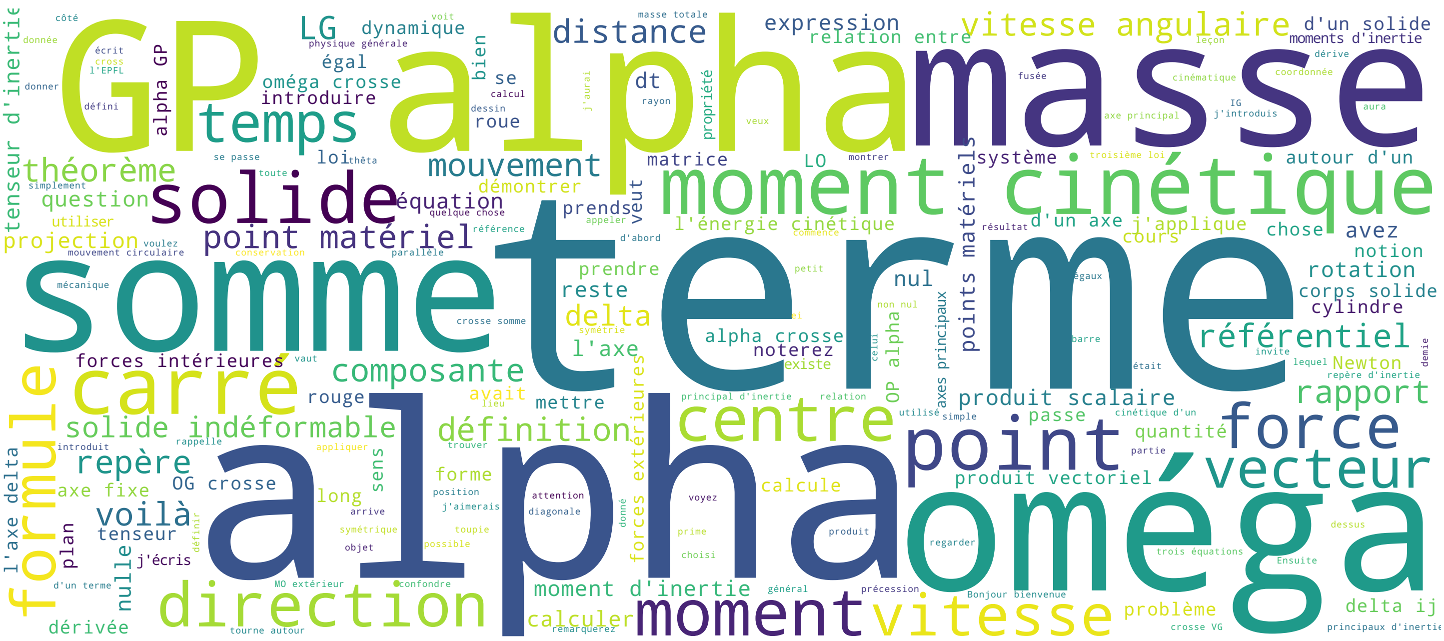
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Dynamique du solide

Mécanique, cours 19.1

Jean-Philippe Ansermet

http://go.epfl.ch/traite-meca-1-19



Search MOOC

Video

EPFL

Bonjour, bienvenue au cours de physique générale de l'EPFL. Dans cette leçon, je vais introduire les bases de la dynamique du solide indéformable. Je vais d'abord voir quelles sont les lois qui régissent le mouvement d'un solide indéformable, on va devoir apprendre à calculer un moment cinétique pour un solide, ce qui va nous faire introduire la notion de tenseur d'inertie. De là, je vais déduire la notion de moment d'inertie, et je vais utiliser les moments d'inertie, pour calculer une expression très simple, de l'énergie cinétique, d'un corps solide en rotation autour d'un axe fixe.

Notes

Summary

0m 03s

Loi de la dynamique

Pour tout système de point matériels :

$$\underbrace{\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \boldsymbol{M}_O^{ext}}_{3} \qquad \underbrace{M\frac{d\boldsymbol{V}_G}{dt} = \sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha^{ext}}_{3}$$

6 coord. indép.

