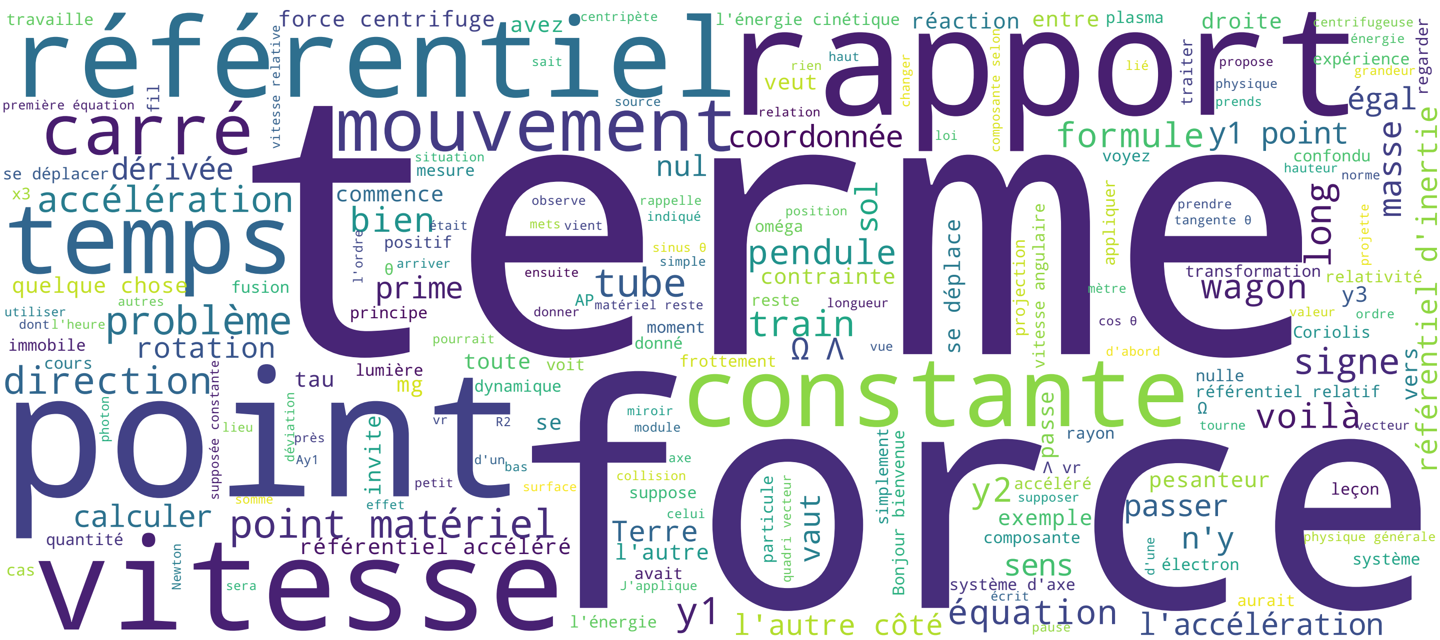
http://go.epfl.ch/traite-meca-2-15

Exemples de référentiels accélérés

Mécanique, cours 15.2

Jean-Philippe Ansermet



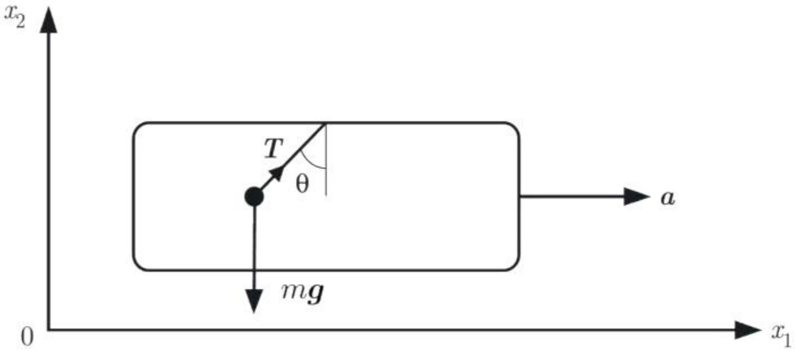
EPFL

Bonjour, bienvenue au cours de physique générale de l' EPFL. Dans cette leçon, on va voir comment appliquer la mécanique newtonienne lorsqu'on travaille avec un référentiel accéléré, par rapport à un référentiel d'inertie. Ici, on va regarder deux exemples : un problème de pendule accroché dans un train, accéléré par rapport au sol. Et un problème que j'appelle le modèle de centrifugeuse. Donc, un problème avec translation et l'autre avec rotation.

Notes

Summary

0m 04s



$\theta =$ constante

$\boldsymbol{a} =$ constante

Bilan des forces : $\boldsymbol{T}$ $m\boldsymbol{g}$

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g}$$

Cinématique : accélération $\boldsymbol{a}$

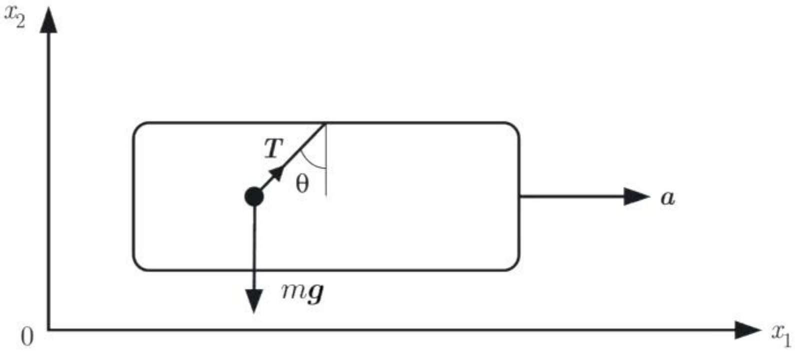
Je commence avec le problème du pendule. J'imagine que j'ai un train symbolisé ici, avec un wagon, dans lequel se trouve un pendule, une masse accrochée à un fil, et ce wagon est accéléré avec une accélération *a*. Je vais traiter ce problème deux fois. Dans un premier temps, je vais le traiter en utilisant un système d'axes cartésiens qui me sert de référentiel, lié au sol. Donc, par rapport à ce référentiel-là, mon train est accéléré avec une accélération *a*. Je suppose que dans ce train, le pendule est amorti assez rapidement, ce qui fait qu'il est dans une position d'équilibre relatif au wagon. Donc, j'ai θ qui est une constante. Et je suppose, je le rappelle, que l'accélération est constante. Quelles sont les forces? Et bien, j'ai la pesanteur, qui agit sur le point matériel, et j'ai la force du fil, que j'ai appelée *T*. J'ai l'accélération, qui est simple à calculer, parce que j'ai choisi que θ soit constante. Donc, l'accélération de ce point-là, le point étant immobile dans le wagon, est égal à l'accélération du wagon. Donc, voilà mon accélération. J'applique la deuxième loi de Newton, *ma = somme des forces* C'est une équation vectorielle.

