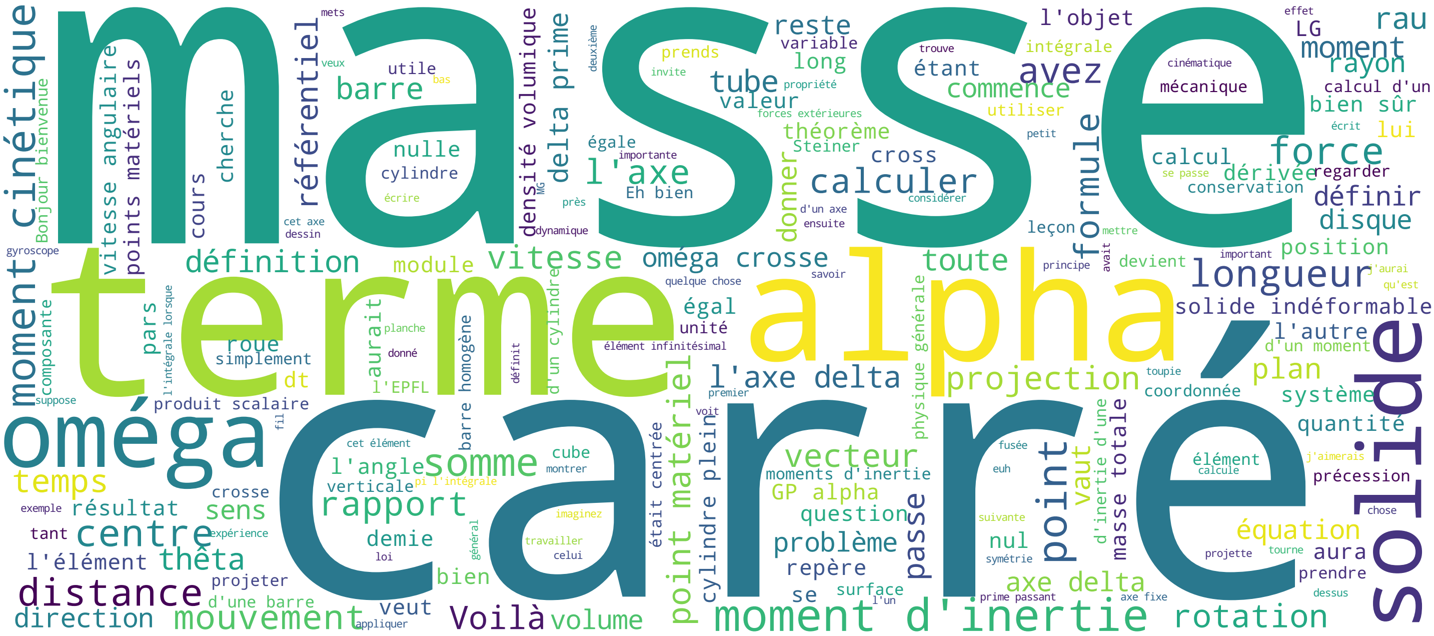
Calculs de moments d'inertie

Mécanique, cours 20.2

Jean-Philippe Ansermet

http://go.epfl.ch/traite-meca-2-20



EPFL

Calculs de moments d'inertie

- Barre homogène
- Cylindre plein
- Formule de Steiner

Mécanique | 2013 5

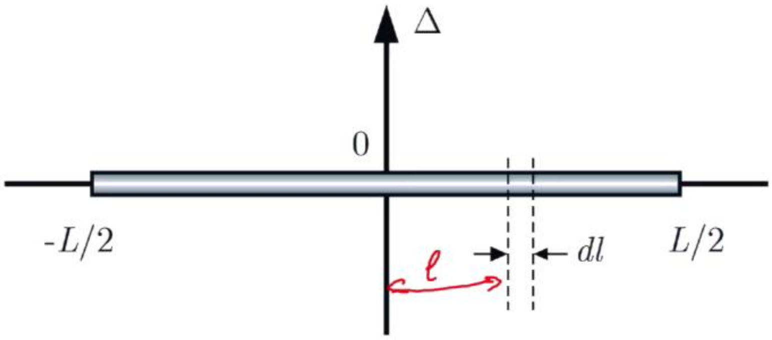
Bonjour, bienvenue au cours de physique générale de l'EPFL. Dans cette leçon, on traite de problèmes de mécanique de solides indéformables, avec un axe fixe. Et on a dérivé une équation du mouvement qui fait intervenir un moment d'inertie. On voit bien que le calcul d'un moment d'inertie est important. En général, dans la pratique, on utilise des valeurs tabulées. Cependant, j'ai trouvé intéressant de voir ici, comment calculer une grandeur physique qui est définie en tant que intégrale. On va calculer le moment d'inertie d'une barre homogène, et ensuite, d'un cylindre plein. On finira avec une formule très importante quand on doit calculer les moments d'inertie, c'est ce qu'on appelle la formule de Steiner. Je pars de ma définition.

