, j'ai donc les d i carré qui apparaissent.

Notes

Summary

6m 07s

Pendule physique, distribution des masses

$$I_\Delta \ddot{\theta} = -MgR\sin\theta \quad (R = |\boldsymbol{OG}|)$$

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\theta \quad \omega^2 = \frac{MgR}{I_\Delta}$$

N masses égales

$$\frac{g/R}{\omega^2} = \sum_i \frac{m_i}{M}\left(\frac{d_i}{R}\right)^2 = \frac{1}{NR^2}\sum_i^N d_i^2$$

$$R^2 = \left|\sum_i \frac{m_i}{M}\boldsymbol{d}_i\right|^2 = \frac{1}{N^2}\left|\sum_i^N \boldsymbol{d}_i\right|^2$$

$$\frac{g/R}{\omega^2} = \frac{N\sum_i^N d_i^2}{|\sum_i^N \boldsymbol{d}_i|^2}$$

Comme toutes les masses sont égales, je peux sortir les masses de la somme, et j'ai un 1 sur N R carré fois la somme des carrés des distances. Maintenant, R c'est la distance entre le centre de masse et l'axe, donc la distance O G. J'écris ici la définition de R au carré. Et donc, ce rapport des pulsations au carré qu'on aurait si on avait un point matériel et pas un solide est égal au rapport des sommes des distances au carré et des sommes des vecteurs de position au carré, ce qui n'est donc pas du tout la même chose, et si vous avez, dans l'expérience que je viens de vous montrer, vous avez, il est possible de changer la position des deux masses de telle manière à ce que la somme vectorielle des d i ne change pas, mais la somme des d i carré, bien entendu, change.

Notes

Summary

7m 50s

Treuil

- Le fil se déroule, la masse descend.
- Puis, le fil s'enroule et la masse remonte.
- Quand les masses sont rapprochées d'un facteur 2, le temps d'un aller-retour change d'un facteur 2 aussi.

Mécanique | 2013 18

Je passe maintenant à une expérience où on a un solide sur lequel on tire par une ficelle enroulée sur un cylindre, ici le cylindre est vertical, pour tirer sur la ficelle on a accroché un poids, vous allez voir le poids descendre pendant que le solide formé d'une barre horizontale et de deux masses se met à tourner. Et on va comparer sur cette vidéo ce qu'on observe si on a les masses à une distance deux fois plus petite. Là vous avez deux images.

Notes

Summary

9m 00s

Alors sur la vidéo, on ne voit que la descente du poids, mais pratiquement, on peut très bien laisser le poids remonter, et c'est ce que je me propose d'analyser tout à l'heure. Vous observez que Il y a un facteur 2 approximativement entre les temps de descente selon les deux formes du solide qu'on s'est données, solides en rotation.

Notes

Summary

9m 37s

Treuil

$$z = z_0 + R\theta \quad (t < T_1)$$
$$z = z_0 - R\theta \quad (t > T_1)$$
$$M\ddot{z} = Mg - T$$
$$I_\Delta \ddot{\theta} = +RT \quad (t < T_1)$$
$$I_\Delta \ddot{\theta} = -RT \quad (t > T_1)$$
$$I_\Delta \ddot{\theta} = \epsilon RT \qquad \dot{z} = \epsilon R\dot{\theta}$$
$$\epsilon = +1 \quad (t < T_1) \qquad \epsilon = -1 \quad (t > T_1)$$
$$\ddot{\theta} = \epsilon \frac{MgR}{MR^2 + I_\Delta} = \epsilon\Gamma$$

Mécanique | 2013 24

Comment est-ce qu'on analyse cette expérience? Si on fait le mouvement global descente et remontée, une petite difficulté que je me propose de présenter ici. Donc on va dire que si le temps T1, c'est le temps pour aller, pour que la masse, le poids au bout du fil aille jusqu'en bas Je vais écrire z égal un certain z 0, z étant dans la verticale plus R thêta. Lorsque thêta augmente z augmente vers le bas, et puis vous avez z égal z 0 moins R thêta, lorsqu'on est arrivé au bout du fil et le fil commence à s'enrouler sur le cylindre, mais dans l'autre sens. J'écris l'équation de Newton pour le poids au bout du fil. Avec T, la force qui s'exerce sur le poids, c'est la force que le fil exerce sur le poids. Et maintenant, j'écris le théorème du moment cinétique pour notre solide composé d'une barre et de deux masses au bout. Alors, dans la descente, j'ai plus RT, ce qui fait augmenter thêta. Après, on a moins RT, ce qui fait que l'on a une décélération, au fur et à mesure que le poids remonte. Je peux introduire epsilon qui vaut plus 1 pour la descente, moins 1 pour la remontée, pour tenir compte de ces différents signes. Et j'obtiens l'équation synthétique suivante, qui me donne : le thêta point point égal epsilon fois une contante.