Notes

Summary

0m 41s

Pendule dans le train, référentiel - sol



$\theta =$ constante

$\boldsymbol{a} =$ constante

Bilan des forces : $\boldsymbol{T}$ $m\boldsymbol{g}$

Cinématique : accélération $\boldsymbol{a}$

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g}$$

$$ma = T\sin\theta$$
$$0 = -mg + T\cos\theta$$

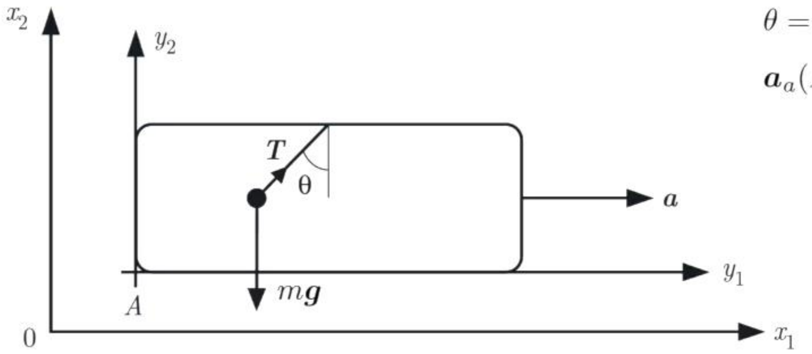
$$\boxed{\tan\theta = a/g}$$

Je la projette sur *Ox1* et *Ox2*. Voilà les projections. La projection de *T*, dans la direction *x1* fait apparaître un *sinus θ* et dans la direction *x2*, on a un *cos θ*. Si je prends ce terme-là, je le passe de l'autre côté du signe = je divise la première équation par la deuxième. J'obtiens tout simplement, *tangente θ = a / g*.

Notes

Summary

2m 25s



$\theta = \text{constante}$

$\boldsymbol{a}_a(A) = \boldsymbol{a} = \text{constante}$

Bilan des forces : $\boldsymbol{T}$ $m\boldsymbol{g}$

Dynamique dans référentiel accéléré :

$$m\boldsymbol{a}_r(P) = \boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g} - m\boldsymbol{a}_a(A)$$

$$\dot{\theta} = 0 \implies \boldsymbol{a}_r(P) = 0$$

$$0 = T\sin\theta - ma$$

$$0 = -mg + T\cos\theta$$

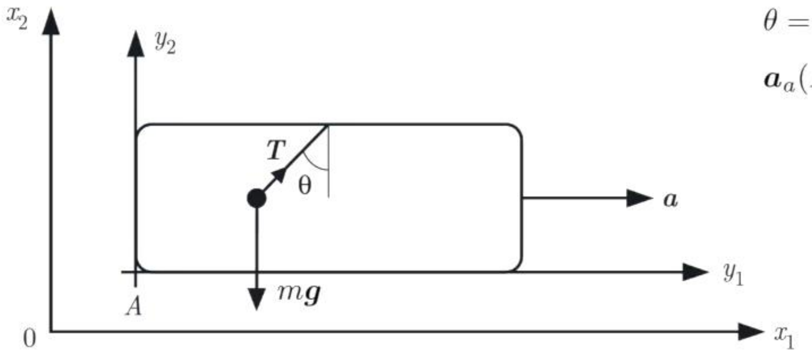
Maintenant, je vais reprendre ce problème, mais cette fois-ci, je vais utiliser, comme référentiel, le train. Alors, je refais une figure avec mon wagon, mon référentiel d'inertie, le sol. Et maintenant, je crée un référentiel, matérialisé par un système d'axes *A,y1,y2* lié au train. Je continue de faire l'hypothèse que mon pendule est immobile par rapport au train. J'ai donc θ qui est une constante, et maintenant, le mouvement du référentiel relatif, par rapport au référentiel absolu, est donné par l'accélération du point *A*, qui est égal à cette accélération-là, celle du train par rapport au sol. J'ai toujours les mêmes forces qui interviennent sur le point matériel. Et si maintenant, j'applique ma formule de la dynamique dans le référentiel accéléré, ce que j'écris, c'est : *masse fois accélération du point P = les forces et toutes les forces d'inertie* Comme ici, il n'y a aucune rotation, la seule force d'inertie qui intervient, c'est celle-ci. Et maintenant, on a supposé que le pendule est immobile dans le wagon. Donc, ce terme est nul. J'ai donc une équation du mouvement, où on a *0 = ceci*. On projette sur les axes *Ay1* et *Ay2*, cette équation-là.