Notes

Summary

0m 03s

Exemple: barre homogène, axe normal, centré



$$I_\Delta = \sum_\alpha m_\alpha \, d_\alpha^2$$

Densité linéique : $\rho = \frac{M}{L}$ $\quad dm = \rho \, dl$

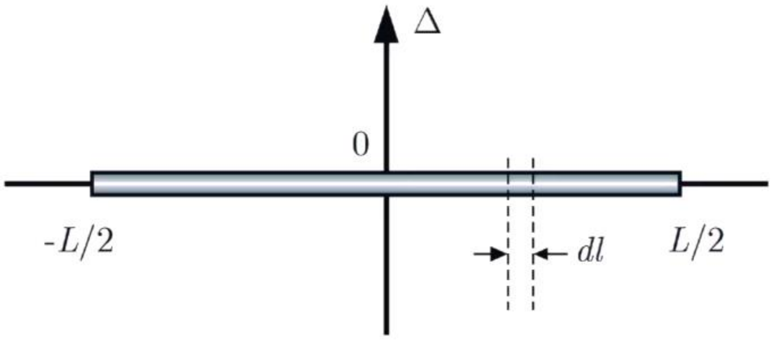
C'est une définition du moment d'inertie d'une barre qui est formelle, on a supposé qu'on pouvait décomposer notre solide en point matériel de masse m alpha à une distance d alpha de l'axe delta, et maintenant, si on considère quelque chose comme une barre homogène, comment est-ce qu'on va utiliser cette formule? Eh bien, on va définir une densité de masse par unité de longueur : une densité linéique. Je prends la masse totale de l'objet, je divise par la longueur totale de l'objet, ça fait une masse par unité de longueur. Maintenant, pour le m alpha, on va avoir un d m, un élément infinitésimal de masse qui est rau fois un élément infinitésimal de longueur le long de la barre, d l. Voilà la barre, de longueur l, et on cherche le moment d'inertie pour l'axe delta qui passe par le milieu de la barre. On doit donc en principe sommer une somme de masses fois les distances au carré, et maintenant ce qu'on va faire, c'est qu'on va prendre un élément de masse, de longueur d l, de masse d m, et il faut faire somme d l carré. Ici, on va considérer que ça c'est la distance d alpha, qui devient ici un l, on aura l carré, fois d m. Je l'écris.

Notes

Summary

1m 00s

Exemple: barre homogène, axe normal, centré



$$I_\Delta = \sum_\alpha m_\alpha \, d_\alpha^2$$

Densité linéique : $\rho = \dfrac{M}{L}$ $\qquad dm = \rho \, dl$

$$I_\Delta = \int_{-L/2}^{L/2} (\rho dl)\, l^2 = \rho \left[\frac{\ell^3}{3}\right]_{-L/2}^{+L/2} = \frac{\rho L^3}{12} = \frac{M L^2}{12}$$

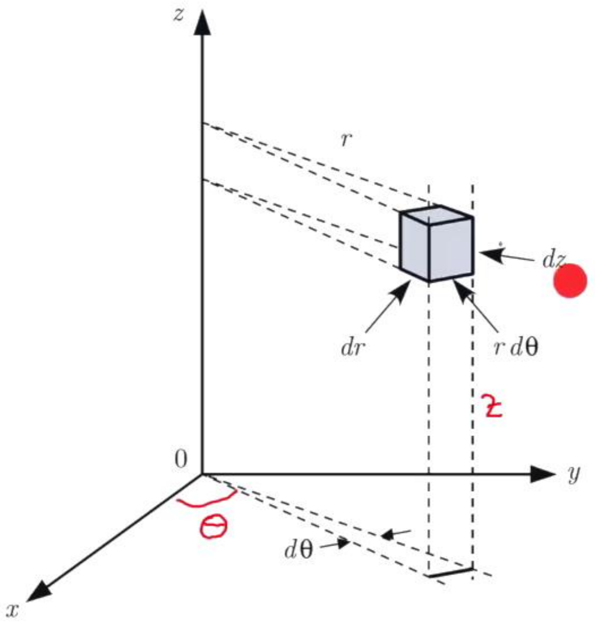
On doit calculer le moment d'inertie, qui est une intégrale, lorsque la variable l va d'un bout à l'autre de la barre, moins l sur 2 à l sur 2, l'élément de masse, rau d l, l'équivalent du m alpha, et la distance au carré, l carré. On a donc l'intégrale de l carré, ça fait l cube sur 3, pris entre moins l sur 2, l sur 2, ça nous donne ceci. Si maintenant le rau ici on lui met sa valeur m sur l, on trouve m l carré sur 12. Voilà comment conduire le calcul d'un moment d'inertie pour un cas particulièrement simple.

