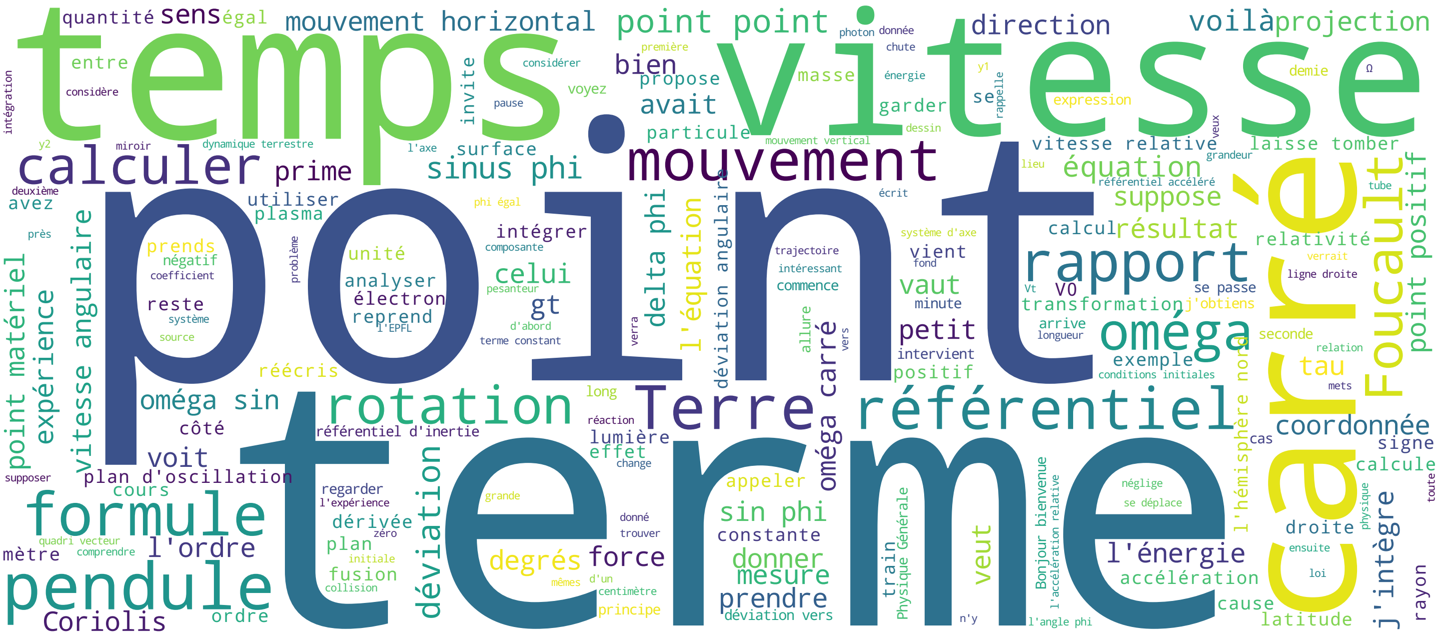
Dynamique terrestre : exemples

Mécanique, cours 16.2

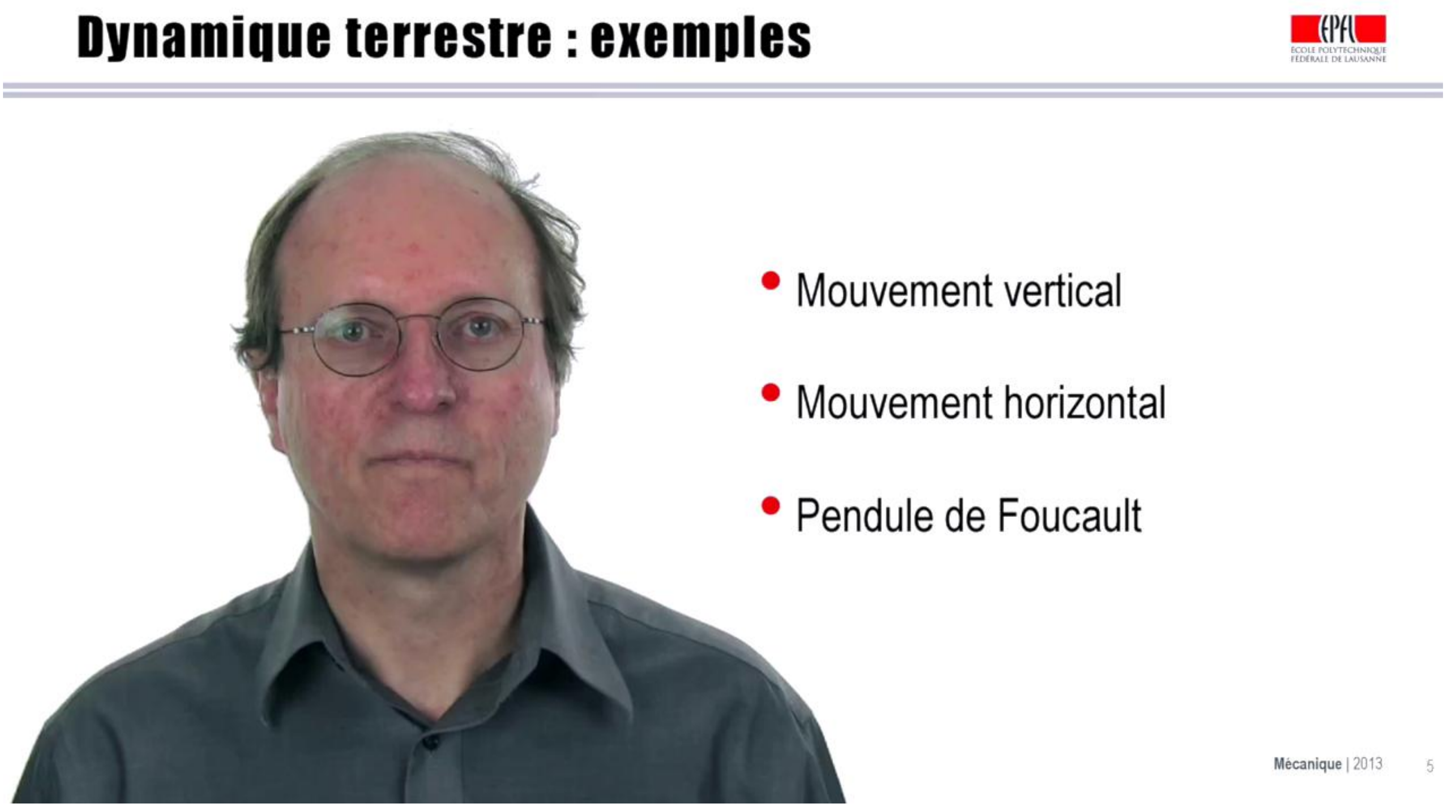
Jean-Philippe Ansermet

http://go.epfl.ch/traite-meca-2-16



Search MOOC

Video



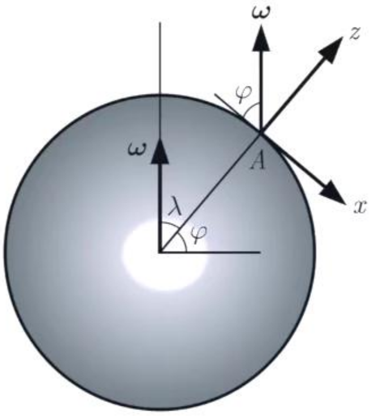
Bonjour, bienvenue au cours de Physique Générale de l'EPFL. Dans cette leçon, j'aimerais appliquer le formalisme du mouvement relatif, donc l'expression de la dynamique lorsqu'on a un référentiel accéléré, pour le cas de la dynamique terrestre, des expériences conduites à la surface de la terre, et je vous propose de considérer deux expériences, un mouvement vertical, et on verra qu'il n'est plus tout à fait vertical à cause de la rotation de la terre, un mouvement horizontal, qui nous permettra d'introduire une nouvelle technique d'analyse des équations différentielles, qu'on peut appeler un calcul des perturbations, et ce résultat sur le mouvement horizontal permettra de comprendre l'expérience du pendule de Foucault.