Notes

Summary

2m 59s

Pendule dans le train, référentiel - train



$\theta =$ constante

$\boldsymbol{a}_a(A) = \boldsymbol{a} =$ constante

Bilan des forces : $\boldsymbol{T}$ $m\boldsymbol{g}$

Dynamique dans référentiel accéléré :

$$m\boldsymbol{a}_r(P) = \boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g} - m\boldsymbol{a}_a(A)$$

$$\dot{\theta} = 0 \implies \boldsymbol{a}_r(P) = 0$$

$$0 = T\sin\theta - ma$$

$$0 = -mg + T\cos\theta$$

$$\boxed{\tan\,\theta = a/g}$$

Mécanique | 2013 23

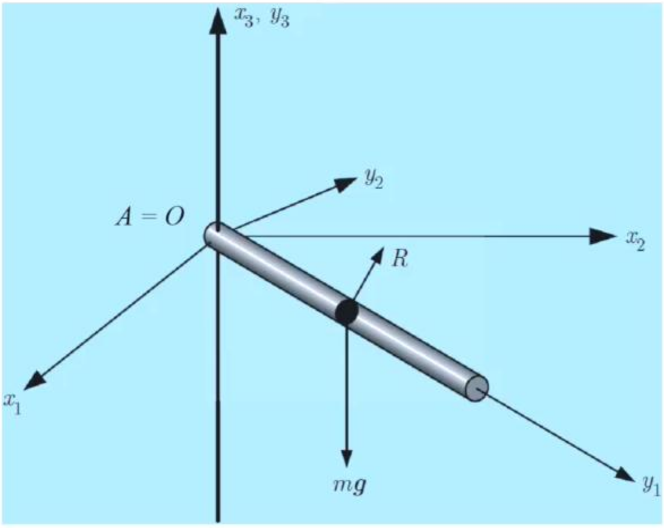
On a le *T sinus θ, dans la direction*y1*. *T cos θ*, dans la direction *y2*. On a le - qui vient, ici. Donc, on a -*ma* Et puis, on a -*mg*, parce que *mg* est vers le bas, et *y2* est vers le haut. Maintenant, je peux passer ce terme-là de l'autre côté du signe =, passer le *ma* de l'autre côté du signe =. J'ai les mêmes équations que tout à l'heure, même conclusion. Comme il se doit, *tangente θ = a / g*. Voila, j'ai résolu ce problème, une fois dans le référentiel du sol, et une fois dans le référentiel du train.

Notes

Summary

4m 46s

Modèle de centrifugeuse



Vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{\boldsymbol{x}}_3$

$\Omega = \text{constante}$

Contrainte :

$y_2 = y_3 = 0$
$\dot{y}_2 = \dot{y}_3 = 0$

Comme deuxième exemple je veux regarder un système, avec une rotation. Je vous propose le modèle suivant, de centrifugeuse. Vous imaginez que vous avez un point matériel, astreint à se déplacer dans un tube. On va supposer qu'il n'y a pas de frottement du point matériel dans le tube. Le tube tourne à une vitesse angulaire, comme ceci, supposée constante. Et, on va appliquer notre formalisme, en exprimant les vitesses et les accélérations, par rapport au référentiel relatif défini par *Ay1* le long du tube, *y2* normale au tube, et *y3* confondu avec *x3*. On a une situation, ici, où le point *A* et le point *O* sont confondus. J'ai donc ma vitesse angulaire qui est le long de *x3*, supposée constante. J'ai comme contrainte, que je dois me déplacer le long de *y1*. Donc *y2* et *y3* sont nuls et toutes les dérivées sont nulles.