Notes

Summary

10m 10s

Treuil

$$z = z_0 + R\theta \quad (t < T_1)$$
$$z = z_0 - R\theta \quad (t > T_1)$$
$$M\ddot{z} = Mg - T$$
$$I_\Delta \ddot{\theta} = +RT \quad (t < T_1)$$
$$I_\Delta \ddot{\theta} = -RT \quad (t > T_1)$$
$$I_\Delta \ddot{\theta} = \epsilon RT \qquad \dot{z} = \epsilon R\dot{\theta}$$
$$\epsilon = +1 \quad (t < T_1) \qquad \epsilon = -1 \quad (t > T_1)$$
$$\ddot{\theta} = \epsilon \frac{MgR}{MR^2 + I_\Delta} = \epsilon\Gamma$$

Mécanique | 2013 24

Donc je vais écrire : epsilon fois gamma. Gamma rappelant g, parce que pour la variable thêta, on a à peu près la même chose que ce qu'on a en balistique, dans le champ de la pesanteur.

Notes

Summary

11m 52s

Treuil

$$z = z_0 + R\theta \quad (t < T_1)$$
$$z = z_0 - R\theta \quad (t > T_1)$$
$$M\ddot{z} = Mg - T$$
$$I_\Delta \ddot{\theta} = +RT \quad (t < T_1)$$
$$I_\Delta \ddot{\theta} = -RT \quad (t > T_1)$$
$$I_\Delta \ddot{\theta} = \epsilon RT \qquad \dot{z} = \epsilon R\dot{\theta}$$
$$\epsilon = +1 \quad (t < T_1) \qquad \epsilon = -1 \quad (t > T_1)$$
$$\ddot{\theta} = \epsilon \frac{MgR}{MR^2 + I_\Delta} = \epsilon \Gamma$$

$$\theta(t) = \theta(0) + \dot{\theta}(0)t + \frac{1}{2}\Gamma t^2 \qquad (t < T_1)$$
$$\theta_{max} = \frac{1}{2}\Gamma T_1^2$$
$$(t > T_1)$$
$$\theta(t) = \theta_{max} + \dot{\theta}(T_1)(t - T_1) - \frac{1}{2}\Gamma(t - T_1)^2$$
$$\dot{\theta}(T_1) = \Gamma T_1$$
$$0 = \frac{1}{2}T_1^2 + T_1(T_2 - T_1) - \frac{1}{2}(T_2 - T_1)^2$$
$$T_2 = 2T_1$$
$$T_2 = 2\sqrt{\frac{2\theta_{max}}{\Gamma}} = 2\sqrt{\frac{2\theta_{max}(MR^2 + I_\Delta)}{MgR}}$$

Mécanique | 2013 34

Si j'intègre, je reprends les équations que j'avais maintenant, et j'intègre, j'ai tout naturellement une formule telle que celle-ci, avec ici le thêta de 0 que je vais prendre nul. Le thêta point de 0, on est parti d'une vitesse angulaire initiale nulle, on prend 0 ici aussi. Je définis thêta max comme la valeur de thêta, lorsque que le fil est complètement déroulé. Maintenant, quand il s'agit du, dans mouvement de remontée du poids, je peux écrire, thêta de t en intégrant cette équation du mouvement, avec le moins, cette fois-ci, epsilon vaut moins 1. J'ai donc un moins qui apparait ici, et j'ai ici la valeur initiale, la valeur à T1, c'est thêta max. Ici, j'ai la vitesse angulaire à T1 qui apparaît. Maintenant, la vitesse angulaire en T1, il suffit de dériver ça par rapport au temps, on a gamma t. Donc en T1, on a gamma fois T1, c'est ce que j'ai écrit ici. Et quand on arrive à la valeur T2, c'est-à-dire quand le fil s'est complètement enroulé dans l'autre sens, et thêta revient à sa valeur initiale, c'est-à-dire 0, j'ai cette équation-là. Un petit peu d'algèbre vous permet de montrer qu'on trouve le résultat auquel on doit s'attendre, c'est-à-dire que T2 c'est 2 fois T1, le temps pour faire l'aller-retour, c'est 2 fois le temps de la descente du poids.

