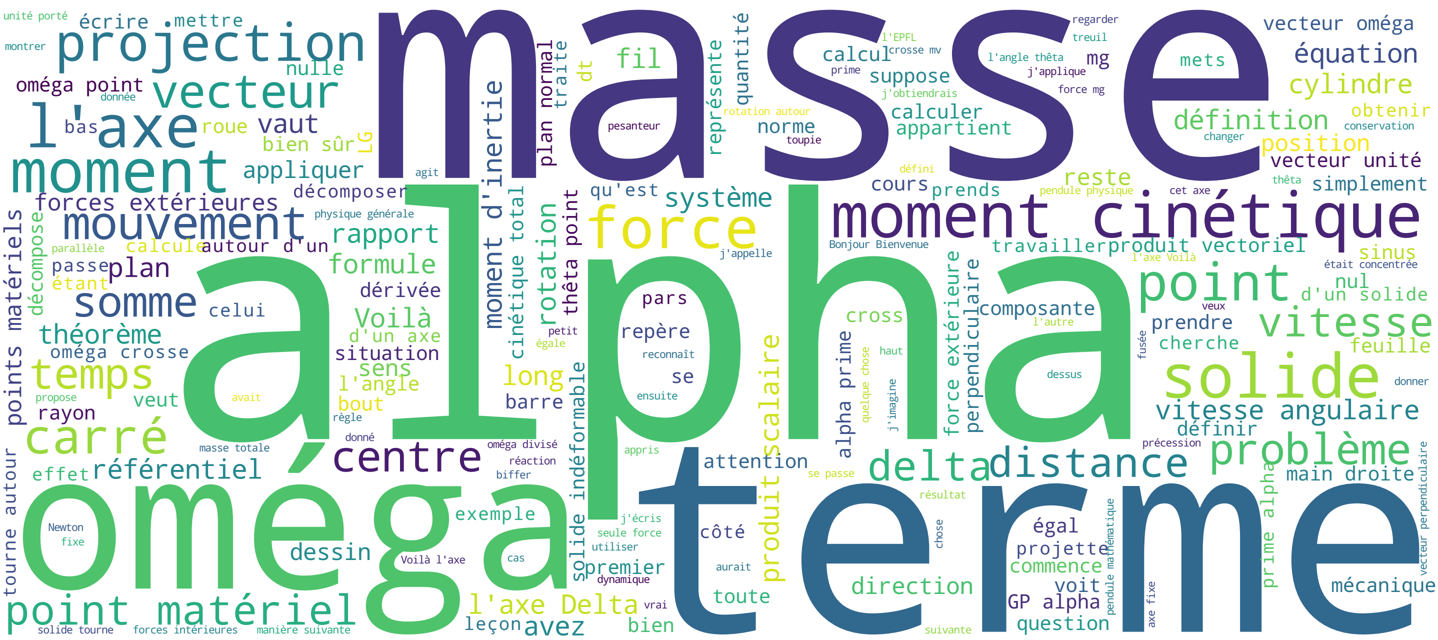
Solide avec un axe fixe

Mécanique, cours 20.1

Jean-Philippe Ansermet

http://go.epfl.ch/traite-meca-1-20



Search MOOC

Video

EPFL

Solide avec un axe fixe

- Moment cinétique projeté sur l’axe
- Moment des forces projeté sur l’axe
- Pendule physique
- Treuil

Mécanique | 2013 6

Bonjour. Bienvenue au cours de physique générale de l'EPFL. Dans cette leçon, on va voir comment on traite un problème de mécanique du solide indéformable quand le solide tourne autour d'un axe fixe. On va obtenir une équation d'évolution pour l'angle qui caractérise le mouvement du solide. On va d'abord projeter le moment cinétique sur l'axe. On va ensuite projeter le moment des forces sur ce même axe. On va obtenir une équation du mouvement pour l'angle, qu'on va utiliser dans deux exemples : le problème du pendule physique, et ce que j'appelle le problème du treuil.

Notes

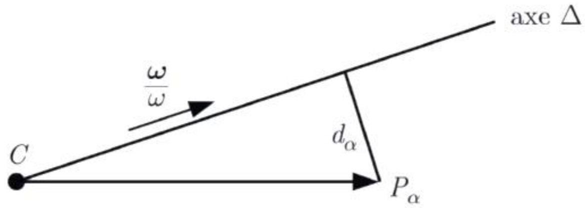
Summary

0m 03s

Moment cinétique projeté sur l'axe fixe

$\boldsymbol{\omega}$: vitesse angulaire, constante.

