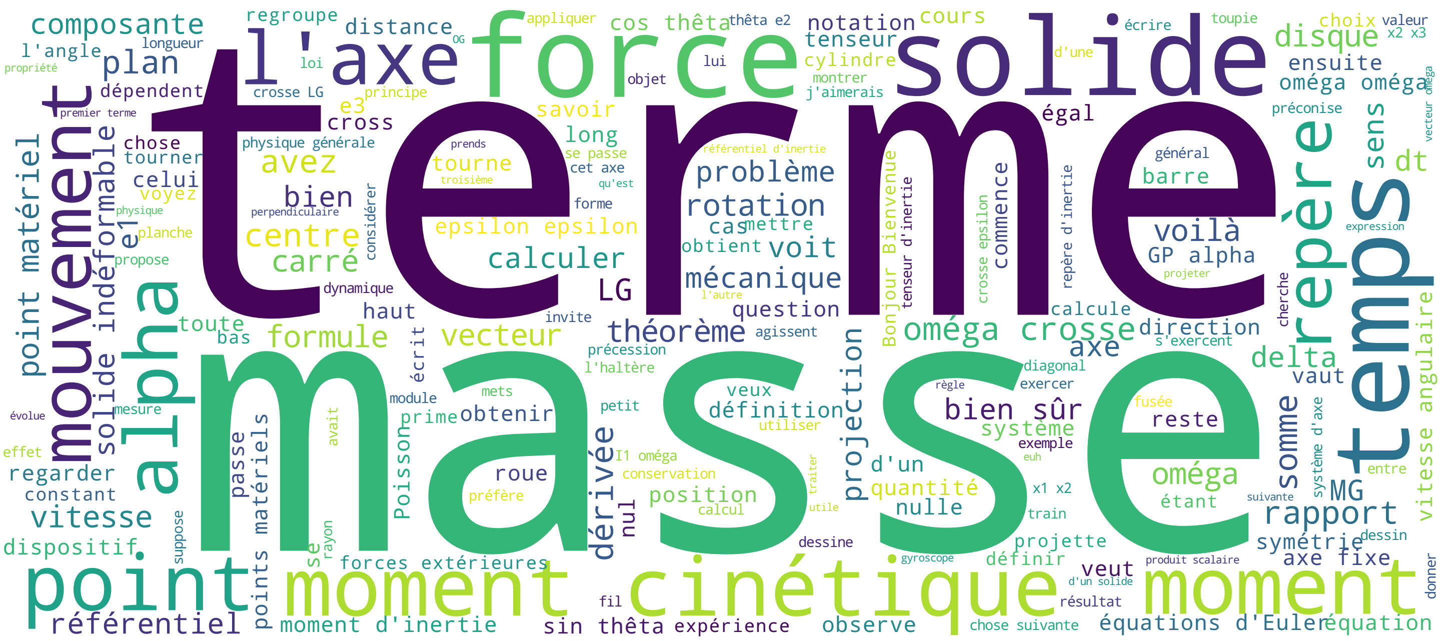
Mouvement quelconque d’un solide

Mécanique, cours 21.1

Jean-Philippe Ansermet

http://go.epfl.ch/traite-meca-1-21

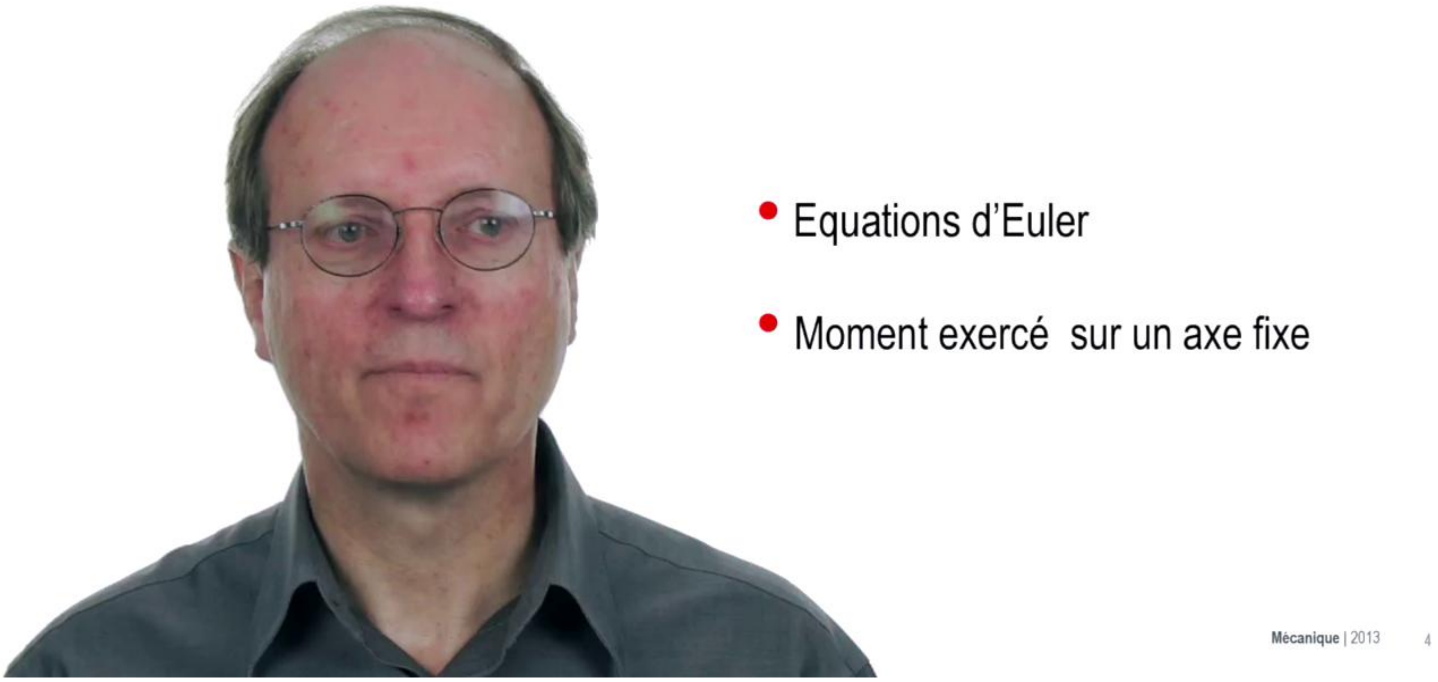


Search MOOC

Video

EPFL

Mouvement quelconque d'un solide



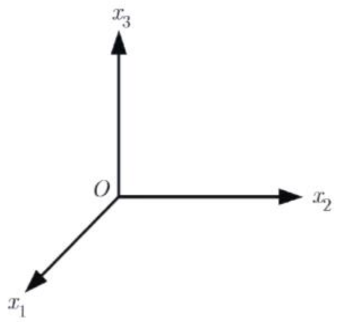
Bonjour. Bienvenue au cours de physique générale de l'ÉPFL. Dans cette dernière leçon sur la mécanique du solide indéformable, j'aimerais voir comment traiter un problème de mouvement tout à fait général. On va voir ainsi les équations d'Euler, et ensuite on regardera la question de savoir quel moment de force il faut exercer pour maintenir un axe de rotation fixe. Je commence avec les équations d'Euler.

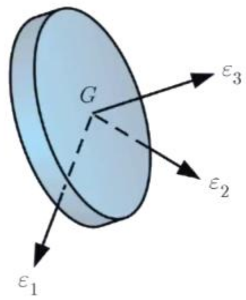
Notes

Summary

0m 03s

Equations d'Euler





$$\frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} = \boldsymbol{M}_G^{ext}$$

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1\omega_1 \\ I_2\omega_2 \\ I_3\omega_3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}_G = I_1\omega_1\hat{\varepsilon}_1 + I_2\omega_2\hat{\varepsilon}_2 + I_3\omega_3\hat{\varepsilon}_3$$