Notes

Summary

12m 04s

Treuil

$$z = z_0 + R\theta \quad (t < T_1)$$
$$z = z_0 - R\theta \quad (t > T_1)$$
$$M\ddot{z} = Mg - T$$
$$I_\Delta \ddot{\theta} = +RT \quad (t < T_1)$$
$$I_\Delta \ddot{\theta} = -RT \quad (t > T_1)$$
$$I_\Delta \ddot{\theta} = \epsilon RT \qquad \dot{z} = \epsilon R\dot{\theta}$$
$$\epsilon = +1 \quad (t < T_1) \qquad \epsilon = -1 \quad (t > T_1)$$
$$\ddot{\theta} = \epsilon \frac{MgR}{MR^2 + I_\Delta} = \epsilon\Gamma$$

$$\theta(t) = \theta(0) + \dot{\theta}(0)t + \frac{1}{2}\Gamma t^2 \qquad (t < T_1)$$
$$\theta_{max} = \frac{1}{2}\Gamma T_1^2$$
$$(t > T_1)$$
$$\theta(t) = \theta_{max} + \dot{\theta}(T_1)(t - T_1) - \frac{1}{2}\Gamma(t - T_1)^2$$
$$\dot{\theta}(T_1) = \Gamma T_1$$
$$0 = \frac{1}{2}T_1^2 + T_1(T_2 - T_1) - \frac{1}{2}(T_2 - T_1)^2$$
$$T_2 = 2T_1$$
$$T_2 = 2\sqrt{\frac{2\theta_{max}}{\Gamma}} = 2\sqrt{\frac{2\theta_{max}(MR^2 + I_\Delta)}{MgR}}$$
$$MR^2 \gg I_\Delta \implies T_2 \approx 2\sqrt{\frac{2\theta_{max} I_\Delta}{MgR}}$$

Mécanique | 2013 35

Maintenant, thêta max étant donné ici, je peux calculer T2, ça me donne cette formule là. Maintenant, dans cette expérience, R c'est le rayon du cylindre, il est beaucoup plus petit que la distance entre les masses et l'axe, donc je vais pouvoir négliger les masses, toutes les masses utilisées sont à peu près du même ordre de grandeur. Donc ce R carré est beaucoup plus petit que les distances au carré qui interviennent dans I delta. Je peux donc faire cette approximation-là dans le numérateur. Vous noterez qu'il n'est pas question de faire une telle approximation ici, au dénominateur. On a donc T2 qui va approximativement, comme la racine carrée du moment d'inertie, en changeant la position des masses d'un facteur 2, on change le moment d'inertie d'un facteur 4, et donc on change le temps d'un facteur 2. C'est ce qu'on a observé. Je passe maintenant à cette expérience amusante.

Notes

Summary

13m 48s

Chute de la planche et de la bille

- Une boule est au bout de la planche.
- On lâche le tout.