Notes

Summary

0m 04s

Equations du mouvement en projections



$$\boldsymbol{a}_r(P) = \boldsymbol{g} + \frac{\boldsymbol{F}}{m} - 2\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}_r(P)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega\cos\varphi \\ 0 \\ \omega\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_{rel}(P) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$2\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}_{rel}(P) = 2 \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & -\omega\cos\varphi & \dot{x} \\ \hat{\boldsymbol{y}} & 0 & \dot{y} \\ \hat{\boldsymbol{z}} & \omega\sin\varphi & \dot{z} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2\dot{y}\omega\sin\varphi \\ 2\dot{x}\omega\sin\varphi + 2\dot{z}\omega\cos\varphi \\ -2\omega\cos\varphi\dot{y} \end{pmatrix}$$

Mécanique | 2013 11

Alors je pars de l'équation du mouvement qu'on a obtenue pour la dynamique terrestre. Et maintenant, je vais procéder à des projections sur un système d'axes, pour simplifier les écritures, je choisis d'appeler les coordonnées *x*, *y* et *z*. Je vais utiliser maintenant la latitude phi, alors, ce côté-là étant perpendiculaire à celui-là et celui-ci à celui-là, j'ai donc l'angle phi qui est ici. Alors mes projections sont les suivantes, dans la direction *x*, j'ai oméga cos phi, mais avec le signe moins, et dans la direction *z*, j'ai oméga sin phi. La vitesse relative, je vais la prendre en toute généralité, le *g*, j'ai choisi *z* le long de *g*, donc j'ai le *g* dans la composante, la troisième composante; et je dois calculer le terme de Coriolis, 2 oméga cross Vr, j'utilise ma notation déterminante, *x*, *y*, *z*, mes projections de oméga, ma vitesse relative, c'est V relatif qui intervient; et si vous voulez, vous pouvez faire une pause, et calculer par vous-mêmes ces termes-là.

Notes

Summary

0m 53s

Mouvement vertical

Equation du mouvement
avec seulement la pesanteur

$$\ddot{x} = +2\dot{y}\omega\sin\varphi$$
$$\ddot{y} = -2\dot{z}\omega\cos\varphi - 2\dot{x}\omega\sin\varphi$$
$$\ddot{z} = +2\omega\cos\varphi\dot{y} - g$$

Conditions initiales

$$t = 0;\ x(0) = y(0) = 0,\ z(0) = z_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0,\ \dot{z}(0) = v_0$$

$$\dot{x}(t) - \underbrace{\dot{x}(0)}_{=0} = +2\big(y(t) - \underbrace{y(0)}_{=0}\big)\omega\sin\varphi \qquad \dot{x} = +2\omega\sin\varphi y$$

$$\dot{z}(t) - \underbrace{\dot{z}(0)}_{v_0} = +2\omega\cos\varphi\big(y(t) - \underbrace{y(0)}_{=0}\big) - gt$$

Mécanique | 2013 17

Je vous propose maintenant de regarder le mouvement vertical, alors, les équations du mouvement qu'on vient d'obtenir en regroupant les termes de Coriolis, là vous avez l'accélération relative, là, avec ces coefficients 2, c'est tous les termes de Coriolis que je viens d'obtenir, et je suppose que j'ai seulement comme force la pesanteur. Je me donne comme condition initiale, qu'à *t* égal 0, le point matériel est sur l'axe *z*, à une hauteur z0, que sa vitesse, dans le plan horizontal est nulle, et éventuellement, le point matériel a une vitesse V0 dans la direction *z*. Alors je commence mon intégration en considérant cette équation-là. Je l'intègre par rapport au temps, formellement, *x* point point, va me donner *x* point moins *x* point au temps 0, la vitesse au temps 0, on avait dit que c'était nul; l'intégration de *y* point, va me donner *y*, et avec *y* de 0, on l'avait choisi nul, donc on a ce terme-là. Maintenant, je vais calculer l'intégration formelle de l'équation en z. Alors, le *z* point point me donne *z* point t, moins *z* point de 0, ça c'est V0, et ici, j'ai y point que j'intègre, ça me donne *y* moins *y* au temps 0, qu'on avait pris nul, et ce terme-là, me donne moins *gt*.