C : point du solide, sur l'axe, donc fixe.



$$\boldsymbol{L}_C = \sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{CP}_\alpha \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{CP}_\alpha) \; = \sum_\alpha m_\alpha \big((\boldsymbol{CP}_\alpha \cdot \boldsymbol{CP}_\alpha)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{CP}_\alpha \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{CP}_\alpha \big)$$

$$\boldsymbol{L}_C \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}$$

Mécanique | 2013 13

Je commence avec la projection du moment cinétique sur l'axe. Voilà la situation : on a un axe autour duquel tourne notre solide. On a une vitesse angulaire, la vitesse angulaire du solide. Je définis un point C qui est sur l'axe, donc ce point C appartient au référentiel. Et puis, comme d'habitude, je représente ici un point matériel, parce que je considère que mon solide, je le traite comme un ensemble de points matériels de masse m alpha en P alpha à une distance d alpha de l'axe. Je pars de la définition du moment cinétique pour le solide. Dans cette définition, on notera que j'ai calculé la vitesse du point P alpha comme oméga cross C P alpha. On a donc bien une description d'un solide. Maintenant j'utilise la formule a cross b cross c égale a c b moins a b produit scalaire fois c. Je l'applique à cette situation-là, j'aurai donc C P alpha au carré fois oméga, c'est ce terme, C P alpha produit scalaire avec oméga fois C P alpha, c'est ce deuxième terme. Et maintenant je vais faire le produit scalaire avec un vecteur unité, oméga divisé par norme de oméga, ça nous donne un vecteur unité, et le produit scalaire avec le vecteur unité, ça nous donne la projection sur l'axe de la grandeur vectorielle, ici le moment cinétique en C.

Notes

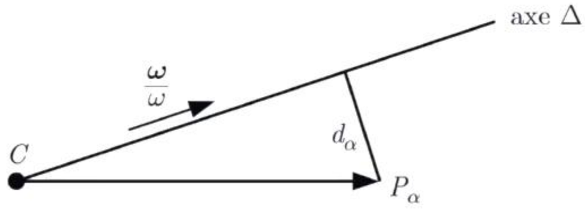
Summary

0m 44s

Moment cinétique projeté sur l'axe fixe

ω : vitesse angulaire, constante.

C : point du solide, sur l'axe, donc fixe.



$$\boldsymbol{L}_C = \sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{CP}_\alpha \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{CP}_\alpha) = \sum_\alpha m_\alpha \big((\boldsymbol{CP}_\alpha \cdot \boldsymbol{CP}_\alpha)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{CP}_\alpha \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{CP}_\alpha \big)$$

$$\boldsymbol{L}_C \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} = \omega \sum_\alpha m_\alpha \left(\boldsymbol{CP}_\alpha \cdot \boldsymbol{CP}_\alpha - \left(\boldsymbol{CP}_\alpha \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \right)^2 \right) = I_\Delta \, \omega$$

Mécanique | 2013 15

Quand j'explicite avec cette formule-là la projection de oméga, il y a deux vecteurs, il y a oméga et C P alpha, quand je projette oméga, j'ai bien sûr cette projection oméga du vecteur oméga, simplement. Ici, je vais multiplier, produit scalaire, avec oméga sur oméga, et si maintenant ici, je divise aussi par oméga et je multiplie par oméga ici, on voit qu'on a ce terme C P alpha oméga sur oméga au carré. C'est ce que j'ai écrit ici avec le oméga qui est là-dedans. Et maintenant, ici, on reconnaît la norme au carré du vecteur, et ça, c'est la projection de C P alpha sur l'axe, donc on a ça au carré moins ça au carré, ça fait cette distance au carré, qu'on a appelée d alpha, donc ici j'ai un d alpha au carré et j'ai une somme sur alpha des m alpha d alpha au carré. Ça, on l'a appelé I Delta. Par conséquent, la projection de L C sur l'axe vaut le moment cinétique du solide par rapport à cet axe fois la vitesse angulaire oméga scalaire.