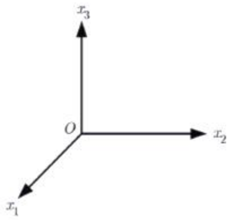
J'imagine la situation suivante : vous avez un solide, ici j'ai pris un disque, un référentiel d'inertie matérialisé par un système d'axes O x1, x2, x3, je dessine ici un repère d'inertie, epsilon 1, epsilon 2 sont dans le plan du disque, epsilon 3 sur l'axe de symétrie du disque, on a donc le tenseur qui sera diagonal par rapport à ce repère, et puis je veux appliquer cette forme-là du théorème du moment cinétique. Exprimé de façon matricielle, vous avez, dans toute généralité, les composantes du vecteur oméga du solide projeté sur le repère epsilon 1, epsilon 2, espsilon 3, on a choisi ce repère pour que notre tenseur soit diagonal, on a donc les composantes L1, L2, L3, du moment cinétique en G, projetées dans ce repère d'inertie qui valent I1 oméga 1, I2 oméga 2, I3 oméga 3. Le danger de cette notation, c'est qu'on ne voit pas ici que, associé à ces parenthèses, il y a le fait que on projette sur ce repère-là, qui évolue dans le temps. Je préfère donc de loin cette autre notation, où apparaissent explicitement les vecteurs du repère.

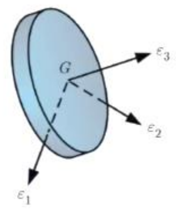
Notes

Summary

0m 35s

Equations d'Euler





$$\boldsymbol{L}_G = I_1\omega_1\hat{\varepsilon}_1 + I_2\omega_2\hat{\varepsilon}_2 + I_3\omega_3\hat{\varepsilon}_3$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} = I_1\dot{\omega}_1\hat{\varepsilon}_1 + I_2\dot{\omega}_2\hat{\varepsilon}_2 + I_3\dot{\omega}_3\hat{\varepsilon}_3 + I_1\omega_1\dot{\hat{\varepsilon}}_1 + I_2\omega_2\dot{\hat{\varepsilon}}_2 + I_3\omega_3\dot{\hat{\varepsilon}}_3$$

$$\dot{\hat{\varepsilon}}_1 = -\omega_2\hat{\varepsilon}_3 + \omega_3\hat{\varepsilon}_2$$
$$\dot{\hat{\varepsilon}}_2 = -\omega_3\hat{\varepsilon}_1 + \omega_1\hat{\varepsilon}_3$$
$$\dot{\hat{\varepsilon}}_3 = -\omega_1\hat{\varepsilon}_2 + \omega_2\hat{\varepsilon}_1$$

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} = {} & I_1\dot{\omega}_1\hat{\varepsilon}_1 + I_2\dot{\omega}_2\hat{\varepsilon}_2 + I_3\dot{\omega}_3\hat{\varepsilon}_3 \\ & +(I_3 - I_2)\omega_2\omega_3\hat{\varepsilon}_1 \\ & +(I_1 - I_3)\omega_1\omega_3\hat{\varepsilon}_2 \\ & +(I_2 - I_1)\omega_2\omega_1\hat{\varepsilon}_3\end{aligned}$$

Equations du mouvement :

$$M_1 = I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3$$
$$M_2 = I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1$$
$$M_3 = I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2$$

Cas particulier : $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$

Mécanique | 2013 15

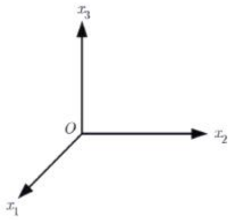
Maintenant, on veut appliquer le théorème du moment cinétique, il faut dériver par rapport au temps. Alors bien sûr, on va dériver oméga 1, oméga 2, oméga 3 par rapport au temps, c'est ce qu'on a ici, et on doit, ne pas oublier que, epsilon 1, epsilon 2, epsilon 3 varient dans le temps aussi. Et pour exprimer ces variations-là on utilise, bien sûr, les formules de Poisson. Je les ai écrites ici en composantes. Hein, j'ai écrit que epsilon 1 point, c'est oméga crosse epsilon 1, et j'ai fait le calcul explicitement, ça me donne ces valeurs-là. Quand je mets ces termes-là ici, j'obtiens ceci. Les termes des dérivées des composantes, et les termes qui viennent de Poisson. Et maintenant, je peux aussi projeter le moment des forces extérieures en G, obtenir les projections M1, M2, M3, et je regroupe les termes, et j'ai trois équations du mouvement qui sont connues comme étant les équations d'Euler. Une chose qui peut être utile, c'est de regarder le cas particulier quand on a une évolution telle que oméga 1, oméga 2, oméga 3 ne dépendent pas du temps, les projections de oméga sur le repère ne dépendent pas du temps.

