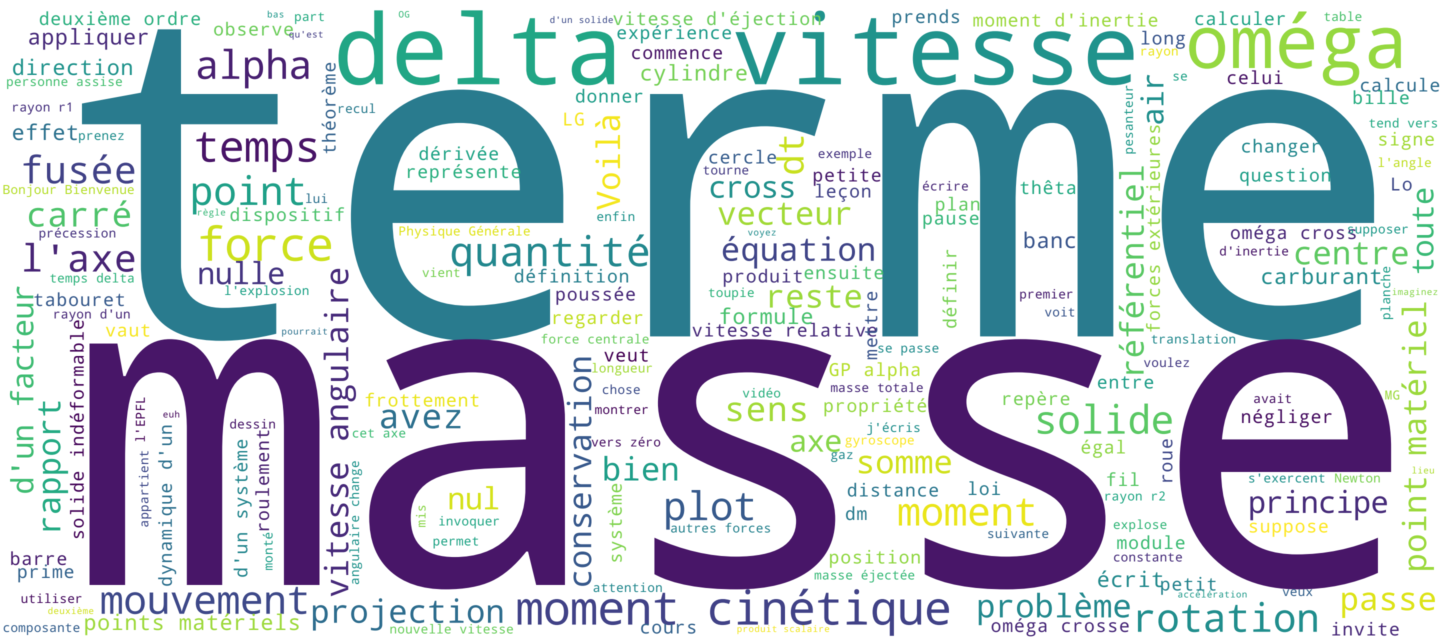
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Principes de conservation, applications