Je commence avec les lois de la dynamique. Pour tout point matériel, on avait le théorème du moment cinétique, et le théorème du centre de masse. Le théorème du centre de masse, découle du fait que lorsqu'on fait la somme des quantités de mouvements, des points matériels d'un système, on arrive à la masse, fois la vitesse du centre de masse. Et, on utilise aussi ici, la troisième loi de Newton, qui dit que la somme des forces intérieures est nulle. Pour le théorème du moment cinétique, pour un système de points matériels, on va, on a sommé, les moments cinétiques de chaque point matériel, et ce faisant, on a invoqué, la généralisation de la troisième loi de Newton, qui nous disait que la somme des moments des forces intérieures est nulle. Donc, il nous reste ceci. Alors je constate qu'ici, pour un solide indéformable, voilà, trois équations du mouvement, et ici, j'ai trois équations du mouvement, aussi. Et j'ai, je vous le rappelle 6 coordonnées indépendantes, en général. Par conséquent, ces équations-là, suffisent pour décrire la dynamique d'un solide indéformable. Maintenant ici, vous notez que on a utilisé un point du référentiel comme point de référence pour calculer le moment cinétique et le moment des forces.

Notes

Summary

0m 44s

Loi de la dynamique

Pour tout système de point matériels : $\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \boldsymbol{M}_O^{ext}$ $M\frac{d\boldsymbol{V}_G}{dt} = \sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha^{ext}$

Variante très utile : $\frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} = \boldsymbol{M}_G^{ext}$ $\boldsymbol{L}_G = \sum_\alpha \{\boldsymbol{GP}_\alpha \wedge m_\alpha(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{GP}_\alpha)\}$ $\boldsymbol{M}_G^{ext} = \sum_\alpha \{\boldsymbol{GP}_\alpha \wedge \boldsymbol{F}_\alpha^{ext}\}$

Démonstration : $\boldsymbol{L}_O = \sum_\alpha \{m_\alpha \boldsymbol{OP}_\alpha \wedge (\boldsymbol{V}_G + (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{GP}_\alpha))\}$

Mécanique | 2013 13

Souvent, en mécanique, il est utile d'utiliser le centre de masse. Ors, le théorème du moment cinétique a une variante en terme du centre de masse, qui est celle-ci, elle est très importante, je l'ai notée en rouge. Nous allons la démontrer sous peu. Dans cette expression-là j'ai le moment cinétique en G, et ce moment cinétique en G, je le définis comme ceci. On a bien une somme de moments cinétiques de point matériels, M alpha en P alpha, mais, vous noterez ici que j'ai que les termes de rotation de la vitesse du point P alpha. On va le démontrer, on va démontrer que c'est correct. Vous remarquerez donc que, ce que je fais, c'est que je considère mon corps solide indéformable, comme un ensemble de points matériels, mais maintenant j'applique à ce corps solide, la cinématique du corps solide indéformable. Pour le moment des forces, M en G, des forces extérieures c'est simplement la somme des moments des forces exercées au point P alpha, calculé par rapport à G. Alors, maintenant, nous devons démontrer cette formule. Je le fais, en commençant par la définition de Lo. Lo, c'est la somme sur les points matériels, des OP alpha, crosse, vitesse du point alpha, fois M alpha.

Notes

Summary

2m 34s

Loi de la dynamique

Pour tout système de point matériels : $\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \boldsymbol{M}_O^{ext}$ $\quad M\frac{d\boldsymbol{V}_G}{dt} = \sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha^{ext}$

Variante très utile : $\frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} = \boldsymbol{M}_G^{ext}$ $\quad \boldsymbol{L}_G = \sum_\alpha \{\boldsymbol{GP}_\alpha \wedge m_\alpha(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{GP}_\alpha)\}$ $\quad \boldsymbol{M}_G^{ext} = \sum_\alpha \{\boldsymbol{GP}_\alpha \wedge \boldsymbol{F}_\alpha^{ext}\}$

Démonstration : $\boldsymbol{L}_O = \sum_\alpha \{m_\alpha \underbrace{\boldsymbol{OP}_\alpha}_{(\vec{OG}+\vec{GP}_\alpha)} \wedge (\boldsymbol{V}_G + (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{GP}_\alpha))\} = \vec{OG} \wedge M\vec{V}_G + \vec{L}_G$

$\vec{OG} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \sum_\alpha m_\alpha \vec{GP}_\alpha\right) = 0$