Notes

Summary

2m 39s

Exemple : cylindre plein, axe du cylindre



$$I_\Delta = \sum_\alpha m_\alpha d_\alpha^2$$

Densité volumique : $\rho = \dfrac{M}{\pi R^2 L}$

Mécanique | 2013 15

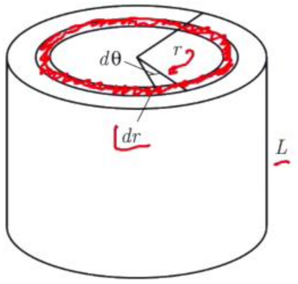
Regardons maintenant un problème un peu plus complexe, celui d'un cylindre plein ou d'un disque, la symétrie est à peu près la même, un disque, c'est un cylindre très court, si vous voulez bien. Donc on aura le calcul pour l'un et pour l'autre. Alors, je pars de cette définition-là. Mais maintenant je veux transformer cette somme en intégrale, je commence par définir une densité volumique, la densité volumique, ça va être la masse totale, divisée par le volume total. Je suppose un cylindre de rayon r et de longueur l, pi r carré, ça fait la surface de la section, fois la longueur, le volume. Je vais travailler en coordonnées cylindriques, Vous avez ici l'angle que je vais appeler thêta, vous avez la coordonnée z qui définit la hauteur au-dessus du plan o, x, y. Et vous avez la variable r. Maintenant, un élément de masse comme celui-ci, un volume qui est donné par l'accroissement d r dans cette direction-là, r d thêta, cette longueur-là, ça vaut r fois le d thêta, et cet élément de longueur dans la verticale, c'est simplement d z.

Notes

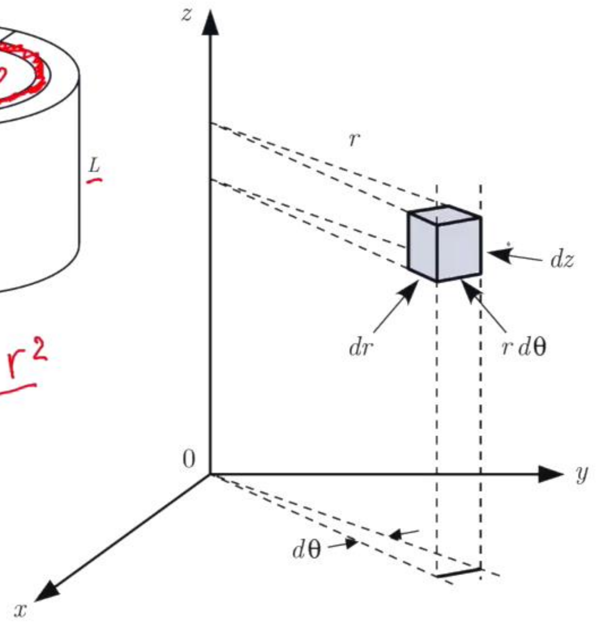
Summary

3m 23s

Exemple : cylindre plein, axe du cylindre



$2\pi r\, dr\, L\, \rho\, r^2$



$$I_\Delta = \sum_\alpha m_\alpha d_\alpha^2$$

Densité volumique : $\rho = \dfrac{M}{\pi R^2 L}$

$$I_\Delta = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 (\rho\, dz r d\theta dr)$$