Notes

Summary

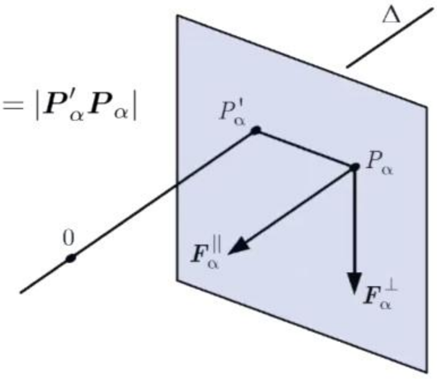
2m 47s

Moment des forces projeté sur l'axe fixe

$$M_O^{ext} = \sum_\alpha OP_\alpha \wedge F_\alpha$$

$$\hat{u} = \frac{\omega}{\omega} \qquad O \equiv C$$

$$d_\alpha = |P'_\alpha P_\alpha|$$



$$\hat{u} \cdot M_O^{ext} = \hat{u} \cdot \sum_\alpha OP_\alpha \wedge F_\alpha$$
$$= \hat{u} \cdot \sum_\alpha (OP'_\alpha + P'_\alpha P_\alpha) \wedge (F_\alpha^{\parallel} + F_\alpha^{\perp})$$

Maintenant, examinons la projection du moment des forces. Je pars de ma définition du moment des forces. Je vais, pour simplifier les écritures, appeler u le vecteur unité porté par l'axe de rotation. Je vais, on a l'habitude de travailler avec O, mais on peut travailler avec O ou avec C, C étant sur l'axe, C est un point du référentiel que je pourrais appeler O, comme ici. La projection du moment des forces sur l'axe, c'est le produit scalaire du vecteur unité porté par l'axe et du vecteur M O extérieur. Je mets ici la définition du moment en O des forces extérieures. Et puis, je vais décomposer pour faire apparaître un terme qui est assez intuitif. Alors je décompose O P alpha en deux termes. On va le décomposer en O P alpha prime et P alpha prime P alpha, somme de deux vecteurs dont un est le long de l'axe et l'autre est normal à l'axe, ce plan-là représente un plan normal à l'axe Delta. Les forces, je les décompose aussi. Je mets une force le long de l'axe, et une force qui appartient au plan normal à l'axe, que j'appelle F alpha perpendiculaire.

Notes

Summary

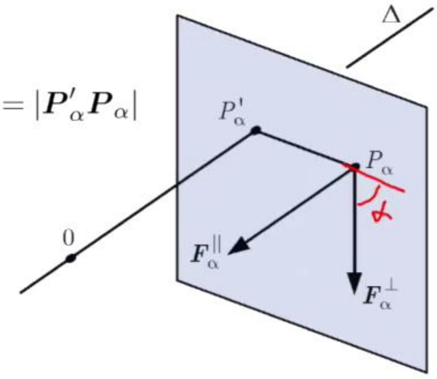
4m 29s

Moment des forces projeté sur l'axe fixe

$$M_O^{ext} = \sum_\alpha OP_\alpha \wedge F_\alpha$$

$$\hat{u} = \frac{\omega}{\omega} \qquad O \equiv C$$

$$d_\alpha = |P'_\alpha P_\alpha|$$



$$\begin{aligned} \hat{u} \cdot M_O^{ext} &= \hat{u} \cdot \sum_\alpha OP_\alpha \wedge F_\alpha \\ &= \hat{u} \cdot \sum_\alpha (OP'_\alpha + P'_\alpha P_\alpha) \wedge (F_\alpha^{\parallel} + F_\alpha^{\perp}) \\ &= \sum_\alpha |F_\alpha^{\perp}|\, d_\alpha \sin\left(\underbrace{\text{angle}(P'_\alpha P_\alpha, F_\alpha^{\perp})}_{\alpha}\right) \end{aligned}$$