$\sum_\alpha m_\alpha \vec{GP}_\alpha \wedge V$

Mécanique | 2013 13

Le M alpha je l'ai mis ici; ici, j'ai la vitesse du point alpha, mesurée en utilisant G, comme point particulier du solide. Donc, j'ai un GP alpha ici. OP alpha, je vais l'écrire OG, plus GP alpha. J'ai donc, deux termes ici, produit vectoriel avec deux termes là, j'ai quatre termes. Alors maintenant, si je prends ce terme, avec celui-là, ça, ça me donne une contribution. Ici, il y a une somme sur alpha des M alpha, ça va nous donner la masse totale, donc on aura OG, crosse M, V de G. Ensuite, j'ai un terme, si je prends les GP alpha que j'ai ici, je les mets avec ces termes-là, j'ai, ce que j'avais écrit ici, en-dessus. J'ai un GP alpha, crosse oméga crosse GP alpha; écrivons-le, plus LG. Maintenant, je vais prendre le terme en OG, avec ceci. Là, j'aurais un terme en OG, crosse, somme sur oméga, je peux encore mettre le oméga, crosse, et mettre ici, somme sur alpha des M alpha, GP alpha. Ca c'est l'indice de somme, avec les parenthèses; et ça, c'est nul, parce que ce terme-là, c'est une propriété du centre de masse, ce terme-là, est nul. J'ai encore un autre terme, j'ai le GP alpha, que je vais prendre avec le V de G. Alors là, on aura un terme où on a, somme sur alpha, des M alpha, GP alpha, crosse V de G.

Notes

Summary

4m 08s

Loi de la dynamique

Pour tout système de point matériels : $\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \boldsymbol{M}_O^{ext}$ $M\frac{d\boldsymbol{V}_G}{dt} = \sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha^{ext}$

Variante très utile : $\frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} = \boldsymbol{M}_G^{ext}$ $\boldsymbol{L}_G = \sum_\alpha \{\boldsymbol{GP}_\alpha \wedge m_\alpha(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{GP}_\alpha)\}$ $\boldsymbol{M}_G^{ext} = \sum_\alpha \{\boldsymbol{GP}_\alpha \wedge \boldsymbol{F}_\alpha^{ext}\}$

Démonstration : $\boldsymbol{L}_O = \sum_\alpha \{m_\alpha \boldsymbol{OP}_\alpha \wedge (\boldsymbol{V}_G + (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{GP}_\alpha))\}$

$$\boldsymbol{L}_O = M\boldsymbol{OG} \wedge \boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{L}_G \qquad \frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \boldsymbol{OG} \wedge \sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha^{ext} + \frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt}$$

$$\boldsymbol{M}_O^{ext} = \sum_\alpha \{(\boldsymbol{OG} + \boldsymbol{GP}_\alpha) \wedge \boldsymbol{F}_\alpha^{ext}\} = \boldsymbol{OG} \wedge \sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha^{ext} + \boldsymbol{M}_G^{ext}$$

Ce terme est nul aussi. Pourquoi? Parce que ce terme est nul. Voilà, je nettoie tout ça. J'ai LO, qui vaut MOG crosse VG plus le LG, c'est tout ce qui reste, les deux autres termes étaient nuls. Maintenant je dérive par rapport au temps. d de LO sur dt, c'est ce terme-là. Je vois, ici, quand je dérive par rapport au temps, si je dérive OG par rapport au temps, ça va me donner VG, VG crosse VG ça fait 0, donc, j'ai un terme non nul, OG, crosse M, d de VG, sur dt. Mais Md de VG sur dt, c'est la somme des forces extérieures, c'est ce que j'ai écrit ici. Et après, il y a encore la dérivée par rapport au temps de LG, je l'ai écrit comme ceci. Maintenant ça, ça doit être égal à MO extérieur. Mais réécrivons MO extérieur, on applique la définition, normalement, je devrais écrire OP alpha, crosse F alpha, le OP alpha, je l'écris OG, plus GP alpha. Le premier terme donne OG crosse, somme des forces, OG crosse somme des forces, le deuxième terme, c'est le GP alpha, crosse F alpha, somme sur alpha, c'est MG; j'ai écrit MG. Maintenant, le théorème du moment cinétique, nous dit d de LO sur dt, c'est égal à MMO.