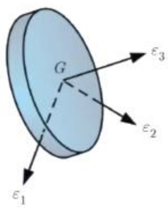
Notes

Summary

2m 15s

Equations d'Euler





$$\boldsymbol{L}_G = I_1\omega_1\hat{\varepsilon}_1 + I_2\omega_2\hat{\varepsilon}_2 + I_3\omega_3\hat{\varepsilon}_3$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} = I_1\dot{\omega}_1\hat{\varepsilon}_1 + I_2\dot{\omega}_2\hat{\varepsilon}_2 + I_3\dot{\omega}_3\hat{\varepsilon}_3 + I_1\omega_1\dot{\hat{\varepsilon}}_1 + I_2\omega_2\dot{\hat{\varepsilon}}_2 + I_3\omega_3\dot{\hat{\varepsilon}}_3$$

$$\dot{\hat{\varepsilon}}_1 = -\omega_2\hat{\varepsilon}_3 + \omega_3\hat{\varepsilon}_2$$
$$\dot{\hat{\varepsilon}}_2 = -\omega_3\hat{\varepsilon}_1 + \omega_1\hat{\varepsilon}_3$$
$$\dot{\hat{\varepsilon}}_3 = -\omega_1\hat{\varepsilon}_2 + \omega_2\hat{\varepsilon}_1$$

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} = I_1\dot{\omega}_1\hat{\varepsilon}_1 + I_2\dot{\omega}_2\hat{\varepsilon}_2 + I_3\dot{\omega}_3\hat{\varepsilon}_3 \\ +(I_3 - I_2)\omega_2\omega_3\hat{\varepsilon}_1 \\ +(I_1 - I_3)\omega_1\omega_3\hat{\varepsilon}_2 \\ +(I_2 - I_1)\omega_2\omega_1\hat{\varepsilon}_3\end{aligned}$$

Equations du mouvement :

$$M_1 = I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3$$
$$M_2 = I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1$$
$$M_3 = I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2$$

Cas particulier : $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$ $\qquad \frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{L}_G$

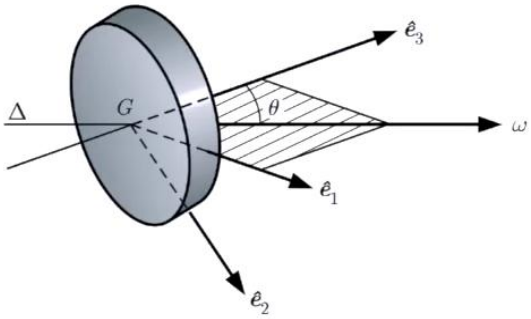
Alors tout ce qu'il reste, ce sont ces termes-là, ces termes-là proviennent de Poisson, en d'autres termes j'aurais pu écrire dans ce cas-là, pour d de LG sur dt, j'aurais eu I1 oméga 1 fois oméga crosse epsilon 1, plus les autres termes, et quand je regroupe ces termes-là ici, je me retrouve avec oméga crosse LG. Donc, pour résumer, dans ce cas de figure où les composantes sont, oméga, sont indépendantes du temps, d de LG sur dt prend cette forme synthétique très jolie, oméga crosse LG. Une petite remarque, je ne préconise pas de partir des équations d'Euler pour résoudre un problème de physique et y mettre les valeurs particulières. Ce que je vous préconise pour tout problème de mécanique du solide indéformable où vous voulez utiliser le théorème du moment cinétique, c'est de reparcourir étape par étape ce que je viens de faire. Cela me parait important pour garder clair à l'esprit qu'est-ce qu'on est en train de faire et quelles hypothèses on fait, c'est de suivre la démarche qui est la plus claire.