Mécanique, cours 17.2

Jean-Philippe Ansermet

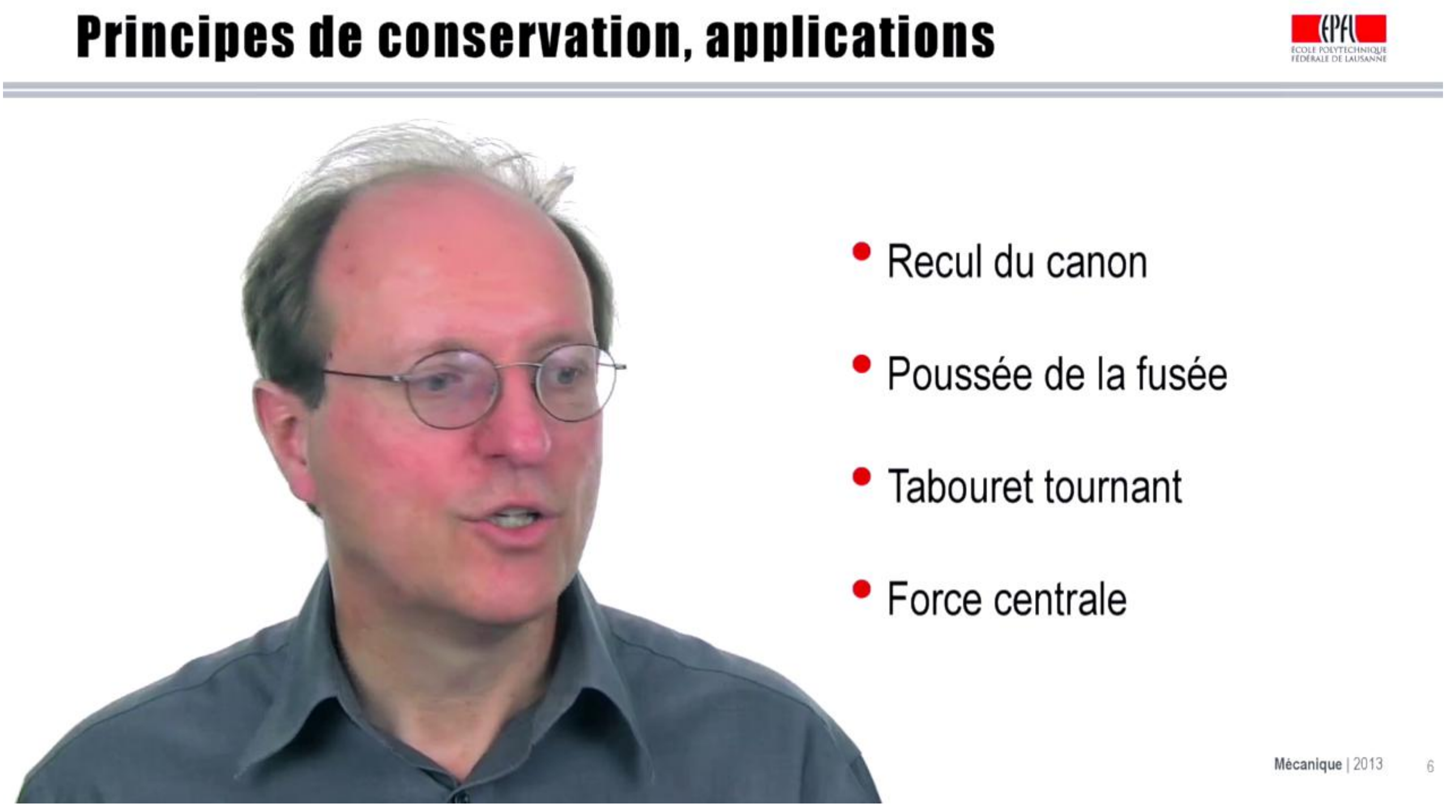
http://go.epfl.ch/traite-meca-2-17



Search MOOC

Video

EPFL



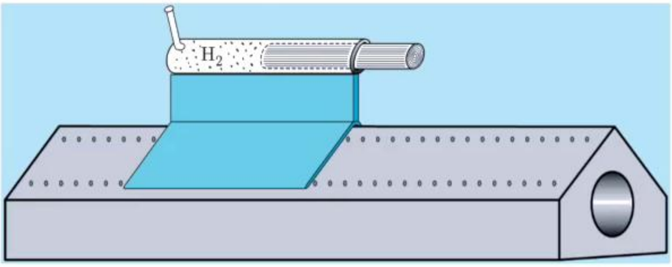
Bonjour. Bienvenue au cours de Physique Générale de l'EPFL. Dans cette leçon, on examine la dynamique d'un système de points matériels, et dans le module précédent, j'ai conclu avec des principes de conservation. Ici, on va appliquer ces principes à quelques exemples: d'abord, le recul du canon, ensuite, la poussée d'une fusée, c'est des problèmes où on a des effet de translation, donc c'est la conservation de la quantité de mouvement qui va intervenir. Je regarde ensuite des problèmes avec des effets de rotation, une personne assise sur un tabouret tournant, et enfin, un problème de force centrale.