$$= \int_0^R \underline{\rho\, L 2\pi r^3 dr}$$

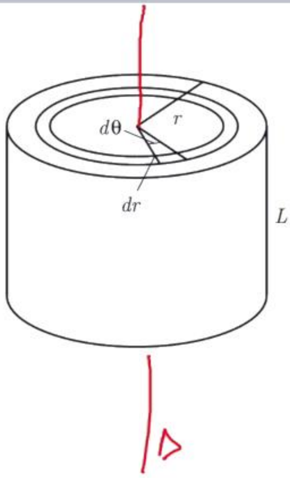
Donc je dois calculer le i delta, c'est cette somme de masses fois des distances au carré. Ca devient l'intégrale quand z varie de moins l sur 2, à l sur 2, l'intégrale lorsque thêta varie de 0 à 2 pi, l'intégrale lorsque la variable petit r varie entre 0 et le rayon, de la distance au carré, r carré, c'est le d alpha au carré, ça devient r carré fois l'élément de masse. À la place du m alpha, on a un d m, qui vaut rau, la densité volumique fois l'élément de volume, d z, r d thêta, t r. L'intégrale sur thêta est triviale, elle va donner 2 pi. L'intégrale sur d z va donner simplement l, il me reste ceci. Maintenant je constate que j'aurais pu arriver à cette simple expression en considérant un tube, ce tube-là, d'épaisseur donnée par d r, de rayon r, et cet élément, ce tube-là, aurait un volume qui vaut 2 pi r, fois d r, ça, ça fait l'aire de cette surface que j'ai dessinée ici, fois la longueur qui vaut l. Et ça, il faudrait le multiplier par rau pour avoir la masse du tube, et bien sûr, dans ce tube-là, toutes les masses sont à la même distance, la distance c'est r carré. Eh bien ce terme-là, c'est ce que j'ai ici. Donc on pourrait comprendre ce résultat intermédiaire comme le calcul de i delta, en tant que somme sur des tubes.

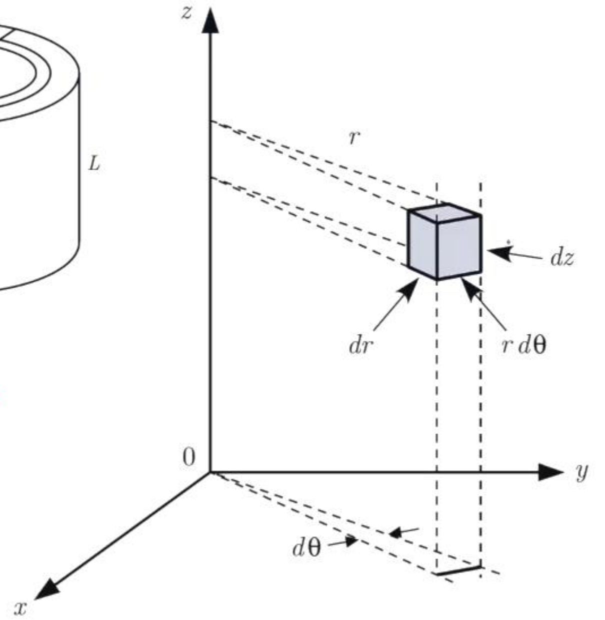
Notes

Summary

4m 51s

Exemple : cylindre plein, axe du cylindre





$$I_\Delta = \sum_\alpha m_\alpha d_\alpha^2$$

Densité volumique : $\rho = \dfrac{M}{\pi R^2 L}$

$$I_\Delta = \int_{-L/2}^{L/2}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^2(\rho\, dz r d\theta dr)$$

$$= \int_0^R \rho\, L 2\pi r^3 dr$$

$$= \frac{1}{2}\rho\pi L R^4$$

$$= \frac{1}{2} M R^2$$

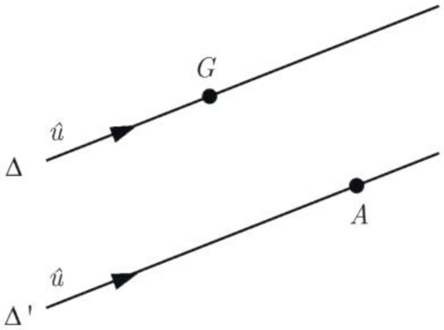
Bon ici j'ai une intégrale définie de r cube, que je peux calculer, ça me donne un r 4, avec les coefficients et un r 4 sur 4, le 4 et le 2 se simplifient pour donner une demie, le rau et le pi restent, rau, je mets maintenant cette valeur de rau dans cette formule, j'obtiens une demie de m r carré, ça c'est un résultat qu'il est utile de mémoriser, pour un cylindre plein, ou pour un disque, le moment d'inertie par rapport à l'axe symétrie du disque, donc c'est ça, notre axe delta, vaut une demie de m r carré.

