Transformation de Lorentz : applications

Mécanique, cours 23.2

Jean-Philippe Ansermet

http://go.epfl.ch/traite-meca-2-23

Search MOOC

Video

EPFL

Transformation de Lorentz : applications

- Contraction des longueurs
- Dilatation du temps
- Horloge lumineuse

Mécanique | 2013 5

Bonjour. Bienvenue au cours de physique général de l'EPFL. Pour cette leçon, on pose les bases de la cinématique relativiste. On a vu la transformation de Lorentz, et ici on va y voir quelques applications. D'abord, on va parler de contraction des longueurs, et ensuite de dilatation du temps qu'on illustrera avec l'idée d'Einstein d'une horloge lumineuse.

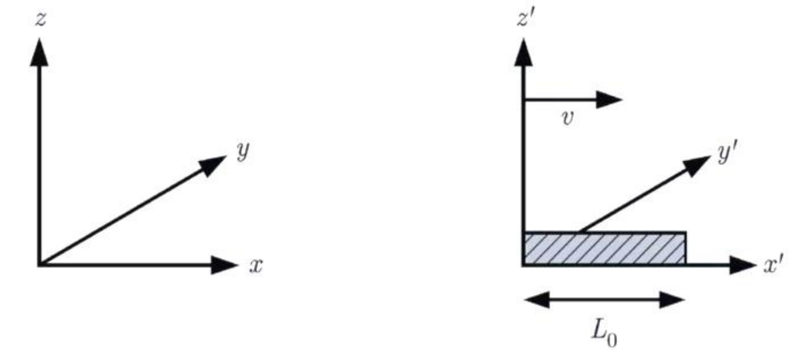
Notes

Summary

0m 00s

Contraction des longueurs

Question : quelle est la longueur de la règle dans le référentiel (x,y,z) ***à un instant donné de ce référentiel*** ?



$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad x(\text{origine de la règle}) = 0 + vt$$

$$\Longrightarrow \; x = x'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + vt \qquad x(\text{fin de la règle}) = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + vt$$

Je commence avec la contraction des longueurs. Le problème doit être posé avec précision, sinon on va rester dans la confusion la plus totale. J'imagine donc deux référentiels. Référentiel x prime, y prime, z prime se déplace à la vitesse v par rapport au référentiel x,y, z. J'ai un barreau posé dans le référentiel x prime,y prime,z prime. Ce barreau est au repos dans le référentiel. Sa longueur, je la note l zéro. Maintenant, je pose la question suivante: quelle est la longueur du barreau que je mesure dans le référentiel x, y, z dans lequel ce barreau va à la vitesse v à un instant donné de ce référentiel x, y, z? Alors on va utiliser la transformation de Lorentz pour analyser cette question. Je rappelle la formule pour la coordonnée x prime. Maintenant, je la transforme pour trouver x en fonction de x prime et de t. Et j'applique cette formule pour les deux extrémités du barreau. Une extrémité du barreau est à la coordonnée x prime égale zéro donc je vais, pour un bout de la règle dire que x, le x, c'est ce système de coordonnées, ce x vaut zéro, x prime égale zéro plus vt, et le x de l'autre bout du barreau, dans ce cas là, x prime vaut l zéro, j'ai l zéro fois cette racine plus vt. Maintenant la question que j'ai posée c'est quelle est la longueur du barreau, donc la différence entre ces deux coordonnées, à un instant donné du référentiel x, y ,z, donc à un t donné? Ce t.

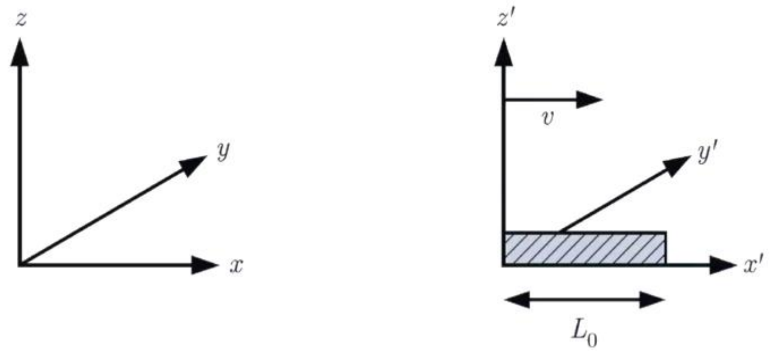
Notes

Summary

0m 33s

Contraction des longueurs

Question : quelle est la longueur de la règle dans le référentiel (x,y,z) ***à un instant donné de ce référentiel*** ?