Notes

Summary

0m 03s

Recul du canon



Donnée technique : u
vitesse d'éjection mesurée relativement au canon

Mécanique | 2013 8

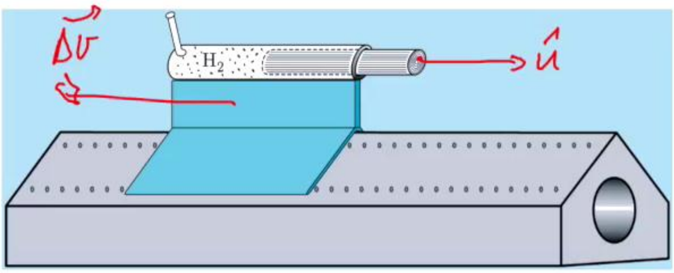
Je commence avec le recul du canon. J'imagine un dispositif qui me modélise ce qui pourrait se passer avec un canon, sauf que je travaille avec un banc à air pour négliger tous les effets de frottement, à la place d'un canon, j'ai un plot sur le banc à air, il y a un cylindre monté sur le plot, qui contient de l'hydrogène, et il y a un petit dispositif qui me permet de faire une décharge électrostatique qui met en feu l'hydrogène, et qui explose. Quand il explose, le piston, représenté ici, part dans ce sens-là, et j'ai une donnée technique pour caractériser ce dispositif, c'est cette vitesse u, qui est une vitesse d'éjection du plot, de ce cylindre, par rapport au plot. Donc, là, il faut faire attention, si on veut, on pourrait être observateur assis ici, on voit l'explosion avoir lieu, et on constate que, le, ce cylindre, qui me sert de piston, part avec une vitesse u.

Notes

Summary

0m 44s

Recul du canon



Donnée technique : $\boldsymbol{u}$
vitesse d'éjection mesurée relativement au canon

Avant : $\boldsymbol{P} = (M_0 + \Delta m)\boldsymbol{v}$

Après : $\boldsymbol{P} = M_0(\boldsymbol{v} + \Delta\boldsymbol{v}) + \Delta m(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \Delta\boldsymbol{v})$

$$(M_0 + \Delta m)\,\Delta\boldsymbol{v} = -\Delta m\,\boldsymbol{u}$$

Mécanique | 2013 11

Relativement au plot. Maintenant, je vais appliquer le principe de conservation de la quantité de mouvement, alors, avant l'explosion, la quantité de mouvement, c'est la masse totale, donc la masse du plot sur le banc à air, plus la masse du piston, fois la vitesse, on suppose qu'on a un plot qui se déplace déjà sur le banc à air avec une vitesse v, après l'explosion, le plot de masse M0 a une nouvelle vitesse, ce que j'ai écrit en v plus delta v, et puis, le piston, lui, il est éjecté avec une vitesse u, relative à la vitesse du plot. Donc la vitesse absolue de mon piston delta m, de masse delta m, c'est la vitesse relative, plus la vitesse du plot, c'est la composition des vitesses habituelles. Quand on, quand on calcule maintenant que ce terme-là, est égal à ce terme-là, il y a plusieurs termes qui se simplifient, je vous invite à faire une pause, et à regarder ça tranquillement, Il ne vous reste plus que les termes suivants, ce qui vous donne donc: le delta v, le changement de la vitesse, en fonction de la vitesse d'éjection u. On a, si u est dans ce sens-là, on a un delta v dans le sens opposé, c'est bien ce qu'on reconnaît de notre intuition. Je passe maintenant à l'exemple de la fusée.