Notes

Summary

6m 19s

Loi de la dynamique

Pour tout système de point matériels : $\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \boldsymbol{M}_O^{ext}$ $\quad M\frac{d\boldsymbol{V}_G}{dt} = \sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha^{ext}$

Variante très utile : $\frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} = \boldsymbol{M}_G^{ext}$ $\quad \boldsymbol{L}_G = \sum_\alpha \{\boldsymbol{GP}_\alpha \wedge m_\alpha(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{GP}_\alpha)\}$ $\quad \boldsymbol{M}_G^{ext} = \sum_\alpha \{\boldsymbol{GP}_\alpha \wedge \boldsymbol{F}_\alpha^{ext}\}$

Démonstration : $\boldsymbol{L}_O = \sum_\alpha \{m_\alpha \boldsymbol{OP}_\alpha \wedge (\boldsymbol{V}_G + (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{GP}_\alpha))\}$

$$\boldsymbol{L}_O = M\boldsymbol{OG} \wedge \boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{L}_G \qquad \frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \cancel{\boldsymbol{OG} \wedge \sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha^{ext}} + \frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt}$$

$$\boldsymbol{M}_O^{ext} = \sum_\alpha \{(\boldsymbol{OG} + \boldsymbol{GP}_\alpha) \wedge \boldsymbol{F}_\alpha^{ext}\} = \cancel{\boldsymbol{OG} \wedge \sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha^{ext}} + \boldsymbol{M}_G^{ext}$$

Mécanique | 2013 17

Donc, ceci, est égal à cela, et quand j'exprime cette égalité, je peux simplifier ces deux termes des deux côtés du signe égal, et il me reste, d de LG, sur dt, égal MG extérieur, c'est ce que j'ai annoncé ici. Voilà, donc j'ai démontré que quand on calcule le moment cinétique en G, on peut, ne considérer que les termes de rotation dans la vitesse des points P alpha; et, j'ai montré cette forme de, du théorème du moment cinétique où on a, au lieu de prendre un point du référentiel, on a pris le centre de masse comme point de référence pour le moment cinétique et pour le moment de force.

Notes

Summary

7m 49s

Moment cinétique du solide

$$L_G = \sum_\alpha \{ GP_\alpha \wedge m_\alpha (\omega \wedge GP_\alpha) \}$$

$$L_G = \sum_\alpha m_\alpha [(GP_\alpha \cdot GP_\alpha)\omega - (GP_\alpha \cdot \omega) GP_\alpha]$$

Repère lié au solide :

(G, e_1, e_2, e_3)

Mécanique | 2013 20

Examinons cette expression du moment cinétique, en G. Voilà ce que j'aimerais faire, n'est-ce pas, ici il y a oméga qui apparaît, et puis il y a les M alpha et les points P alpha. Les M alpha et les P alpha définissent la forme de l'objet. Le oméga caractérise la vitesse angulaire de l'objet. J'aimerais au fond, écrire LG, en séparant les propriétés intrinsèques du solide, et cette propriété extrinsèque, la vitesse angulaire. Je le fais de la manière suivante, d'abord, j'aimerais traiter ce double produit vectoriel, en appliquant une formule que j'avais donnée, qui était la suivante, j'ai donné cette formule quand on a introduit le produit vectoriel, parce que je savais qu'on en aurait besoin aujourd'hui. Et la formule c'était que là j'ai a, produit scalaire avec c, fois le vecteur b, plus a, produit scalaire avec b, fois le vecteur c. J'applique cette formule, donc, ici je vais écrire GP alpha, GP alpha, produit scalaire, fois le oméga, et après GP alpha, produit scalaire avec oméga, fois le GP alpha. Je l'ai fait ici, voilà le GP alpha, GP alpha oméga, GP alpha oméga, fois GP alpha. Maintenant j'introduis un repère lié au solide. Un repère e1, e2, e3, et je projette dans la direction i, donc je fais le produit scalaire avec ei, si vous voulez.

Notes

Summary

8m 36s

$$\boldsymbol{L}_G = \sum_\alpha \{\boldsymbol{GP}_\alpha \wedge m_\alpha (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{GP}_\alpha)\}$$

$$\boldsymbol{L}_G = \sum_\alpha m_\alpha \left[(\boldsymbol{GP}_\alpha \cdot \boldsymbol{GP}_\alpha)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{GP}_\alpha \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{GP}_\alpha\right]$$

$$L_{G,i} = \sum_\alpha m_\alpha \left[\boldsymbol{GP}_\alpha^2 \omega_i - \sum_j GP_{\alpha,j}\omega_j GP_{\alpha,i}\right]$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha \left[\boldsymbol{GP}_\alpha^2 \sum_j \delta_{ij}\omega_j - \sum_j GP_{\alpha,j}\omega_j GP_{\alpha,i}\right]$$