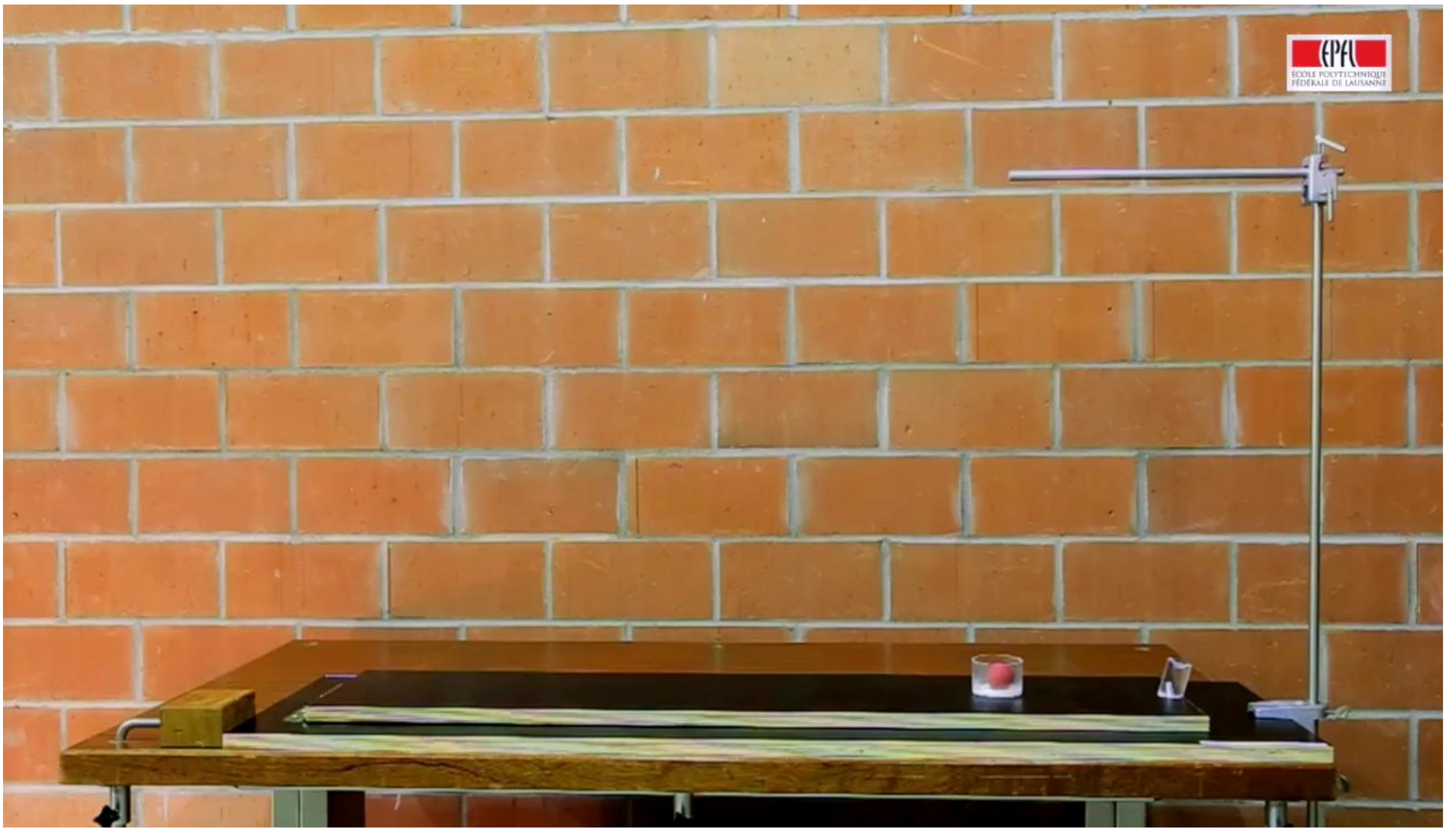
Mécanique | 2013 36

Vous avez une planche articulée à la base, et une boule de mastic qui va tomber, qu'on va laisser tomber en même temps que la planche, observez ce que ce passe.