Notes

Summary

2m 29s

Mouvement vertical

Equation du mouvement
avec seulement la pesanteur

$$\ddot{x} = +2\dot{y}\omega\sin\varphi$$
$$\ddot{y} = -2\dot{z}\omega\cos\varphi - 2\dot{x}\omega\sin\varphi$$
$$\ddot{z} = +2\omega\cos\varphi\dot{y} - g$$

Conditions initiales

$$t=0;\ x(0)=y(0)=0,\ z(0)=z_0, \quad \dot{x}(0)=\dot{y}(0)=0,\ \dot{z}(0)=v_0$$

$$\dot{x}(t) - \underbrace{\dot{x}(0)}_{=0} = +2\big(y(t) - \underbrace{y(0)}_{=0}\big)\omega\sin\varphi \qquad \dot{x} = +2\omega\sin\varphi y$$

$$\dot{z}(t) - \underbrace{\dot{z}(0)}_{v_0} = +2\omega\cos\varphi\big(y(t) - \underbrace{y(0)}_{=0}\big) - gt \qquad \dot{z} = v_0 - gt + 2\omega\cos\varphi y$$

J'ai donc, cette formule-là. Je vais prendre maintenant ces deux résultats pour *x* point et pour *z* point, et je vais les insérer dans l'équation pour *y*.

Notes

Summary

4m 12s

Mouvement vertical

$$\dot{x} = +2\omega \sin\varphi y \qquad \ddot{y} = -2\dot{z}\omega\cos\varphi - 2\dot{x}\omega\sin\varphi$$

$$\dot{z} = v_0 - gt + 2\omega\cos\varphi y$$

$$\ddot{y} = -2[v_0 - gt + 2\omega\cos\varphi y]\,\omega\cos\varphi - 2[2\omega\sin\varphi y]\,\omega\sin\varphi$$

$$\ddot{y} \simeq -2\omega\cos\varphi(v_0 - gt)$$

$$y(t) = -2\omega\cos\varphi\left(\frac{1}{2}v_0t^2 - \frac{1}{6}gt^3\right)$$

Déviation dans la direction est-ouest !

Mécanique | 2013 23

Alors je réécris ces termes, voilà mon intégrale pour *x* point et pour *z* point, l'équation du mouvement pour *y* point point, et maintenant je fais la substitution. Donc ici, pour *z* point point, je mets ce terme, ça me donne ceci, pour x point, j'ai ce terme, il est là. Et maintenant, je vais utiliser le fait que oméga est petit. Ici, j'ai des termes en oméga carré, alors je vais les négliger. Là aussi, j'ai un terme en oméga carré, alors je néglige ce terme. Je ne vais garder que des termes d'ordre 0 en oméga, ou d'ordre 1 en oméga. Donc, approximativement, voilà ce que vaut mon *y* point point de *t*, il y a le V0 moins *gt* que je garde, qui est ici. Maintenant, je peux intégrer par rapport au temps, alors, on va avoir une formule inhabituelle, ici on aura une demie de V0 *t* carré, ici je dois intégrer deux fois, ça c'est y point point, ça va me donner le *t* carré; et puis ici, quand j'intègre deux fois, j'obtiens un sixième de *gt* cube. Je vous invite à vérifier ce calcul en faisant la dérivée deux fois. Il n'y a pas de terme constant supplémentaire, à cause ou grâce à nos conditions initiales.