Repère lié au solide :

$$(G, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$$

Je prends cette équation-là, et je fais, produit scalaire avec ei. Ca me donne les projections des grandeurs vectorielles. La projection de LG dans la direction i, je vais l'appeler LGi. Ici, je simplifie l'écriture en écrivant GP alpha au carré. La projection de oméga dans la direction i, je l'appelle oméga i. La projection de GP alpha, dans la direction i, je l'appelle GP alpha i. Et là, j'écris déjà, ce produit scalaire, comme une somme de produits de composantes, GP alpha j, oméga j. Vous noterez que j'ai utilisé un indice de sommation j, distinct de i, pour ne pas tout confondre dans cette équation-là. Les j portent sur ces termes-là, manifestement. Maintenant, je vous rappelle, ce que j'aimerais faire, c'est séparer la partie en oméga, de la partie qui concerne uniquement la forme du solide. Je peux le faire avec l'artifice suivant : je remplace oméga i, par somme sur j delta ij, oméga j. Vous vous souvenez que delta ij vaut 0, sauf si j égal i. Quand j égal i, oméga j devient oméga i, c'est bien ce terme-là.

Notes

Summary

10m 24s

$$\boldsymbol{L}_G = \sum_\alpha \{\boldsymbol{GP}_\alpha \wedge m_\alpha(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{GP}_\alpha)\}$$

Repère lié au solide :

$$(G, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$$

$$\boldsymbol{L}_G = \sum_\alpha m_\alpha\left[(\boldsymbol{GP}_\alpha \cdot \boldsymbol{GP}_\alpha)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{GP}_\alpha \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{GP}_\alpha\right]$$

$$L_{G,i} = \sum_\alpha m_\alpha \left[\boldsymbol{GP}_\alpha^2 \omega_i - \sum_j GP_{\alpha,j}\omega_j GP_{\alpha,i}\right]$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha \left[\boldsymbol{GP}_\alpha^2 \sum_j \delta_{ij}\omega_j - \sum_j GP_{\alpha,j}\omega_j GP_{\alpha,i}\right]$$

$$= \sum_j \sum_\alpha m_\alpha \left[\boldsymbol{GP}_\alpha^2 \, \delta_{ij} - GP_{\alpha,j} GP_{\alpha,i}\right] \omega_j$$

$$L_{G,i} = \sum_j I_{ij}\,\omega_j \qquad I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left[\boldsymbol{GP}_\alpha^2 \, \delta_{ij} - GP_{\alpha,j} GP_{\alpha,i}\right]$$

Mécanique | 2013 24

L'avantage de cette manoeuvre, c'est que maintenant j'ai somme sur j, oméga j, pour ces deux termes, je peux mettre la somme en évidence, ça me donne ceci, somme sur j, et là, vous voyez maintenant arriver Des objets qui ne concernent que la forme de l'échantillon et les masses, et voilà, oméga, il est ici. Donc, j'ai une solution, ou si vous voulez j'ai une relation, entre L et G qui est donnée comme ceci en terme de composantes, avec un Iij, quelque chose qui a l'air d'une matrice, dont la définition est donnée ici en rouge, on aura besoin de cette définition plus tard. On a G P alpha au carré delta ij moins G P alpha j G P alpha i pour l'élément ij.

Notes

Summary

11m 43s

Définition : tenseur d'inertie

$$L_{G,i} = \sum_j I_{ij}\,\omega_j \qquad I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left[\boldsymbol{GP}_\alpha^2\,\delta_{ij} - GP_{\alpha,j}GP_{\alpha,i}\right]$$

$$\boldsymbol{L}_G = I_G\,\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$I_{ij} = I_{ji}$$