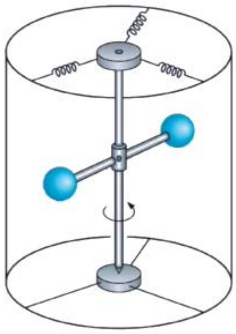
Notes

Summary

3m 56s

Moment des forces exercées sur un axe fixe





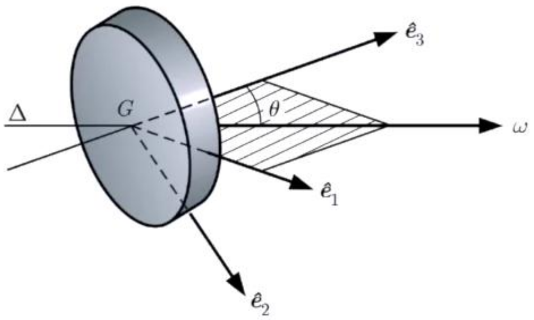
Je passe maintenant à la question de savoir quel est le moment qu'il faut exercer sur un objet pour que son axe de rotation reste fixe. On pourrait imaginer faire une mesure de ce moment avec un dispositif comme celui-ci. Vous avez ici un axe vertical, un point fixe en bas, et le haut de l'axe est maintenu par trois ressorts. L'objet comporte ces deux boules et on observe la chose suivante : si on fait tourner ce dispositif dans une position de l'haltère qui est symétrique, on n'observe pratiquement aucun mouvement du haut de l'axe. En revanche, si l'haltère est incliné, alors, on voit, un mouvement là en-haut qui est donc une manifestation du mouvement de forces que ces ressorts exercent sur l'axe. Pour modéliser cette expérience, je propose de considérer un solide, avec une symétrie plus simple, une symétrie cylindrique, donc on a un disque, les axes principaux d'inertie, et bien il y en a deux, dans le plan du disque, qui sont orthogonaux, et puis le troisième, c'est l'axe de symétrie du disque. Et maintenant, bon, je peux prendre e1 et e2, perpendiculaires, mais où je veux dans le plan du disque, je choisis e1, oméga et e3, pour que en tout temps, ils soient dans le même plan, marqué par la zone hachurée ici.

Notes

Summary

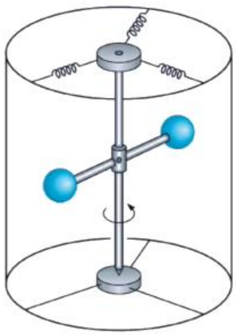
5m 29s

Moment des forces exercées sur un axe fixe



Choix du repère d'inertie:

$$(G, \hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \hat{\varepsilon}_3)$$



$$I_G = \begin{pmatrix} I_\perp & 0 & 0 \\ 0 & I_\perp & 0 \\ 0 & 0 & I_\parallel \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega \sin\theta \\ 0 \\ \omega\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}_G = I_\perp \omega \sin\theta \hat{\boldsymbol{e}}_1 + I_\parallel \omega \cos\theta \hat{\boldsymbol{e}}_3$$

Mécanique | 2013 22

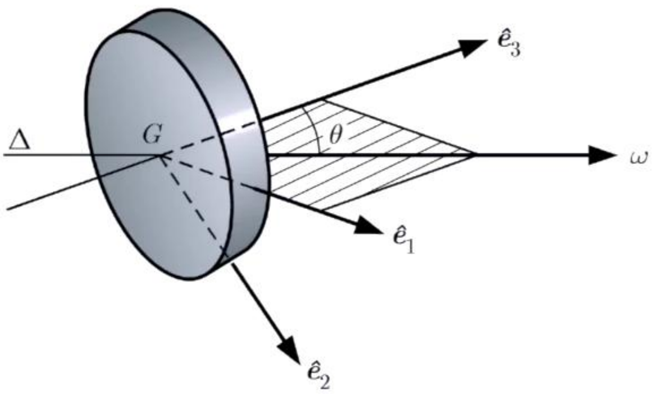
Je suppose que j'ai un solide qui tourne avec un axe fixe. Et maintenant, voilà mon choix du repère, je projette, je calcule le tenseur d'inertie dans ce repère, il est diagonal, le oméga, avec mon choix de e1. a une composante sur e1 et sur e3, comme ceci.

Notes

Summary

7m 17s

Moment des forces exercées sur un axe fixe



$$\boldsymbol{L}_G = I_\perp \omega \sin\theta \hat{\boldsymbol{e}}_1 + I_\parallel \omega \cos\theta \hat{\boldsymbol{e}}_3$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} = I_\perp \omega \sin\theta (\boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_1) + I_\parallel \omega \cos\theta (\boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_3)$$

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_1 = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_1 & \omega\sin\theta & 1 \\ \hat{\boldsymbol{e}}_2 & 0 & 0 \\ \hat{\boldsymbol{e}}_3 & \omega\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \omega\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_2$$