Notes

Summary

4m 25s

Mouvement vertical

$$\dot{x} = +2\omega \sin\varphi y \qquad \ddot{y} = -2\dot{z}\omega\cos\varphi - 2\dot{x}\omega\sin\varphi$$

$$\dot{z} = v_0 - gt + 2\omega\cos\varphi y$$

$$\ddot{y} = -2[v_0 - gt + 2\omega\cos\varphi y]\,\omega\cos\varphi - 2[2\omega\sin\varphi y]\,\omega\sin\varphi$$

$$\ddot{y} \simeq -2\omega\cos\varphi(v_0 - gt)$$

$$y(t) = -2\omega\cos\varphi\left(\frac{1}{2}v_0t^2 - \frac{1}{6}gt^3\right)$$

Déviation dans la direction est-ouest !

$$\dot{z} = v_0 - gt \underbrace{- 4\omega^2\cos^2\varphi\left(\frac{1}{2}v_0t^2 - \frac{1}{6}gt^3\right)}_{\text{négligé}} \qquad z(t) = z_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2$$

Mécanique | 2013 25

Maintenant, ayant obtenu cette expression-là pour *y*, je reprends le *z* point, qui dépendait de *y*, donc, ça me donne tout ce terme-là, mais il est en oméga carré, donc je le néglige. Il me reste *z* point égal V0 moins *gt*, c'est la formule qu'on a d'habitude, donc, je veux dire par là, en balistique, en l'absence de l'effet de rotation. Donc, voilà mon *z* de *t*.

Notes

Summary

6m 08s

Valeurs numériques

$$y(t) = -2\omega\cos\varphi\left(\frac{1}{2}\,v_0 t^2 - \frac{1}{6}\,g t^3\right)$$

$$z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2}\,g t^2$$

$$v_0 = 0 \qquad z(T) = 0$$
$$z_0 = 158\,m \qquad y(T) = 2.8\,cm$$
$$\varphi = 51\,\deg$$

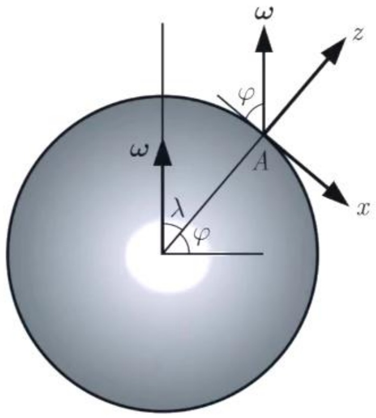
Mécanique | 2013 30

C'est intéressant de regarder quelques valeurs numériques. Si je, j'utilise les résultats pour y, qui est donc une déviation dans le sens est-ouest, et puis mon *z* qui a la forme habituelle, si maintenant je suppose que je laisse tomber un point matériel, avec une vitesse nulle d'une hauteur de 158 mètres, à une latitude de 51 degrés, vous trouvez le temps de chute avec cette formule-là et quand vous mettez ce temps de chute dans *y* de *t*, vous obtenez une déviation de, vers l'est, de 2,8 centimètres, alors que la chute était de 158 mètres. Donc ici, vous voyez que, on a pu rendre compte de cette mesure, en tenant compte de la rotation de la Terre, il y a le oméga qui est là; mais c'est un effet tout petit. Ce qui est intéressant avec le pendule de Foucault qu'on voit dans les vidéos d'expériences, c'est qu'on a un effet relativement grand, qui est vite détectable, après quelques minutes de durée de l'expérience.

Notes

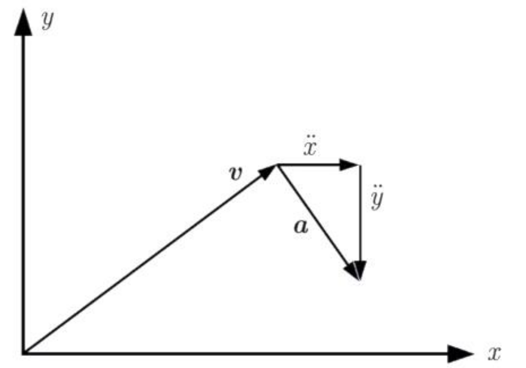
Summary

6m 38s



Equations du mouvement sous contrainte : $z = 0$

$$\ddot{x} = +2\omega\dot{y}\sin\varphi$$
$$\ddot{y} = -2\omega\dot{x}\sin\varphi$$