Propriété mathématique : il existe toujours un repère tel que

Mécanique | 2013 28

Donc maintenant je peux parler de tenseur d'inertie. La relation, je vous rappelle ici deux formules qu'on vient d'obtenir. Celle qui définit Iij et la relation L et oméga. Au fond, la relation entre oméga et LG en physique on parle d'une relation tensorielle et IG est un tenseur. Quand on parle en termes de composantes, on peut écrire les composantes du tenseur, qui sont une matrice, et donc on a une notation matricielle qui devrait vous être familière. J'ai donc une matrice 3 fois 3 fois le vecteur oméga écrit en composantes. Ceci on l'appelle le tenseur d'inertie. Maintenant je note que, d'abord, tous les termes de cette expression sont réels. Et d'autre part, si j'intervertis i et j, delta ij et delta ji c'est la même chose par définition de delta ij, et là j'ai un produit d'un terme en i et d'un terme en j, je peux changer, intervertir l'ordre, ça ne changera rien à ce produit. donc Iij égal Iji, on dit que la matrice est symétrique, elle est donc réelle et symétrique, et un résultat de mathématiques est que il existe toujours, cette matrice est diagonalisable, comme disent les mathématiciens. Pour nous, cela veut dire, qu'il existe un repère, j'ai choisi un repère au début pour écrire cette relation-là en termes de composantes.

Notes

Summary

12m 40s

Définition : tenseur d'inertie

$$L_{G,i} = \sum_j I_{ij}\,\omega_j$$

$$I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left[\boldsymbol{GP}_\alpha^2\,\delta_{ij} - GP_{\alpha,j}GP_{\alpha,i} \right]$$

$$\boldsymbol{L}_G = I_G\,\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$I_{ij} = I_{ji}$$

Propriété mathématique : il existe toujours un repère tel que

$$\boldsymbol{L}_G = I_G\,\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} I_{G1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

- Un tel repère, lié au solide, s'appelle un **repère d'inertie**.
- Les axes sont les « **axes principaux d'inertie** ».

Mécanique | 2013 31

Il est possible de trouver un repère tel que cette formule- là prenne l'allure suivante. Voyez, vous avez les termes non nuls sur la diagonale, les termes nuls en dehors de la diagonale. Maintenant, comme physicien, et dans le cadre de ce cours, il n'y a pas besoin de faire grand cas sur les questions de diagonalisation de matrices, parce que en général on va travailler avec des cylindres, des sphères, des formes géométriques très simples, qui ont beaucoup de symétrie, et ces directions, les directions du repère sont des directions qu'on trouve par symétrie. Jamais un étudiant n'a eu des problèmes pour trouver quel était le repère qui avait cette propriété-là. Maintenant ce repère porte un nom, un repère qui fait en sorte que notre tenseur est diagonal s'appelle un repère d'inertie, et les directions que définissent ces vecteurs du repère sont appelés les axes principaux d'inertie. Maintenant je dois faire un petit commentaire sur notre vocabulaire. Déjà quand j'ai introduit la notion de référentiel, et de repère, j'ai dit faites attention de ne pas les confondre. J'ai insisté que le repère, c'est un outil mathématique et le référentiel c'est un objet par rapport auquel on mesure vitesse et accélération.

Notes

Summary

14m 28s

Définition : tenseur d'inertie

$$L_{G,i} = \sum_j I_{ij}\,\omega_j \qquad I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left[\boldsymbol{GP}_\alpha^2\,\delta_{ij} - GP_{\alpha,j}GP_{\alpha,i}\right]$$

$$\boldsymbol{L}_G = I_G\,\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$I_{ij} = I_{ji}$$

Propriété mathématique : il existe toujours un repère tel que

$$\boldsymbol{L}_G = I_G\,\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} I_{G1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

- Un tel repère, lié au solide, s'appelle un **repère d'inertie**.
- Les axes sont les « **axes principaux d'inertie** ».

Mécanique | 2013 31

Le repère sert à projeter des vecteurs. C'est donc tout à fait autre chose. Maintenant, pas de chance, la tradition veut que, un référentiel dans lequel la première loi de Newton est satisfaite s'appelle un référentiel d'inertie, c'est donc une question de dynamique qui intervient dans cette nomenclature. Ici, j'introduis un repère d'inertie. Et il n'est question que de diagonaliser le tenseur d'inertie. Donc les termes sont voisins mais leur sens est radicalement différent. Maintenant j'aimerais insister sur la relation entre le moment cinétique et la vitesse angulaire.

Notes

Summary

16m 00s

Propriété : moment cinétique et vitesse angulaire

$$\boldsymbol{L}_G = I_G\,\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} I_{G1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Vitesse angulaire et moment cinétique parallèles ?

$$\begin{pmatrix} L_{G1} \\ L_{G2} \\ L_{G3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{G1}\omega_1 \\ I_{G2}\omega_2 \\ I_{G3}\omega_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Si et seulement si un ω_i non nul.