Notes

Summary

14m 57s

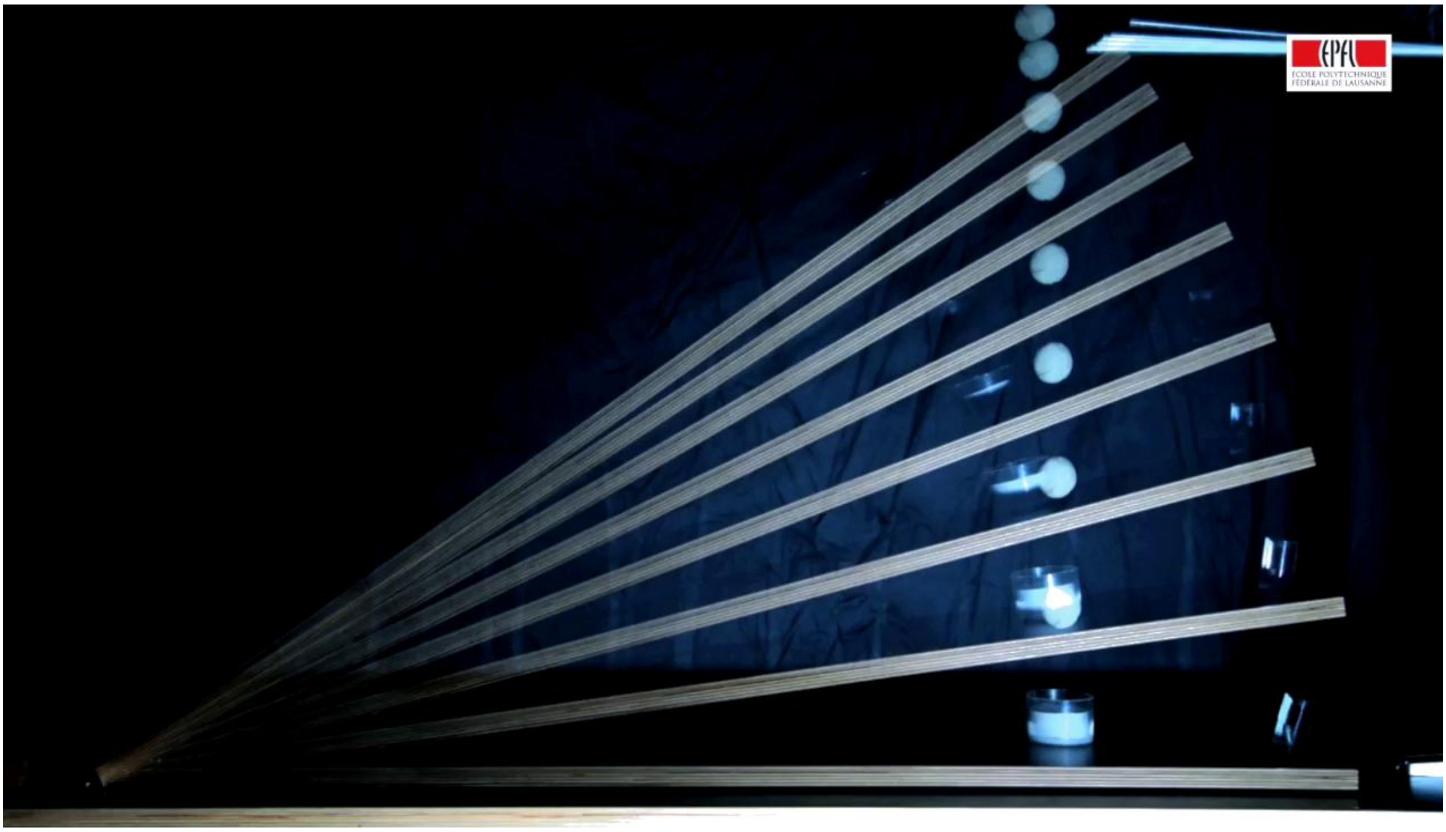


Ça va très vite, on a l'impression, en tout cas la première fois qu'on voit l'expérience, c'est pas toujours clair ce qui se passe. Alors, les techniciens ont préparé une image stroboscopique, que je vous invite à regarder maintenant. Je crois d'abord qu'on verra, voilà, le mouvement au ralenti, et l'image stroboscopique.

Notes

Summary

15m 34s



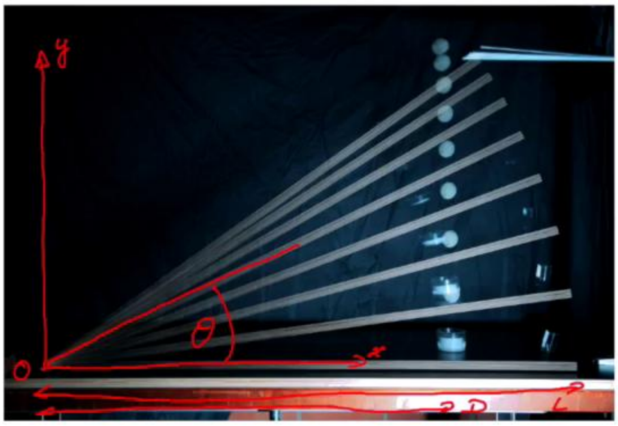
Alors, qu'est-ce qui se passe? Je vous propose une analyse de cette expérience. Je vous montre à nouveau l'image stroboscopique, je propose d'analyser ce problème.