Mécanique | 2013 33

Pour analyser le pendule de Foucault, il faut commencer par analyser un mouvement horizontal. Je suppose, je reprends les équations du mouvement, où j'ai supposé que, il y avait un mécanisme qui assurait que *z* soit constant, égal à 0. Alors, il nous reste plus que ces termes de Coriolis. Maintenant, je vous rappelle qu'on a pris ce dessin-là, pour calculer les projections du vecteur oméga, qu'on avait utilisé l'angle phi ici, et sinus phi, si on est dans l'hémisphère nord, on a un sinus phi qui est positif, si on est dans l'hémisphère sud, sinus phi est négatif. Si on considère *x* point positif et *y* point positif, alors dans ce plan-là, *x* point positif, *y* point positif, on est dans le premier cadre, avec la vitesse *v*, et on a, dans l'hémisphère nord, sinus phi positif, *x* point point est positif, il a cette allure-là, *y* point point est négatif, il a cette allure-là, donc on a une accélération dans ce sens-là, et donc on est en train de dire que, si on regarde le sens de la marche, on a une déviation vers la droite. Et ça, c'est dans l'hémisphère nord, si on change le signe de sinus phi, on a la conclusion opposée, une déviation vers la gauche.

Notes

Summary

8m 04s

Intégration des équations du mouvement

$$\ddot{x} = +2\omega\dot{y}\sin\varphi \longrightarrow \dot{x}(t) - \dot{x}(0) = 2\omega\sin\varphi\big(y(t) - y(0)\big)$$

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{x}\sin\varphi$$

$$\dot{x}(t) = 2\omega\sin\varphi[y(t)] + \dot{x}(0)$$

$$\dot{y}(t) = -2\omega\sin\varphi\big[\dot{x}(0)t\big] + \dot{y}(0)$$

$$\dot{x}(t) = 2\omega\sin\varphi\big[\dot{y}(0)t\big] + \dot{x}(0)$$

Je reprends mes équations du mouvement et j'aimerais les intégrer. Si j'intègre formellement la première, une intégration par rapport au temps, j'ai *x* point de *t*, moins *x* point de 0, et ici, j'ai 2 oméga sin phi qui sont constants et l'intégrale de *y* point, va me donner *y*, moins *y* de 0. Je vais maintenant supposer que ce terme-là est nul, par les conditions initiales, et donc il me reste, pour *x* point de *t*, un *x* point de 0, corrigé de ce terme-là et qui dépend de *y* de *t*. Maintenant, je fais la même opération sur *y*. J'intègre une fois, je suppose, j'ai mon *y* point de 0, je l'ai mis de ce côté-là du signe égal. Et maintenant, attention, ici j'ai un 2 oméga, fois *x* point, si je prends ce terme-là, dans l'équation, j'aurais un oméga carré, je le laisse tomber, donc il n'y a que ce terme-là qui intervient, et l'intégration est immédiate, ça fait *x* point de 0 fois le temps, d'accord? L'autre terme, je le laisse tomber, parce qu'il est nécessairement du deuxième ordre au moins. Et donc, je fais maintenant, le même nettoyage pour ce terme-là, je ne veux garder de *y* que des termes de l'ordre 0 en oméga, parce que là j'ai un oméga; donc, de ce y, je dois ne garder que le *y* point de 0 fois *t*, c'est ce que j'ai fait ici.