Il faut que la vitesse angulaire soit le long d'un axe principal d'inertie !

Mécanique | 2013 36

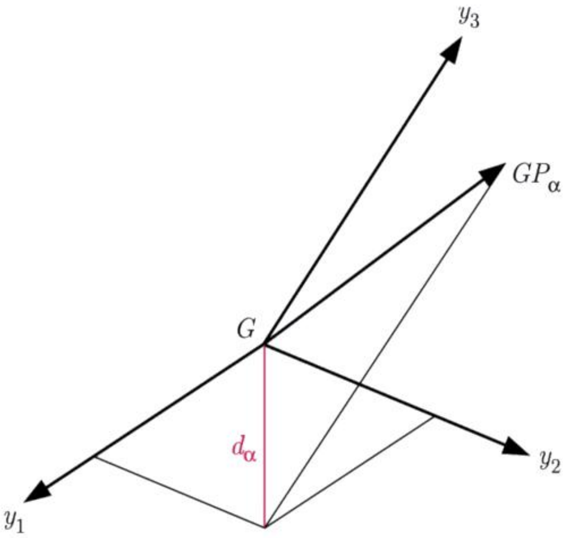
Alors je répète cette formule, qui me donne LG en fonction de oméga, et je pose la question : est-ce que le moment cinétique et la vitesse angulaire vectorielle sont des vecteurs colinéaires? Je vous invite à faire une pause pour réfléchir à cette question. Bien, regardons ce qui se passe en composantes. Si j'écris les composantes de LG, ce calcul-là me donne IG1 oméga1, IG2 oméga2, IG3 oméga3. Et maintenant, dire que les deux vecteurs sont colinéaires, c'est dire qu'il existe un coefficient lambda tel que en multipliant le vecteur par lambda je tombe sur l'autre vecteur. Maintenant ceci n'est possible, ne peut être satisfait, que si tous les IG sont égaux, ou alors deux des composantes de oméga sont nulles. A ce moment-là ça veut dire que oméga est dans la direction de 1, 2 ou 3. C'est les directions des axes principaux d'inertie. Donc d'une manière générale on peut dire que la vitesse angulaire et moment cinétique ne sont parallèles que si oméga est le long d'un axe principal d'inertie. Dans le cas particulier où les trois coefficients sont égaux, on peut montrer que n'importe quelle direction est axe principal d'inertie.

Notes

Summary

16m 50s

Définition : moment d'inertie



$$I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left[\boldsymbol{GP}_\alpha^2\, \delta_{ij} - GP_{\alpha,j} GP_{\alpha,i}\right]$$

Pour tout axe Δ, pris comme 3ème axe de coordonnée :

$$I_{33} = \sum_\alpha m_\alpha \left[\boldsymbol{GP}_\alpha^2 - GP_{\alpha,3} GP_{\alpha,3}\right]$$
$$= \sum_\alpha m_\alpha [GP_{\alpha,1} GP_{\alpha,1} + GP_{\alpha,2} GP_{\alpha,2}]$$