Mécanique | 2013 22

Là, j'ai deux forces. Maintenant, attention, ce qu'on cherche, c'est la composante du moment des forces le long de l'axe Delta. Or si on fait un calcul avec un terme comme O P alpha prime qui est le long de l'axe, le produit vectoriel implique qu'on va avoir un vecteur perpendiculaire à O P prime alpha. Et ça, ça aura une contribution nulle dans la direction u, donc ce terme-là, je peux le biffer. De même, ici, j'ai un vecteur de forces qui est parallèle à l'axe. Quand je fais le produit vectoriel, je vais trouver un vecteur perpendiculaire, donc dans ce plan-là, et qui a une composante nulle dans la direction Delta, donc ce terme-là, je peux le biffer aussi. Il ne me reste plus que ce produit vectoriel, là. Ces deux vecteurs sont dans le plan normal à l'axe, le produit vectoriel sera le long de l'axe et je peux calculer la projection de ce produit vectoriel de la manière suivante : j'ai la norme du vecteur force, perpendiculaire, la distance P prime alpha P alpha, qu'on appelle d alpha, et le sinus de l'angle, c'est le sinus de l'angle entre les deux vecteurs, c'est ce sinus-là, j'aurais pu l'appeler alpha, ça c'est alpha, je l'ai écrit explicitement comme ceci. Sur le dessin, j'ai à peu près 90 degrés, et c'est absolument clair que si alpha égale 0, on aurait un moment nul.

Notes

Summary

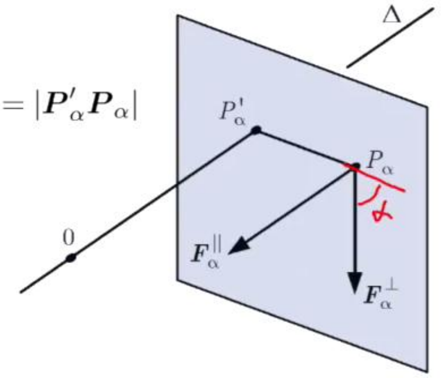
6m 12s

Moment des forces projeté sur l'axe fixe

$$M_O^{ext} = \sum_\alpha OP_\alpha \wedge F_\alpha$$

$$\hat{u} = \frac{\omega}{\omega} \qquad\qquad O \equiv C$$

$d_\alpha = |P'_\alpha P_\alpha|$



$$\hat{u} \cdot M_O^{ext} = \hat{u} \cdot \sum_\alpha OP_\alpha \wedge F_\alpha$$
$$= \hat{u} \cdot \sum_\alpha (OP'_\alpha + P'_\alpha P_\alpha) \wedge (F_\alpha^{\parallel} + F_\alpha^{\perp})$$
$$= \sum_\alpha |F_\alpha^{\perp}|\, d_\alpha \sin\left(\underbrace{\text{angle}(P'_\alpha P_\alpha, F_\alpha^{\perp})}_{\alpha}\right)$$

Mécanique | 2013 22

Si vous tirez avec une force dans ce sens-là, vous n'allez pas produire une rotation autour de l'axe Delta, notre intuition nous le dit. Même chose avec cette force parallèle, elle ne va jamais provoquer une rotation autour de l'axe Delta, donc c'est pour ça qu'il ne nous reste que ces termes-là.

Notes

Summary

8m 11s

Equation du mouvement, axe fixe

$$\hat{\boldsymbol{u}} \cdot \frac{d\boldsymbol{L}_C}{dt} = \boldsymbol{M}_C^{ext} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} \; = \frac{d}{dt}\left(\hat{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{L}_C\right)$$

$$I_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \sum_\alpha |\boldsymbol{F}_\alpha^\perp|\, d_\alpha \sin\Big(\mathrm{angle}\big(\boldsymbol{P}'_\alpha \boldsymbol{P}_\alpha, \boldsymbol{F}_\alpha^\perp\big)\Big)$$

Mécanique | 2013 25

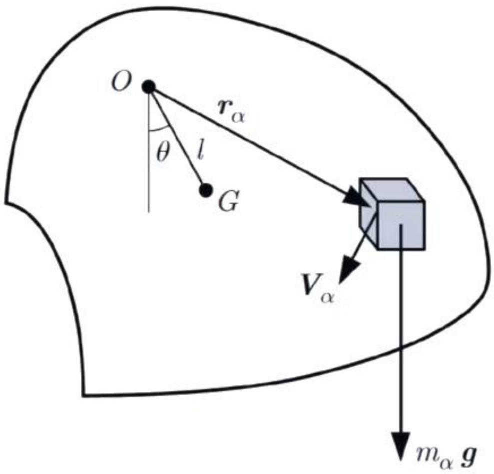
Maintenant, j'applique ma loi générale d de L O sur dt, ou d de L C sur dt égale M C, comme ici, avec C un point du référentiel, et je projette dans la direction u. Maintenant, u appartient au référentiel, donc je peux le mettre à l'intérieur de la dérivée par rapport au temps comme ceci. Et on a appris à calculer la projection de L C le long de l'axe u, ça nous donne le moment d'inertie fois la vitesse angulaire. Donc on a, pour ce terme-là, on a ceci. Et puis de l'autre côté, on a la projection des moments de forces. Voilà une équation du mouvement qui dépend des forces appliquées, bien sûr, et de la vitesse angulaire seulement. On va maintenant appliquer cette équation du mouvement à deux problèmes, le premier c'est le pendule physique.