Notes

Summary

9m 39s

Intégration des équations du mouvement

$$\ddot{x} = +2\omega\dot{y}\sin\varphi$$
$$\ddot{y} = -2\omega\dot{x}\sin\varphi$$

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(0) = 2\omega\sin\varphi\big(y(t) - y(0)\big)$$

$$\dot{x}(t) = 2\omega\sin\varphi[y(t)] + \dot{x}(0)$$

$$\dot{y}(t) = -2\omega\sin\varphi\big[\dot{x}(0)t\big] + \dot{y}(0)$$

$$\dot{x}(t) = 2\omega\sin\varphi\big[\dot{y}(0)t\big] + \dot{x}(0)$$

Avec maintenant, j'ai des solutions ici qui sont du premier ordre en oméga.

Notes

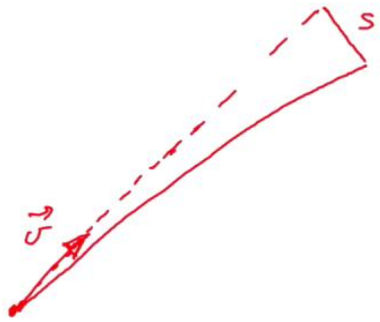
Summary

11m 26s

Déviation horizontale

$$\dot{x}(t) = 2\omega \sin\varphi \big[\dot{y}(0)t\big] + \dot{x}(0) \qquad x(t) = \omega \sin\varphi \dot{y}(0)t^2 + \dot{x}(0)t$$

$$\dot{y}(t) = -2\omega \sin\varphi \big[\dot{x}(0)t\big] + \dot{y}(0) \qquad y(t) = -\omega \sin\varphi \dot{x}(0)t^2 + \dot{y}(0)t$$



Je les réécris ici, pour analyser une déviation horizontale, voyez, ce qui se passe, c'est la chose suivante : Si j'intègre cette équation-là, peut-être c'est plus clair comme ça, au fond, je pars d'un certain point à la surface de la Terre, j'ai un mouvement horizontal, et si je n'avais aucune rotation de la Terre, étant donné une vitesse V initiale, je me déplacerais sur une ligne droite. Maintenant, ce qu'on vient de trouver, c'est que la trajectoire est déviée vers la droite.

Notes

Summary

11m 34s

Déviation horizontale

$$\dot{x}(t) = 2\omega \sin\varphi \big[\dot{y}(0)t\big] + \dot{x}(0) \qquad x(t) = \omega \sin\varphi \dot{y}(0)t^2 + \dot{x}(0)t$$

$$\dot{y}(t) = -2\omega \sin\varphi \big[\dot{x}(0)t\big] + \dot{y}(0) \qquad y(t) = -\omega \sin\varphi \dot{x}(0)t^2 + \dot{y}(0)t$$

$$s = \sqrt{\big(x - \dot{x}(0)t\big)^2 + \big(y - \dot{y}(0)t\big)^2} \quad = \omega \sin\varphi v t^2$$

$$v = \sqrt{\dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2}$$

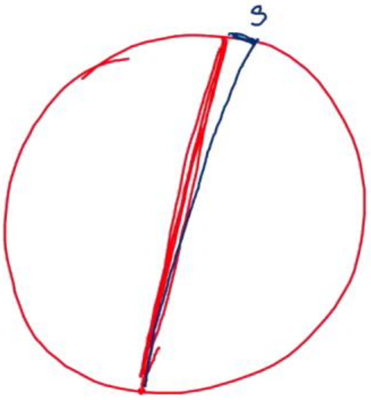
Alors, je vais appeler *s* cette déviation, et je peux calculer cette déviation en utilisant cette formule-là, je fais la différence entre *x* de *t* et cette valeur-là que j'aurais, si oméga était nul. D'accord? Donc je fais, simplement j'applique Pythagore, et puis j'introduis, pour *x* point de 0 au carré, plus *y* point de 0 au carré, la notation V, donc j'ai ici, oméga sin phi, ce oméga sin phi, fois V, *t* carré.