Notes

Summary

2m 02s

Poussée de la fusée

Données techniques

taux d'éjection de masse : $m(t+\delta t) = m(t) + \frac{dm}{dt}\delta t$

vitesse de cette masse, relative à la fusée : $\boldsymbol{u}$

Au temps t : $\boldsymbol{p}(t) = m\boldsymbol{v}$

Au temps $t+\delta t$: $\delta m = -\frac{dm}{dt}\delta t$ masse éjectée

$$\boldsymbol{p}(t+\delta t) = m(t+\delta t)(\boldsymbol{v}+\delta\boldsymbol{v}) + \delta m(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$$

$\delta\vec{v}$

$$= \left(m + \frac{dm}{dt}\delta t\right)(\boldsymbol{v}+\delta\boldsymbol{v}) - \frac{dm}{dt}\delta t(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$$

Mécanique | 2013 18

J'aimerais expliquer le phénomène de poussée de la fusée. Alors, j'ai encore une fois des données techniques, qui sont les suivantes: d'abord, on a une vitesse d'éjection des gaz de la fusée, qu'on exprime comme ceci: m représente la masse de la fusée avec son carburant. Dans un, entre un temps t et un temps t plus dt, la masse de la fusée diminue, dm sur dt est négatif, dm sur dt fois delta t, c'est la quantité de masse éjectée avec le signe moins. Ainsi, dm sur dt est négatif. Je me donne encore une fois une vitesse d'éjection du carburant, et c'est une vitesse par rapport à la fusée, et maintenant j'examine la quantité de mouvement de la fusée et du gaz, entre le temps t et le temps t plus delta t. Alors, au temps t, si la fusée va à la vitesse v, la quantité de mouvement vaut mv, après un temps delta t, il y a du gaz qui s'est échappé, delta m, maintenant, c'est une grandeur positive, grâce au signe moins ici, qui représente la quantité de masse qui a été éjectée dans notre delta t, et je calcule la quantité de mouvement totale, fusée plus gaz éjecté, au temps t plus delta t, comme étant la masse au nouveau temps, t plus delta t, fois la nouvelle vitesse, v plus delta v, plus la masse éjectée, fois la vitesse relative à la fusée. Ici, vous pourriez poser la question: pourquoi on n'a pas mis un delta v aussi?

Notes

Summary

3m 57s

Poussée de la fusée

Données techniques

taux d'éjection de masse : $m(t+\delta t) = m(t) + \frac{dm}{dt}\delta t$

vitesse de cette masse, relative à la fusée : $\boldsymbol{u}$

Au temps t : $\boldsymbol{p}(t) = m\boldsymbol{v}$

Au temps $t+\delta t$: $\delta m = -\frac{dm}{dt}\delta t$ masse éjectée

$\delta\vec{v}$

$$\boldsymbol{p}(t+\delta t) = m(t+\delta t)(\boldsymbol{v}+\delta\boldsymbol{v}) + \delta m(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$$
$$= \left(m + \frac{dm}{dt}\delta t\right)(\boldsymbol{v}+\delta\boldsymbol{v}) - \frac{dm}{dt}\delta t(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$$

Mécanique | 2013 18

Vous pourriez le mettre, mais je vais faire l'argument tout à l'heure selon lequel ces termes infiniment petits du deuxième ordre sont à négliger. Et, pour la quantité de mouvement au temps t plus delta t, j'ai ces termes-là.

Notes

Summary

5m 59s

Poussée de la fusée

Pesanteur et force sur carburant éjecté : $\boldsymbol{p}(t+\delta t) - \boldsymbol{p}(t) = \left(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^c\right)\delta t$

$$\left(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^c\right)\delta t = \left(m + \frac{dm}{dt}\,\delta t\right)(\boldsymbol{v} + \delta\boldsymbol{v}) - \frac{dm}{dt}\,\delta t(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) - m\boldsymbol{v}$$

$$\delta t \to 0 \implies \boldsymbol{F}^c\,\delta t \cong 0$$
$$\delta\boldsymbol{v}\,\delta t \cong 0$$

Mécanique | 2013 22

Je regarde maintenant comment le système évolue, et ici j'ai une expression pure de la deuxième loi de Newton, qui dit: la quantité de mouvement entre t et delta t a changé, parce que des forces s'exercent pendant le temps delta t. Et ici j'ai décomposé les forces en deux: une force qui s'exerce sur le carburant éjecté, et toutes les autres forces appliquées à la fusée. J'ai donc, j'explicite maintenant le p de t plus delta t moins p de t, c'est tous ces termes-là, que j'ai réécrits, et maintenant je fais l'approximation suivante: je prends la limite lorsque delta t tend vers zéro, je vais supposer que, plus delta t est petit, plus la quantité de carburant est petite, et plus les forces qui s'exercent sur le carburant sont petites, donc ce terme-là est du deuxième ordre, et j'ai ici par exemple, un terme du premier ordre, ce terme-là, je vais le négliger, c'est ce que j'ai écrit ici, parce que il est du deuxième ordre.