Notes

Summary

7m 04s

Propriété : formule de Steiner



Le solide tourne autour d'un axe Δ' passant par A, mais pas par G

Rappel : moment cinétique en A et en G $\quad \boldsymbol{L}_A = \boldsymbol{AG} \wedge M\boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{L}_G$

On projette sur un axe fixe : $\quad \hat{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}$

$$\hat{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{L}_A = I_A \omega$$

$$\hat{\boldsymbol{u}} \cdot (\boldsymbol{AG} \wedge M\boldsymbol{V}_G) + \boldsymbol{L}_G \cdot \hat{\boldsymbol{u}} \;\; = \hat{\boldsymbol{u}} \cdot (\boldsymbol{AG} \wedge M(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{AG})) + \boldsymbol{L}_G \cdot \hat{\boldsymbol{u}}$$

Mécanique | 2013 26

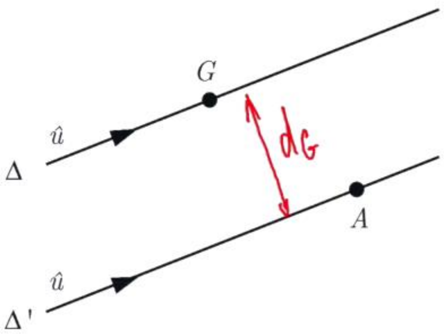
Maintenant, je passe à la formule de Steiner qui est très utile quand on doit calculer des moments d'inertie. Vous imaginez la situation suivante : vous avez un solide qui tourne autour d'un axe delta prime, passant par le point a, et cet axe delta prime ne contient pas le centre de masse du solide g. On se pose la question de savoir, quelle est la relation entre le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe delta prime, lorsqu'on connaît le moment d'inertie du solide par rapport à un axe delta parallèle à delta prime, passant par le centre de masse. Pour faire ce calcul, je commence par l'expression du moment cinétique en a. Alors on a appris qu'on devait calculer le moment cinétique en g plus un terme qu'on aurait si toute la masse m était centrée au centre de masse g. Et maintenant je vais projeter ce vecteur l a. Je projette en définissant u, vecteur porté par l'axe de rotation, je sais que la projection du moment cinétique doit donner un moment d'inertie fois le oméga, ça c'est un résultat qu'on a déjà établi, Quand je fais la projection de l a, g, ce terme-là et puis la projection de l g. V de g, je peux l'exprimer avec la cinématique du solide indéformable, comme a g, comme oméga crosse a g.

Notes

Summary

7m 50s

Propriété : formule de Steiner



Le solide tourne autour d'un axe Δ' passant par A, mais pas par G

Rappel : moment cinétique en A et en G $\qquad \boldsymbol{L}_A = \boldsymbol{AG} \wedge M\boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{L}_G$

On projette sur un axe fixe : $\quad \hat{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}$

$$\hat{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{L}_A = I_A \omega$$

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{u}} \cdot (\boldsymbol{AG} \wedge M\boldsymbol{V}_G) + \boldsymbol{L}_G \cdot \hat{\boldsymbol{u}} &= \hat{\boldsymbol{u}} \cdot (\boldsymbol{AG} \wedge M(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{AG})) + \boldsymbol{L}_G \cdot \hat{\boldsymbol{u}} \\
&= M\hat{\boldsymbol{u}} \cdot ((\boldsymbol{AG} \cdot \boldsymbol{AG})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{AG})\boldsymbol{AG}) + \boldsymbol{L}_G \cdot \hat{\boldsymbol{u}} \\
&= M\omega\,((\boldsymbol{AG} \cdot \boldsymbol{AG}) - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{AG})(\boldsymbol{AG} \cdot \boldsymbol{u})) + I_G \omega
\end{aligned}$$

$$I_A = M d_G^2 + I_G$$

A appartenant au référentiel, je n'ai que le terme oméga crosse a g. Et maintenant, je développe ce terme-là, avec la formule qui me dit a crosse b, crosse c, égale a c b moins a, b, avec les parenthèses au bon endroit. Ça me donne cette formule-là. Vous avez a g, a g oméga, c'est ce terme-là, a g oméga a g, c'est ce terme-là. Et maintenant on doit projeter avec u. Alors u, produit scalaire avec oméga, ça nous donne oméga. Et puis ici, cette gymnastique qu'on a déjà faite, on multiplie ici par u, le oméga, je peux le remplacer par oméga scalaire fois le u, j'ai donc, a g u au carré, ce terme-là. Et là, on a le module au carré de a g, moins la projection de a g, sur l'axe. Et ça, on en a l'habitude, c'est la distance entre ces 2 axes, au carré. Je résume. Bien sûr ici, l g fois u, c'est i g, fois u, i g étant le moment d'inertie du solide, par rapport à l'axe delta passant par g, i g. Je résume : le moment d'inertie que je cherche, c'est le moment d'inertie en g, donc pour l'axe delta qui passe par g, plus, ce que j'aurais si toute la masse du solide était centrée au centre de masse, Avec le d g, qui est donc cet écart, ici.

Notes

Summary

9m 40s