Notes

Summary

16m 05s

Chute de la planche et de la bille



- Prise de vue stroboscopique

Vous avez donc un solide, on va donner cette distance-là, la longueur de la planche, on va l'appeler L. On va appeler D, la position du point matériel, on va traiter cette boule comme un point matériel. Je vais me donner un système d'axes, centré en haut le point d'articulation de la planche. Donc on aura X ici, Y dans la verticale vers le haut, comme ceci. On va utiliser l'angle thêta, par exemple, si je prends cette photo-là de la planche, voilà l'angle thêta. Et, pour le point matériel, on utilisera les coordonnées cylindriques avec cet même angle thêta. Voila, comment je conduis l'analyse. D'abord je calcule le moment d'inertie de la planche. Qu-est-ce que j'ai fait ici?

Notes

Summary

16m 19s

Chute de la planche et de la bille

$$I_O = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{3}$$

$$I_O\ddot{\theta} = -Mg\frac{L}{2}cos\theta$$

$$\boldsymbol{a}(P) = -D\dot{\theta}^2\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + D\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = cos\theta\hat{\boldsymbol{x}} + sin\theta\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = -sin\theta\hat{\boldsymbol{x}} + cos\theta\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$a_y(t=0) = -\frac{3gD}{2L}cos^2\theta_0$$

Mécanique | 2013 43

Ici, j'ai appliqué le théorème de Steiner. ML carré sur 12 c'est le moment cinétique d'une barre, c'est aussi le moment cinétique d'une planche, pour un axe dans le plan de la planche, perpendiculaire enfin, dans le plan de la planche, perpendiculaire à l'axe de la planche, et passant par le centre de masse de la planche. Donc si maintenant je veux savoir ce qui se passe au bout de la planche, j'applique le théorème de Steiner. Le bout de la planche, le point O est à la distance L sur 2 du centre de masse, donc j'ai cette application du théorème de Steiner. J'écris ensuite le théorème du moment cinétique, pour ce cas particulier. Ensuite, je vais aller analyser la cinématique du point matériel. Alors si on a un point P, qui est donné par les coordonnées thêta et puis la coordonnée radiale vaut D, c'est la position du point matériel, la distance du point matériel à l'axe qui passe en O. Je veux maintenant considérer l'accélération verticale de ce point matériel. Donc, j'exprime les projections des vecteurs e rho et e thêta sur X et Y Y, je vous le rappelle, c'est la verticale. Et si je regarde ce qui se passe au temps T égal 0, je n'ai pas de vitesse initiale thêta point nul.

Notes

Summary

17m 27s

Chute de la planche et de la bille

$$I_O = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{3}$$

$$I_O\ddot{\theta} = -Mg\frac{L}{2}cos\theta$$

$$\boldsymbol{a}(P) = -D\dot{\theta}^2\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + D\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = cos\theta\hat{\boldsymbol{x}} + sin\theta\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = -sin\theta\hat{\boldsymbol{x}} + cos\theta\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$a_y(t=0) = -\frac{3gD}{2L}cos^2\theta_0$$

$$|a_y(t=0)| > g$$

$$\frac{D}{L} > \frac{2}{3}\frac{1}{cos^2\theta_0}$$

Mécanique | 2013 45

Il y a donc le terme en T thêta point point, que je prends de la formule du théorème du moment cinétique, et j'obtiens ce qui est indiqué. Et maintenant, si je cherche la condition selon laquelle le point matériel de la planche a une accélération plus grande que G, ce qui expliquerait le décollement du point matériel par rapport au point coïncidant au point matériel mais sur la planche, vous avez cette condition-là. Donc sous cette condition-là, vous avez le point de la planche qui tenait le point matériel, qui part avec une accélération plus grande que le point matériel dans le champ de la pesanteur. Donc il y a un décollement, et l'un suit donc un mouvement balistique vertical, le point matériel suit le mouvement balistique vertical, alors que la planche elle, appartenant au solide, démarre avec une accélération verticale plus grande que G.

Notes

Summary

19m 05s