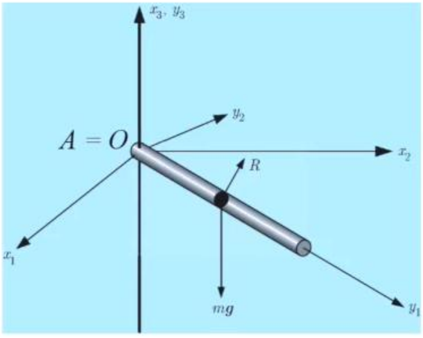
Notes

Summary

5m 30s

Modèle de centrifugeuse

Formalisme : $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_a(A) + m\boldsymbol{a}_r(P) + m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{AP} + m\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AP}) + 2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_r(\boldsymbol{P})$



Force de contrainte : $\boldsymbol{R} = R_2\hat{\boldsymbol{y}}_2 + R_3\hat{\boldsymbol{y}}_3$

Pesanteur : $m\boldsymbol{g}$

Cinématique :

$$\boldsymbol{v}_r = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{a}_r = \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AP}) = -\Omega^2 y_1 \hat{\boldsymbol{y}}_1$$

Mécanique | 2013 35

J'applique mon formalisme. Voilà ma grande formule, avec tous les termes. Mais ici *A* est confondu avec *O*, ne bouge pas. Ces termes-là tombent. On a dit que *Ω* était une constante. Donc ce terme tombe. Il me reste les deux autres. Alors je commence par exprimer les forces. Ici, j'ai une force de réaction. Tout ce que je peux dire de cette force de réaction, c'est qu'elle peut avoir une composante selon *y2* et selon *y3*. Elle n'a pas de composante selon *y1*. Si ici je mettais une force le long de *y1*, ça serait autre chose qu'une force de contrainte. Ça serait plutôt, quelque chose comme une force de frottement le long du tube. Mais en terme de force de contrainte, on est normal à la surface, le long de laquelle le point matériel doit se déplacer. J'ai la pesanteur, et c'est tout. Maintenant, la cinématique. La vitesse relative à *Ay1*, *y2*, *y3*, c'est simplement ce terme-là. J'utilise les coordonnées cartésiennes pour repérer la position du point matériel. L'accélération trivialement donnée par la dérivée seconde, la coordonnée cartésienne. Maintenant, je dois calculer *Ω Λ (Ω Λ AP)* ce terme-là Alors, on sait que c'est un terme de type centripète.

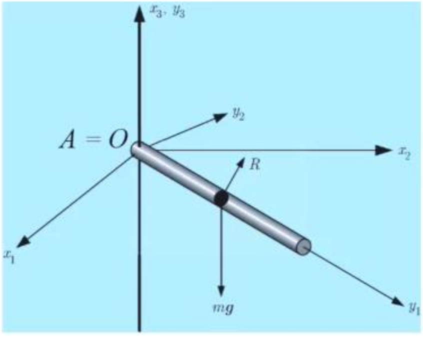
Notes

Summary

6m 46s

Modèle de centrifugeuse

Formalisme : $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_a(A) + m\boldsymbol{a}_r(P) + m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{AP} + m\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AP}) + 2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_r(\boldsymbol{P})$



Force de contrainte : $\boldsymbol{R} = R_2\hat{\boldsymbol{y}}_2 + R_3\hat{\boldsymbol{y}}_3$

Pesanteur : $m\boldsymbol{g}$

Cinématique :

$$\boldsymbol{v}_r = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{a}_r = \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AP}) &= -\Omega^2 y_1 \hat{\boldsymbol{y}}_1 \\ 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_r(P) &= 2\Omega\, \dot{y}_1 \hat{\boldsymbol{y}}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m(\ddot{y}_1 - \Omega^2 y_1) &= 0 \\ m2\Omega\dot{y}_1 &= R_2 \\ 0 &= R_3 - mg \end{aligned}$$