$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\Longrightarrow \; x = x'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + vt$$

$$x(\text{origine de la règle}) = 0 + vt$$

$$x(\text{fin de la règle}) = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + vt$$

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Mécanique | 2013 10

Ce t doit être le même ici et là. Alors évidemment qu'est-ce qu'on trouve? Ceci. On trouve que l, la mesure de la longueur de ce barreau dans le référentiel x, y, z, dans lequel le barreau à la vitesse v, ce n'est pas la vitesse, ce n'est pas la longueur l zéro, c'est l zéro fois ce coefficient qui est plus petit qu'un, d'où le terme "contraction des longueurs." Je passe maintenant à la question dite "la dilatation du temps." Je pose la question suivante: j'ai une horloge dans un référentiel immobile, dans le référentiel x prime, y prime, z prime, qui lui-même se déplace à la vitesse v par rapport au référentiel x, y, z.

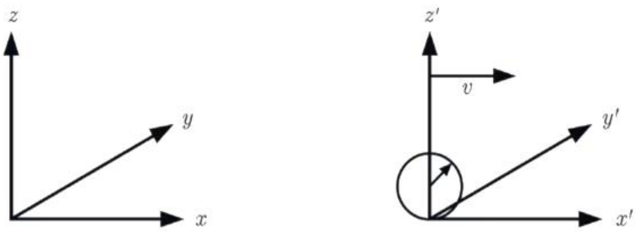
Notes

Summary

2m 53s

Dilatation du temps

Question : quel lapse de temps ***à un point donné du référentiel*** (x,y,z) entre deux battements d'une horloge en mouvement ?



horloge à $x' = 0$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Premier battement :

$$0 = \frac{t_0 - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$0 = \frac{x - vt_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$t_0 = 0 \text{ et } x = 0$$

Deuxième battement :

$$\tau = \frac{t_1 - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$0 = \frac{x - vt_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Donc j'ai une horloge qui se déplace à la vitesse v dans le référentiel x, y, z, et si j'ai un certain laps de temps entre deux battements de l'horloge, je demande quel va être le laps de temps dans le référentiel x, y, z. Pour ce faire, j'utilise la transformation de Lorentz, cette fois-ci j'aurai besoin des deux transformations, au temps du premier battement. Je vais supposer que ce premier battement, je le détecte au temps t zéro dans ce référentiel-là, et j'ai l'horloge qui est à la position x prime égal zéro, et je suppose que le premier battement a lieu au temps t prime égal zéro, donc j'ai écrit t prime égal zéro ici et x prime égal zéro, j'ai croisé les deux parce que ça c'est la formule conventionelle et ici on va se concentrer sur les temps mais on est obligé d'utiliser la coordonnée d'espace, cette équation-là me donne le x à ce temps t zéro. Ici je trouve x vaut vt zéro. Quand je mets ce x ici, je dois nécessairement avoir t zéro qui est nul, et si t zéro est nul, x est nul. X est nul. Voilà le premier temps, au moment du premier battement. Au deuxième battement, j'ai attendu un laps de temps que j'appelle tau, lettre grec qui suggère en cinématique relativiste qu'on traite un temps propre.

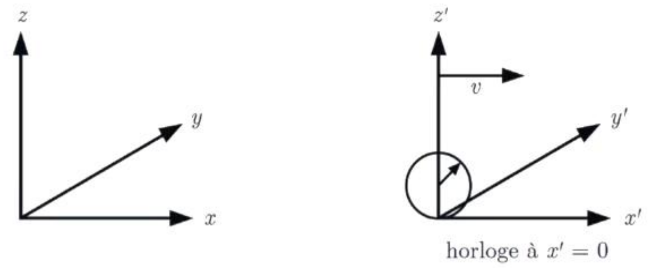
Notes

Summary

3m 44s

Dilatation du temps

Question : quel lapse de temps ***à un point donné du référentiel*** (x,y,z) entre deux battements d'une horloge en mouvement ?