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_3 = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_1 & \omega\sin\theta & 0 \\ \hat{\boldsymbol{e}}_2 & 0 & 0 \\ \hat{\boldsymbol{e}}_3 & \omega\cos\theta & 1 \end{vmatrix} = -\omega\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_2$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} = \boldsymbol{M}_G = (I_\perp - I_\parallel)\frac{\omega^2}{2}\sin 2\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_2$$

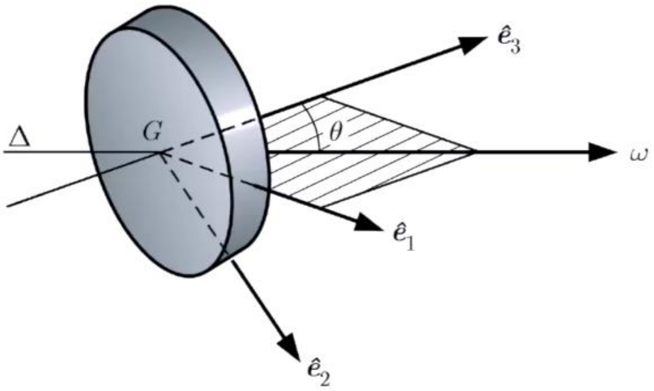
Je peux calculer LG très simplement exprimé comme ceci avec e1 et e3 qui apparaissent, encore une fois je préfère cette notation-là parce que, bien sûr, l'étape suivante c'est de calculer la dérivée, j'ai réécrit ma formule pour LG, et maintenant je dois calculer la dérivée, la dérivée de e1 va me donner oméga crosse e1, la dérivée de e3, formule de Poisson, oméga crosse e3, je vais calculer ces dérivées, j'écris mon déterminant, j'ai mon oméga. Ici j'ai le vecteur e1, ici j'ai le vecteur e3. Quand on fait le calcul, là on trouve oméga cos thêta e2, ici moins oméga sin thêta e2, et on voit que le premier terme a un sin thêta cos thêta, le deuxième terme cos thêta sin thêta, on peut regrouper les termes, et on obtient la chose suivante : d de LG sur dt, qui est donc MG, et MG, c'est ce qu'on cherche à caractériser, le moment des forces, on obtient ce résultat-là, qui va comme oméga carré, donc ça ne dépend pas du sens de oméga, on observe aussi que tous ces termes sont constants, mais il ne faut pas se tromper, ça ne veut pas dire que MG est constant, parce que MG, le long de e2, e2 est là, e tourne avec le solide. Donc MG tourne avec le solide. C'est ce qu'on avait observé avec le montage expérimental.

Notes

Summary

7m 44s

Moment des forces exercées sur un axe fixe



$$\boldsymbol{L}_G = I_\perp \omega \sin\theta \hat{\boldsymbol{e}}_1 + I_\parallel \omega \cos\theta \hat{\boldsymbol{e}}_3$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} = I_\perp \omega \sin\theta \big(\boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_1\big) + I_\parallel \omega \cos\theta \big(\boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_3\big)$$

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_1 = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_1 & \omega\sin\theta & 1 \\ \hat{\boldsymbol{e}}_2 & 0 & 0 \\ \hat{\boldsymbol{e}}_3 & \omega\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \omega\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_2$$

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_3 = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_1 & \omega\sin\theta & 0 \\ \hat{\boldsymbol{e}}_2 & 0 & 0 \\ \hat{\boldsymbol{e}}_3 & \omega\cos\theta & 1 \end{vmatrix} = -\omega\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_2$$

$$\frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} = \boldsymbol{M}_G = (I_\perp - I_\parallel)\frac{\omega^2}{2}\,\sin 2\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_2$$

$\boldsymbol{M}_G$ tourne avec le solide

Vous voyez ici que, pour obtenir ce moment de forces qui agissent sur un solide d'axe fixe, je suis obligé d'utiliser le formalisme complet. Ce que l'on a obtenu lorsqu'on a fait la mécanique du solide indéformable avec un axe fixe, c'est seulement l'équation d'évolution pour l'angle qui caractérise la rotation du solide autour de cet axe, on n'a rien pu dire sur les forces qui s'exercent sur l'axe. Il faut utiliser le formalisme général pour obtenir une information sur les forces qui agissent sur l'axe.

Notes

Summary

9m 25s