Notes

Summary

6m 17s

Poussée de la fusée

Pesanteur et force sur carburant éjecté : $\boldsymbol{p}(t+\delta t) - \boldsymbol{p}(t) = \left(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^c\right)\delta t$

$$\left(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^c\right)\delta t = \left(m + \frac{dm}{dt}\,\delta t\right)(\boldsymbol{v} + \delta \boldsymbol{v}) - \frac{dm}{dt}\,\delta t(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) - m\boldsymbol{v}$$

$$\delta t \to 0 \implies \begin{aligned} &\boldsymbol{F}^c\,\delta t \cong 0 \\ &\delta \boldsymbol{v}\,\delta t \cong 0 \end{aligned}$$

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \underbrace{\frac{dm}{dt}}_{\text{poussée}}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}$$

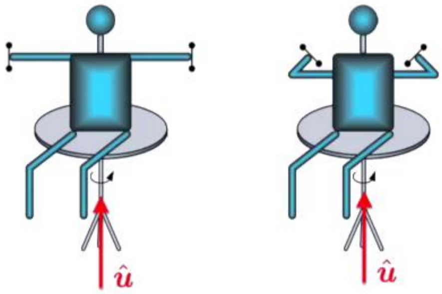
Alors, il y a d'autres termes, ce terme-là, par exemple, qui vient de ce produit-là, et bien, il tombe avec celui-là, il y a un terme en dm sur dt fois v ici, dm sur dt fois v, que je retrouve en dm sur dt fois v, là, donc là, il y a un autre terme que je peux simplifier, en tenant compte de ce produit-là, et quand vous prenez tout ce qu'il reste de cette équation, on a supprimé ce terme-là, négligeable, donc vous prenez tout ce qu'il reste dans cette équation-là, et vous le divisez par delta t, prenant la limite delta t tend vers zéro, il vous reste, je vous laisse vérifier, si vous voulez, cette équation-là. On a donc un terme du genre masse fois accélération, mais là apparaît ce terme qui dépend de la dérivée par rapport au temps de la masse de la fusée, ça, c'est le terme de poussée, et F, c'est toutes les autres forces qui s'exercent sur la fusée, notamment la force de la pesanteur ou de la gravitation. Voilà comment notre analyse dynamique d'un système de points matériels nous permet d'analyser la poussée de la fusée.

Notes

Summary

7m 29s

Tabouret tournant



$M_O^{ext} \cdot \hat{u} = 0$ $\quad L_O \cdot \hat{u} = \text{constante}$

Mécanique | 2013 27

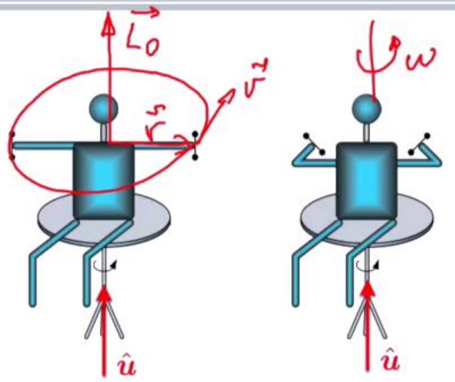
Je passe maintenant à des systèmes avec rotation, et je commence avec une expérience que vous pouvez voir sur les vidéos, vous imaginez une personne assise sur un tabouret, le tabouret est monté sur un axe avec des roulements à bille, et on observe que, si cette personne tient des haltères assez lourds, et les rapproche de l'axe de rotation, la vitesse de rotation de la personne change notablement. Alors, je vous invite à faire une pause, et d'écrire quelle est la propriété de ce système mécanique, que je peux utiliser pour invoquer une loi de conservation. Et bien la propriété qu'on va invoquer, c'est qu'on a un axe u qui appartient au référentiel, donc un vecteur u unité le long de l'axe du tabouret, tel que la projection des moments des forces extérieures projetées sur l'axe, est nulle.