Mécanique | 2013 37

On a *AP* qui est dans dans cette direction-là, *Ω* qui est perpendiculaire. Donc, la norme, ça fera *Ω²* fois la norme de *AP* qui vaut *y1*. Et c'est le centripète. Donc, on met le signe - L'autre terme qu'on doit calculer, c'est le *2 Ω Λ vr* Alors *2 Ω Λ vr*, *vr* est le long du tube, Ω, perpendiculaire au tube. Donc, ce vecteur-là, *Ω Λ vr*, sera dans la direction de *y2*. C'est ce que j'ai indiqué, ici. Et son module vaut *2Ω* fois module de la vitesse, ici. C'est *y1 point*. Si vous préférez, vous pouvez calculer le déterminant explicitement. Je regroupe les termes. Ici, j'ai les termes de forces, et ici, j'ai masse fois accélération, avec tous les termes. J'ai donc le *mar(P)*, qui est là. Le terme centripète, ici. Et le terme avec le facteur 2, typique de Coriolis, là. Et voilà, les équations du mouvement exprimées avec des coordonnées et qui sont relatives à un référentiel accéléré.

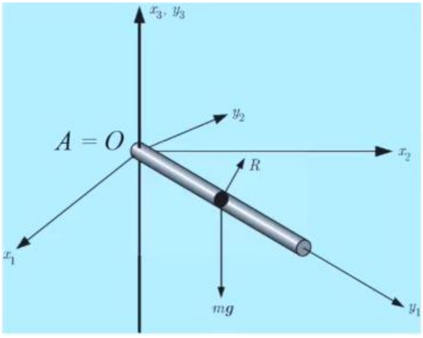
Notes

Summary

8m 22s

Point de vue du référentiel en rotation

$$m(\ddot{y}_1 - \Omega^2 y_1) = 0$$
$$m2\Omega\dot{y}_1 = R_2$$
$$0 = R_3 - mg$$



Force centrigue :
Dans le référentiel en rotation,

$$m\ddot{y}_1 = m\Omega^2 y_1$$

force radiale dirigée vers l'extérieur.

Force de Coriolis :
Dans le référentiel en rotation,

$$m\ddot{y}_2 = 0 = R_2 - 2m\Omega\dot{y}_1$$

force vers la droite quand on regarde dans le sens de la marche.

Si on oublie R_2 : équation du mouvement absurde.

Maintenant, on peut changer de point de vue. Par exemple, en ce qui concerne la force centrifuge, vous voyez que je peux prendre cette première équation-là, faire passer ce terme-là de l'autre côté du signe =. Et j'ai une équation qui donne : *masse* fois *accélération* = une force centrifuge. C'est une force radiale dirigée vers l'extérieur. De même, on peut introduire une force de Coriolis. On prend ce deuxième terme. On fait passer ce terme, ici. On a une accélération relative qui est nulle. C'est ce que j'ai écrit, ici. Et on a deux forces. On a donc, une force de contrainte ici, dont la composante *2* compense la force centrifuge. Vu comme ceci, la force centrifuge est dirigée dans le sens des *y2* négatifs, dans ce sens-là. Donc, c'est une force qui tire vers la droite, quand *y1* est positif. *y1* positif, on se déplace comme ceci. Quand on se déplace comme ceci, cette direction-là, c'est vers la droite. Donc, on observe que la force de Coriolis implique un déplacement vers la droite, quand le *Ω* est positif. J'aimerais faire maintenant une petite remarque concernant les techniques de résolution de problèmes.

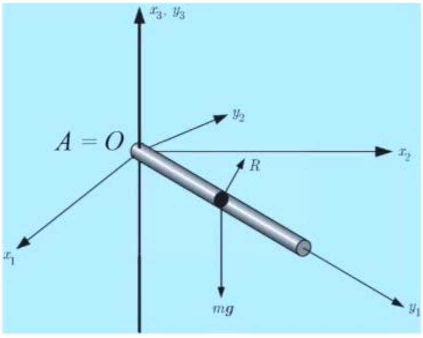
Notes

Summary

9m 49s

Point de vue du référentiel en rotation

$$m(\ddot{y}_1 - \Omega^2 y_1) = 0$$
$$m2\Omega\dot{y}_1 = R_2$$
$$0 = R_3 - mg$$



Force centrigue :
Dans le référentiel en rotation,

$$m\ddot{y}_1 = m\Omega^2 y_1$$

force radiale dirigée vers l'extérieur.