Notes

Summary

12m 11s

Pendule de Foucault, heuristique



$$s = \omega \sin\varphi \, v \, t^2$$

Mécanique | 2013 44

Avec ce résultat-là, je peux comprendre le comportement du pendule de Foucault. Je réécris cette déviation, en *t* carré, et maintenant on va imaginer qu'est-ce qui se passe, imaginons qu'on a un pendule de Foucault, dont l'extrême bout frotte dans le sable, alors qu'est-ce qu'on verrait si on avait un tel dispositif ? Et bien on verrait notre pendule aller d'une position extrême ici, sur un cercle limite et maintenant, je vais dessiner ce qui se passerait, s'il n'y avait pas de rotation de la Terre, on irait en ligne droite, et on reviendrait comme ça. D'accord? Maintenant, à cause de la rotation de la Terre, on est déviés comme ceci. Et là, maintenant, on vient de calculer cette déviation *s*, pour un temps donné. Alors, de façon heuristique, ça veut dire approximative, je peux tenir le raisonnement suivant, pour estimer de combien, le plan d'oscillation du pendule de Foucault tourne, par unité de temps.

Notes

Summary

12m 56s

Pendule de Foucault, heuristique

$$s = \omega \sin\varphi\, v\, t^2 \qquad t \to 0 \implies v \approx \text{constante}$$

$$\Delta\phi = \frac{s}{vt} = \omega\, t \sin\varphi \qquad \varphi\text{: latitutde}$$

Vitesse angulaire de rotation du plan d'oscillation : $\frac{\Delta\phi}{t} = \dot{\phi} = \omega \sin\varphi$

De cette expression-là, je peux calculer, si la vitesse est constante, alors je vais prendre un intervalle de temps très petit, appelons *t* ce temps, je le prends très petit, je vais calculer de combien l'orbite dévie, donc j'avais une certaine direction et maintenant, j'ai une déviation; je calcule la déviation angulaire, ici, un delta phi, que je calcule comme la déviation spatiale, divisée par Vt, c'est ce que j'ai écrit ici. Avec *s* qui est donné ici, j'obtiens ce terme-là pour le delta phi. Maintenant, j'ai donc par unité de temps, une vitesse angulaire de rotation du plan d'oscillation du pendule de Foucault qui est donnée par cette formule-là; Vous prenez le delta phi, vous divisez par le temps, vous avez donc une vitesse angulaire, phi point, qui vaut oméga sin phi, qui est un terme constant. On voit donc que la vitesse d'oscillation du plan du pendule de Foucault, n'est pas exactement la vitesse angulaire de rotation de la Terre, mais elle est modifiée par le sinus de la latitude.

Notes

Summary

14m 08s

Pendule de Foucault, heuristique

$$s = \omega \sin\varphi \, v \, t^2 \qquad t \to 0 \implies v \approx \text{constante}$$

$$\Delta\phi = \frac{s}{vt} = \omega \, t \sin\varphi \qquad \varphi\text{: latitutde}$$

Vitesse angulaire de rotation du plan d'oscillation : $\frac{\Delta\phi}{t} = \dot{\phi} = \omega \sin\varphi$

Déviation en 10 minutes :

$$\Delta\phi = \sin\varphi \cdot 7 \times 10^{-5} \times 10 \times 60 = \sin\varphi(0.04 \text{ radian}) = \sin\varphi(2.4 \text{ degrés})$$

Si, maintenant on regarde un ordre de grandeur, supposons que le pendule de Foucault, est en mouvement pendant 10 minutes, alors on calcule cette vitesse angulaire fois 10 minutes, pour avoir la déviation angulaire delta phi, on a le sin phi, la vitesse angulaire de la Terre, fois les 10 minutes, 10 minutes c'est 60 *secondes*, on arrive à sinus phi, fois 2,4 degrés. Donc, si on a une mesure très précise, si notre plan d'oscillation du pendule de Foucault est propre, donc si le pendule reste bien dans un plan, alors en 10 minutes déjà, on peut voir une déviation angulaire de l'ordre de 2,4 degrés. Ça dépend évidemment de la latitude, et bien sûr que lorsque phi égal 0 à l'équateur, on n'a aucun effet. Et au pôle, on a l'effet maximum, sinus phi égal 1.

Notes

Summary

15m 38s