$$I_\Delta = \sum_\alpha m_\alpha\, d_\alpha^2$$

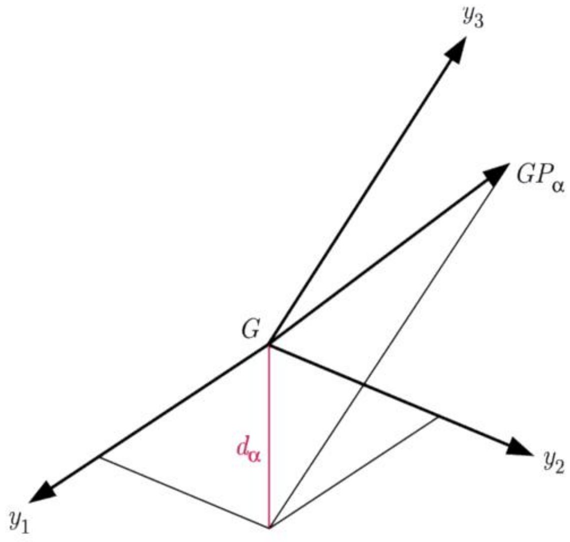
Je vais introduire maintenant la notion de moment d'inertie. Je pars de la définition, la composante ij du tenseur d'inertie. J'imagine un solide qui tourne autour d'un axe fixe, je vais l'appeler l'axe delta, comme ceci. Et maintenant, je choisis mon système d'axe de coordonnées, je vais prendre l'axe de coordonnée 3 le long de delta. Et je calcule I 3 3, alors j'applique la formule, ici j'ai un delta 3, 3 qui vaut 1. Ici j'ai GP alpha 3 au carré. Ça c'est GP alpha 1 au carré plus 2 au carré plus 3 au carré moins 3 au carré il reste GP alpha 1 au carré plus GP alpha 2 au carré. Et ça représente quoi ça, je fais un dessin, voilà les axes, qui ne sont pas nécessairement les axes principaux d'inertie mais je me suis arrangé pour mettre l'axe 3 le long de l'axe delta. Maintenant, j'ai GP alpha 1 au carré, le GP alpha 1, il est là, le G P alpha 2, il est là, et vous noterez qu'on a un angle droit ici, donc, ce terme-là, c'est, comme je l'ai appelé sur le dessin, d alpha au carré, je veux dire par là, c'est la distance, la masse m alpha à l'axe delta. La distance, la masse m alpha ici à l'axe delta, c'est d alpha. J'ai donc trouvé, et c'est ce que je vais appeler un moment d'inertie, c'est la somme des masses fois les distances au carré pour un solide.

Notes

Summary

18m 27s

Définition : moment d'inertie



$$I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left[\boldsymbol{GP}_\alpha^2 \, \delta_{ij} - GP_{\alpha,j} GP_{\alpha,i} \right]$$

Pour tout axe Δ, pris comme 3ème axe de coordonnée :

$$I_{33} = \sum_\alpha m_\alpha \left[\boldsymbol{GP}_\alpha^2 - GP_{\alpha,3} GP_{\alpha,3} \right]$$
$$= \sum_\alpha m_\alpha [GP_{\alpha,1} GP_{\alpha,1} + GP_{\alpha,2} GP_{\alpha,2}]$$

$$I_\Delta = \sum_\alpha m_\alpha \, d_\alpha^2$$

Diagonale du tenseur d'inertie : moments d'inertie

Cette formule je l'ai mise en rouge parce que c'est une formule très utile qu'on va utiliser en tout temps. Maintenant vous remarquerez que, si au lieu de calculer I 3,3 j'avais calculé I 2, 2 alors j'aurais ici GP alpha 2 au carré, il me resterait le 1 au carré et le 3 au carré, ça serait la distance au carré à l'axe 2. Donc I 3, 3 et I 2, 2 et par extension I 1,1 aussi sont des moments d'inertie. Les termes diagonaux du tenseur d'inertie sont les moments d'inertie.

Notes

Summary

20m 30s

Propriété : énergie cinétique, axe fixe

Rotation autour d'un axe Δ fixe :

Chaque masse m_α
- mouvement circulaire,
- de rayon d_α,
- à la vitesse angulaire ω.

$$E_{cin} = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha^2 = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \left(d_\alpha \omega\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha d_\alpha^2 \, \omega^2 = \frac{1}{2} I_\Delta \, \omega^2$$

Mécanique | 2013 49

Je passe maintenant à une expression de l'énergie cinétique pour un solide qui a un axe fixe. Imaginez un solide, qui tourne autour d'un axe fixe. Chaque point matériel du solide décrit un cercle. Chaque masse m alpha en lequel j'ai décomposé le solide a un mouvement circulaire, de rayon d alpha, d alpha étant la distance de m alpha à l'axe, et la vitesse angulaire de ce mouvement circulaire, c'est la vitesse angulaire du solide. J'ai donc, voici l'expression de l'énergie cinétique du solide, en sommant les termes une demie de m alpha v alpha au carré, c'est la vitesse, l'énergie cinétique pour un point matériel, je somme sur tous les points matériels. Maintenant j'utilise le fait que le v alpha c'est oméga fois d alpha, et j'ai donc une expression comme ceci, et là je reconnais notre définition de I delta. Donc voilà, j'ai une expression très commode, souvent utilisée, l'énergie cinétique d'un solide en rotation d'axe fixe a une énergie cinétique qui peut s'exprimer comme une demie de I delta oméga carré, c'est la même structure qu'ici, avec la masse qui est remplacée par le moment d'inertie, et la vitesse, par la vitesse angulaire.

Notes

Summary

21m 15s