Force de Coriolis :
Dans le référentiel en rotation,

$$m\ddot{y}_2 = 0 = R_2 - 2m\Omega\dot{y}_1$$

force vers la droite quand on regarde dans le sens de la marche.

Si on oublie R_2 : équation du mouvement absurde.

Mécanique | 2013 41

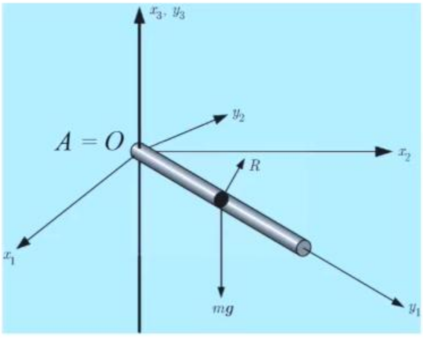
Il pourrait vous arriver, je le dis parce que c'est arrivé à des étudiants avant vous, que votre intuition vous dise, qu'il y a nécessairement une force de réaction verticale pour compenser *mg*. Puisqu'en tout temps, le point matériel reste à l'horizontal. Vous pourriez oublier le terme *R2*. Je vous invite maintenant à regarder ce qui se passerait, si on oubliait ce terme-là. On aurait une équation du mouvement qui dirait : *0 = des constantes fois y1 point* À ce moment-là, vous devez vous dire : "oui mais je sais très bien que si je mets une bille dans un tube et je fais tourner le tube, et qu'il n'y a pas de frottements, il n'y a rien qui le bloque, ce point matériel va glisser le long du tube. Donc *y1 point* n'est pas toujours nul. Donc il y a quelque chose qui va pas. Et à ce moment-là, vous pouvez repérer que vous avez oublié un terme de force.

Notes

Summary

11m 28s

Constante du mouvement



$$m(\ddot{y}_1 - \Omega^2 y_1) = 0$$

$$\dot{y}_1 \ddot{y}_1 - \Omega^2 y_1 \dot{y}_1 = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{y}_1^2 - \frac{1}{2}\Omega^2 y_1^2\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\dot{y}_1^2 - \frac{1}{2}\Omega^2 y_1^2 = \text{constante}$$

$\boldsymbol{R}$ travaille !

$$T = \frac{1}{2}\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}\Omega^2 y_1^2 \neq \text{constante}$$

Mécanique | 2013 48

J'aimerais finir cet exemple, en analysant une constante du mouvement, parce qu'on va y trouver quelque chose d'amusant. Je pars de cette équation-là du mouvement, dans la direction *y1*. Je multiplie par *y1 point*. Et là, je reconnais une dérivée par rapport au temps de *y1 point* au carré. Et là, la dérivée, par rapport au temps de *y1* au carré, comme ceci. J'ai donc, la dérivée par rapport au temps de ce terme-là, qui est nulle. Ça veut dire que ce terme-là est une constante. Alors c'est très intéressant, parce que l'énergie cinétique, ça serait presque la même chose, sauf qu'au lieu du signe moins, il y aurait un signe plus. Si ça, c'est une constante, ça, ça ne l'est pas. *mg* a une énergie potentielle qui est constante dans le mouvement, parce que le point matériel reste toujours à la même hauteur. Donc, on aurait l'énergie cinétique + l'énergie potentielle de la pesanteur, qui ne sont pas constantes. Alors, je vous invite à faire une pause, à essayer de voir pourquoi c'est le cas Et bien, la constante, elle est là. Elle n'est pas l'énergie, parce que dans ce problème, *R* travaille. La composante *R2* est dans le sens du mouvement. Donc la force *R* travaille. Et cette force-là, n'est pas une force qui dérive d'un potentiel.

Notes

Summary

12m 34s