Notes

Summary

8m 34s

Exemple : pendule physique



Rotation d'axe horizontal en O $\qquad \boldsymbol{\omega}\cdot\hat{\boldsymbol{u}} = -\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{u}}$

$$\boldsymbol{M}_O = \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha}_{M\,OG} \wedge \boldsymbol{g} = M\,\boldsymbol{OG}\wedge\boldsymbol{g}$$

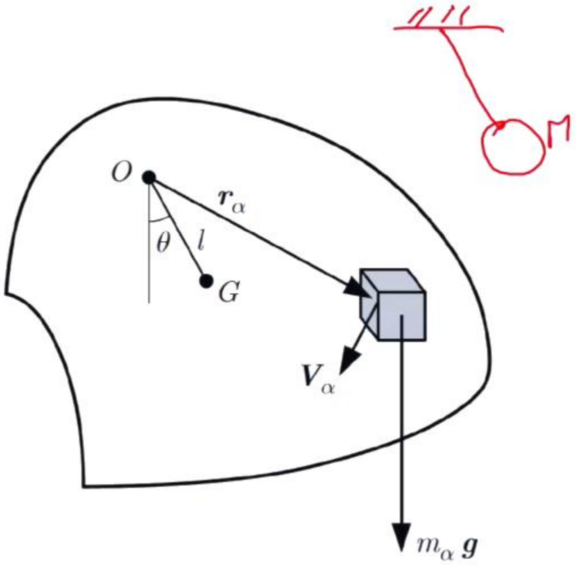
Alors, j'imagine que j'ai un solide qui tourne autour d'un axe perpendiculaire au plan de la feuille passant par O, donc j'ai un vecteur oméga Je vais supposer, vu la position du solide avec le centre de masse qui est ici, le solide aura tendance, juste à l'instant, à partir dans ce sens-là, donc, règle de la main droite, j'ai oméga qui s'enfonce comme ça, je vais définir un vecteur u qui vaut le vecteur oméga divisé par sa norme, qui est aussi dans cette direction-là, donc perpendiculaire à la feuille, s'enfonçant dans la feuille, et puis j'ai, heu, je repère la position du solide avec l'angle thêta. Maintenant il faut faire attention, par convention quand thêta augmente, on a une rotation, règle de la main droite, avec un thêta point qui sort de la feuille et donc quand je fais ma projection, je dois écrire que la projection de oméga sur u vaut moins thêta point fois u. Et maintenant, le moment des forces, extérieures. Quelles forces extérieures a-t-on? On a juste, si je décompose mon solide en points matériels de masse m alpha, o a un r alpha crosse m alpha fois g. J'ai rassemblé ici les termes en alpha, et je reconnaît ici par définition du centre de masse M fois OG.

Notes

Summary

9m 48s

Exemple : pendule physique



Rotation d'axe horizontal en O $\qquad \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = -\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{u}}$

$$\boldsymbol{M}_O = \sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha \wedge \boldsymbol{g} = M\,\boldsymbol{OG} \wedge \boldsymbol{g}$$