$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Premier battement :

$$0 = \frac{t_0 - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$0 = \frac{x - vt_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$t_0 = 0 \text{ et } x = 0$$

Deuxième battement :

$$\tau = \frac{t_1 - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$0 = \frac{x - vt_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\tau = \frac{t_1 - (v/c^2)vt_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$t_1 = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Mécanique | 2013 17

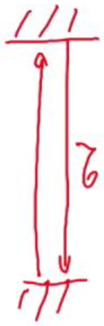
C'est un temps propre en ce sens que c'est un temps qui est mesuré là où l'horloge est au repos. Donc, j'applique cette formule-là avec t prime qui vaut tau, et je suppose que le battement est perçu dans ce référentiel-là au temps t 1 du référentiel x, y, z. Avec la relation x ici, j'ai, encore une fois mon horloge est à x prime égal zéro, donc j'ai zéro ici, et ça, ça me donne x, qui vaut vt 1, que je mets ici, comme ceci. Je trouve donc tau, qui est lié à t 1, comme ça. Et quand je nettoie mon algèbre je trouve que t 1, donc le temps entre deux battements d'horloge dans, avec la coordonnée temps du référentiel x, y, z, c'est le temps propre divisé par cette racine de un moins v carré sur c carré.

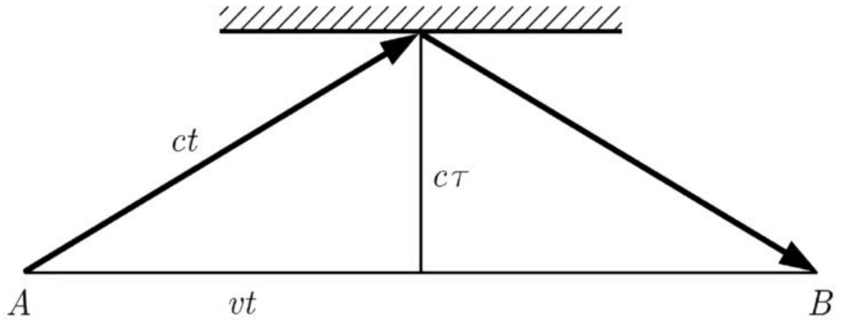
Notes

Summary

5m 31s

Horloge lumineuse





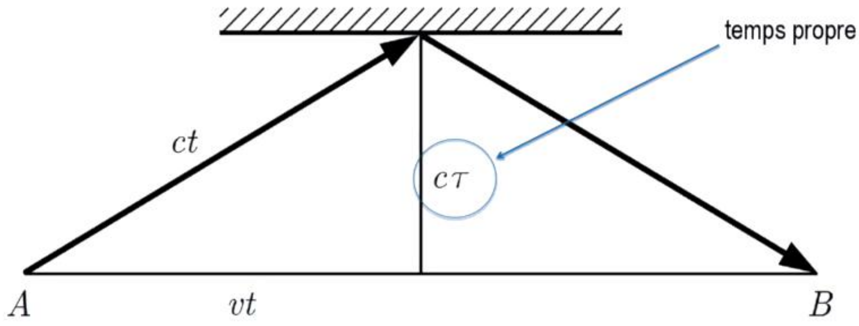
Donc t 1, t 1 est plus grand que tau et on utilise le terme "dilatation du temps." Einstein proposait d'examiner une horloge lumineuse, une horloge qui dans le référentiel où l'horloge est au repos avait cette allure-à. Vous avez un miroir ici, un miroir là, et vous avez un faisceau lumineux, qui se propage comme ça. Et le temps pour aller d'un miroir à l'autre, je l'appelle tau, c'est un temps propre. Si maintenant, on regarde cette horloge quand elle se déplace, on a, donc dans un autre système de référentiels, celui où on voit l'horloge qui se déplace, on a, pendant un temps t, on a l'horloge qui fait un mouvement vt, pendant que, le flash lumineux va d'un miroir à l'autre pendant un temps tau. Le flash lumineux parcourt c tau et, le rayon lumineux lui est oblique comme ceci, et il parcourt cette distance avec ct, où j'ai utilisé c parce que je sais que j'ai la vitesse de la lumière dans tous les référentiels.

Notes

Summary

6m 37s

Horloge lumineuse



$$c^2\tau^2 = c^2t^2 - v^2t^2 \qquad t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Maintenant, théorème de Pythagore, donc ça c'est bien le temps propre. Le théorème de Pythagore nous dit que c carré fois le temps propre carré, cette longueur-là, c'est c carré t carré moins v carré t carré. Je réarrange l'arithmétique et je me retrouve avec t qui vaut tau sur racine de un moins v carré sur c carré aussi. Donc on comprend avec cet exemple d'horloge lumineuse pourquoi on a cette dilatation du temps.

Notes

Summary

7m 59s