Notes

Summary

8m 53s

Tabouret tournant



$$\boldsymbol{M}_O^{ext} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = 0 \qquad \boldsymbol{L}_O \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = \text{constante}$$

$$(\boldsymbol{r} \wedge m\boldsymbol{v}) \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = m|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{v}| = m|\boldsymbol{r}|^2\omega$$

Mécanique | 2013 28

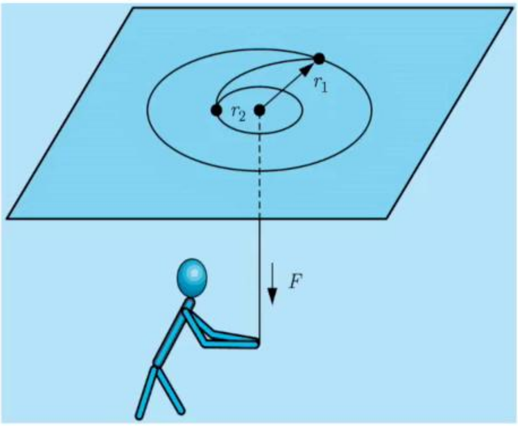
C'est le rôle des roulements à bille de minimiser cette projection des moments de force sur l'axe. et si on a cette projection des moments de force qui est nulle, alors le moment cinétique projeté sur cet axe est une constante. Maintenant, pour un point matériel, le moment cinétique c'est r cross mv, et si vous supposez que vous avez des masses qui décrivent un cercle comme ceci, vous avez un r qui est ici, vous avez un v qui est comme ceci, et le r cross v c'est un Lo comme ça. Et donc le module projeté, enfin la projection de Lo de la direction u, ça va nous donner le module de r, fois le module de mv, et comme il y a nonante degrés, c'est tout, m, r, v, v, c'est r oméga où oméga la vitesse de rotation du bonhomme, hein, on suppose une rotation comme ceci, alors on a donc v qui vaut r oméga, donc on a un m r carré oméga. Alors voilà cette, ce moment cinétique constant dépend du carré du rayon, donc quand on change le rayon d'un facteur 2, on doit changer la vitesse angulaire d'un facteur 4. Ce n'est pas ce qu'on observe, parce qu'il y a encore tout le corps humain qui est là, donc on n'observe pas un changement d'un facteur 4, toutefois il est clair que l'on observe un effet, notoire, simplement du rapprochement des mains.

Notes

Summary

10m 06s

Force centrale



$$\boldsymbol{L}_0 = \boldsymbol{r} \wedge m\boldsymbol{v}$$
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{L}_0 = \boldsymbol{r} \wedge m\,(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}) = mr^2\boldsymbol{\omega}$$

$$mr_1^2\omega_1 = mr_2^2\omega_2$$

Dernier exemple: imaginez le dispositif suivant: vous avez une masse qui glisse sur une table à air, avec très peu de frottement, qui décrit un cercle, ce point, ce plot est attaché par un fil qui traverse la table, et on tire sur le fil, pour changer le rayon. Ce qu'on observe, c'est que la vitesse angulaire change notoirement quand on passe du rayon r1 au rayon r2. Alors, ici, on peut appliquer le principe de conservation du moment cinétique parce que la force, elle est dans ce sens-là, et donc on a un problème de force centrale, et le r cross f est nul, les moments sont nuls, donc le moment cinétique qui est dans ce sens-là est conservé, et si on écrit que la vitesse oméga cross r, donc j'ai un oméga qui est aussi dans ce sens-là, si j'écris que v vaut oméga cross r, j'ai le moment cinétique qui vaut un r cross oméga cross r, avec la masse ça me donne un mr carré fois oméga. Et si donc maintenant on passe d'un rayon r1 à un rayon r2, le moment cinétique étant conservé, on a, on passe de oméga 1 à oméga 2, si par exemple on diminue le rayon d'un facteur 2, là, clairement, la vitesse angulaire change d'un facteur 4.

Notes

Summary

11m 52s