$$-I_\Delta \ddot{\theta} = Mg\ell \sin\theta$$

Approximation du pendule mathématique

Mécanique | 2013 30

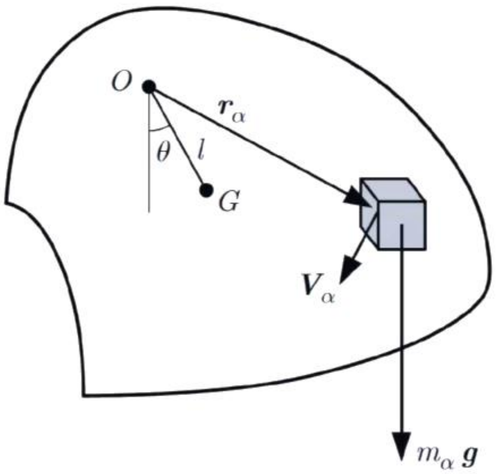
Donc j'ai ce résultat-là. Ça veut dire que pour le calcul du moment, du moment de forces dues à la pesanteur, je peux faire comme si toute la masse du solide était concentrée au centre de masse, en effet, c'est ce que j'obtiendrais si j'avais fait masse totale fois g, ici. J'obtiendrais le même moment de forces. Ça, c'est vrai pour les moments, ce n'est pas vrai en toute généralité, comme on le verra dans la suite du cours. Maintenant je projette. Alors, le terme OG crosse g, nous donne un terme normal à la feuille, au dessin, et sa projection est dans le sens positif de u, u étant, s'enfonçant dans la feuille, j'ai donc un Mgl sin thêta ici, et là j'ai simplement I delta, thêta point point, avec le signe moins qui vient d'ici. Voilà mon équation du mouvement, donc j'ai une équation du mouvement pour la force exprimée en terme des forces extérieures, et pour l'angle thêta qui définit la position du solide. Maintenant, l'approximation du pendule mathématique, selon lequel on avait imaginé, pendu au plafond, un fil et une masse, M.

Notes

Summary

11m 43s

Exemple : pendule physique



Rotation d'axe horizontal en O $\quad \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = -\dot{\theta}\, \hat{\boldsymbol{u}}$

$$\boldsymbol{M}_O = \sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha \wedge \boldsymbol{g} = M\, \boldsymbol{OG} \wedge \boldsymbol{g}$$

$$-I_\Delta \ddot{\theta} = M g \ell \sin\theta$$

Approximation du pendule mathématique

$$I_\Delta \approx M\ell^2 \implies \ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin\theta$$

Mécanique | 2013 32

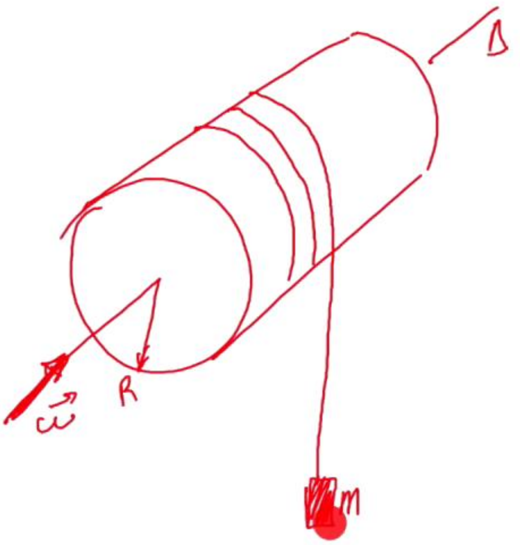
On a quelque chose d'équivalent si maintenant on imagine que dans le calcul de I delta, on peut faire comme si toute la masse était concentrée ici, à une distance l, et donc le moment d'inertie qui est par définition somme des masses fois des distances au carré devient juste le I delta, dans ce cas-là, je peux l'écrire ici, le I delta devient Ml carré, et quand on substitue là-dedans, il nous reste ceci. On a bien l'équation du pendule mathématique, et on voit dans quelle mesure on fait une approximation, l'approximation porte sur cette grandeur-là, le moment d'inertie. Comme deuxième exemple, je vous propose un problème de treuil j'imagine un cylindre, voilà la donnée, vous avez un cylindre d'axe horizontal de rayon R.

Notes

Summary

13m 24s

Exemple : treuil libre et masse suspendue



Cylindre d'axe horizontal :
- de rayon R
- de moment d'inertie I_Δ
- de vitesse angulaire ω

Charge au bout du fil enroulé :
- de masse m
- à la verticale du treuil

Mécanique | 2013 35

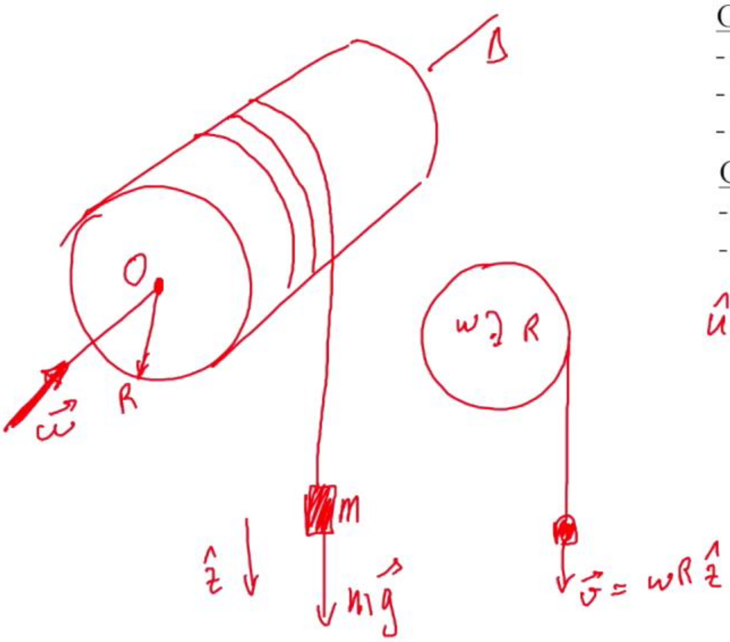
On se donne le moment d'inertie, et puis on va caractériser sa vitesse angulaire par oméga. Et d'autre part, on suppose qu'il y a un fil enroulé sur ce cylindre, que ce fil est sans masse, qu'on met une charge au bout du fil de masse m et que le fil en tout temps est vertical. Donc souvent les problèmes en mécanique sont donnés de cette manière-là, et il est extrêmement utile de prendre la peine de faire un dessin pour représenter ce qu'on comprend du problème. Alors, on ferait un dessin comme ceci. Voilà l'axe. Voilà l'axe delta, qui est fixe. On a notre cylindre de rayon R, il a un moment I delta, d'accord, le oméga, ben on va prendre un oméga, un vecteur oméga comme ceci, parce que on suppose qu'il y a un fil qui est enroulé là-dessus, et au bout du fil, il y a une masse, m. Voilà maintenant on voit un peu mieux quel est le problème qu'on cherche à traiter. On va appliquer le théorème du moment cinétique. Mais, dans ce problème, on a un solide indéformable, et une masse ponctuelle. Comment est-ce qu'on va gérer ça? Et bien on va appliquer le théorème du moment cinétique, pour un système de points matériels, et ce moment cinétique a deux termes, celui du solide, qu'on a appris à calculer, et puis, celui du point matériel, qu'on connaît depuis quelque temps déjà.

Notes

Summary

14m 36s

Exemple : treuil libre et masse suspendue



Cylindre d'axe horizontal :
- de rayon R
- de moment d'inertie I_Δ
- de vitesse angulaire ω

Charge au bout du fil enroulé :
- de masse m
- à la verticale du treuil

$$\hat{u}\cdot\vec{L}_O = I_\Delta\,\omega + \underline{R\,\omega R\,m}$$

Mécanique | 2013 35

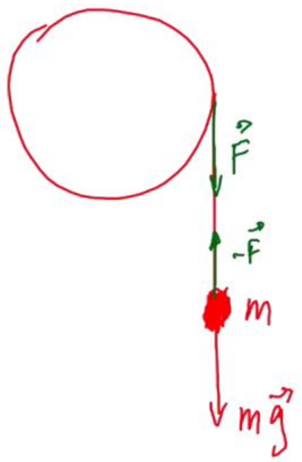
Et on va faire la somme des deux, et on va appliquer le théorème du moment cinétique avec comme seule force extérieure, quelle est la seule force extérieure si je prends le point o, on va prendre le point o sur l'axe, prenons-le ici, qu'est-ce qu'on va avoir? On va avoir aucune force de réaction, sur l'axe intervient, quand on calcule le moment en-haut, on n'a que la force mg, qui intervient. On a donc la projection de Lo, moment cinétique total, qui a deux termes, il y a un I delta pour le solide, fois oméga, et puis, il y a le terme qui correspond ainsi si, alors là on peut faire un dessin auxiliaire, qui peut vous aider un peu, vous avez le treuil, vous avez une distance R ici, vous avez une masse, qui a une vitesse v, qui est, ben, si le solide tourne à la vitesse oméga, elle vaut oméga R et dans la direction verticale, appelons-le z, avec le z dirigé vers le bas. Et le moment cinétique c'est R crosse mv, R crosse mv, et ce terme-là est aussi le long de l'axe delta, on a le terme plus R, oméga R. Fois la masse. Ça c'est le moment cinétique pour la masse. Et là on a le moment cinétique pour le solide. Et maintenant il faut dériver par rapport au temps, on a simplement la dérivée de oméga par rapport au temps des deux côtés, et ça c'est égal au moment de la force extérieure, qui est bien évidemment R fois la force mg.

Notes

Summary

16m 36s

Exemple : treuil libre et masse suspendue



Cylindre d'axe horizontal :
- de rayon R
- de moment d'inertie I_Δ
- de vitesse angulaire ω

Charge au bout du fil enroulé :
- de masse m
- à la verticale du treuil

Moment cinétique total projeté sur l'axe fixe : $I_\Delta \omega + mR^2\omega$

Moment des forces extérieures, projeté sur l'axe fixe : Rmg

Equation du mouvement : $I_\Delta \dot{\omega} + mR^2\dot{\omega} = Rmg$

$$mR\dot{\omega} = mg - F$$
$$I_\Delta \dot{\omega} = R(mg - mR\dot{\omega})$$

Mécanique | 2013 38

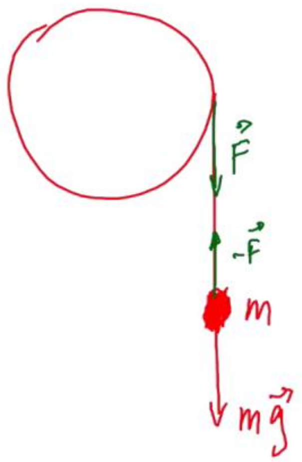
J'ai donc l'équation de mouvement suivante: ça c'est le moment cinétique, que j'avais écrit, et voilà le moment des forces extérieuers Rmg, l'égalité, ça c'est le moment cinétique total projeté sur l'axe du cylindre, et ça, ça vaut le moment des forces projetées sur l'axe du cylindre. Alors, certains pourraient se poser la question et se dire : mais, c'est bizarre, pourquoi je n'ai pas Rmg, le moment qui agit sur le solide? Encore une fois, je fais un dessin du système vu de côté, alors ici j'ai une masse, m, j'ai mg qui s'exerce sur ce point matériel, et maintenant je vais peut-être changer de couleur pour désigner la force ici, que la corde exerce sur le cylindre, et par la loi d'action et de réaction, il doit y avoir moins F qui agit ici sur la masse. Si maintenant j'écris l'équation de Newton pour le point matériel, j'ai m, R oméga point, ça c'est son accélération, qui vaut mg, moins F. Et si maintenant j'écris le théorème du moment cinétique pour solide seulement, j'ai I delta, oméga point, égal R fois F. Et F, c'est quoi? C'est mg, moins m R oméga point. Et si je réarrange les termes, j'ai bien R mg ici, m R carré oméga point, qui est là.

Notes

Summary

18m 51s

Exemple : treuil libre et masse suspendue



Cylindre d'axe horizontal :
- de rayon R
- de moment d'inertie I_Δ
- de vitesse angulaire ω

Charge au bout du fil enroulé :
- de masse m
- à la verticale du treuil

Moment cinétique total projeté sur l'axe fixe : $I_\Delta \omega + mR^2\omega$

Moment des forces extérieures, projeté sur l'axe fixe : Rmg

Equation du mouvement : $I_\Delta \dot{\omega} + mR^2\dot{\omega} = Rmg$

$m R \dot{\omega} = mg - F$

$I_\Delta \dot{\omega} = R(mg - mR\dot{\omega})$

Mécanique | 2013 38

Donc j'ai la même formule. Ici j'ai raisonné en partant du moment cinétique total du système et je suis allé regarder seulement les forces extérieures au système, et dans cette deuxième approche, j'ai décomposé le système, et j'ai tenu compte des forces intérieures. J'arrive au même résultat, bien sûr.

Notes

Summary

21m 06s