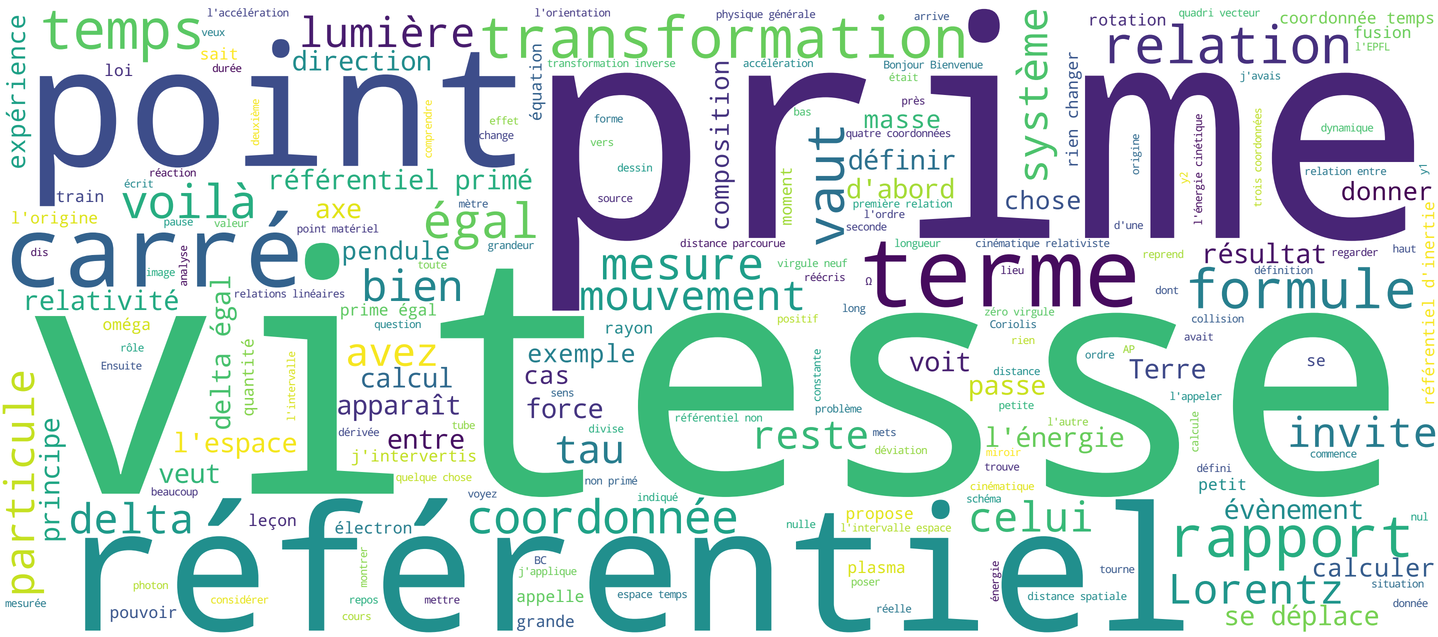
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

http://go.epfl.ch/traite-meca-1-23

Cinématique relativiste

Mécanique, cours 23.1

Jean-Philippe Ansermet



Search MOOC

Video

EPFL

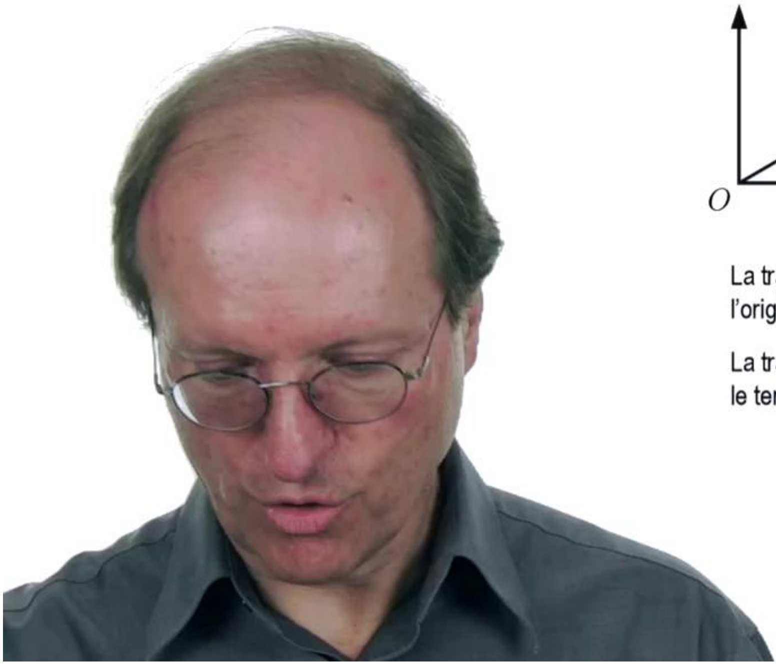
Bonjour. Bienvenue aux cours de physique générale de l'EPFL. Dans cette leçon je vais poser les bases de la cinématique relativiste. On va d'abord voir la transformation de Lorentz, découlant de principes de symétrie fondamentale, on va voir comme cette transformation de Lorentz prédit une composition des vitesses qui n'est plus celle dont on a l'habitude, et je finis avec la définition de la mesure de l'intervalle espace-temps.

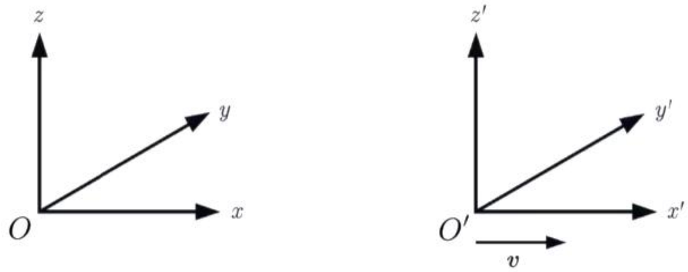
Notes

Summary

0m 00s

Homogénéité du temps et de l'espace





La transformation de coordonnées ne doit pas dépendre du choix de l'origine du temps ou des coordonnées spatiales.

La transformation doit être invariante par translation dans l'espace ou le temps.

$$x' = Ax + Bt$$
$$y' = y \qquad z' = z$$
$$t' = Cx + Dt$$

Mécanique | 2013 10

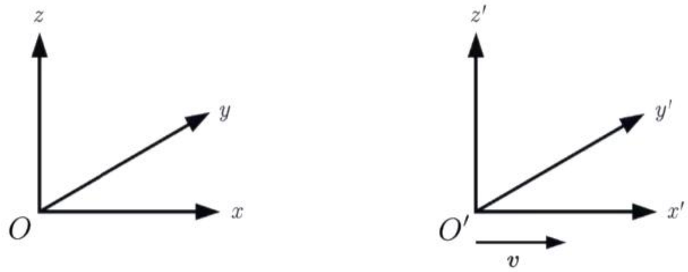
Je commence avec la transformation de Lorentz : on aimerait savoir la relation qui lie les coordonnées de deux référentiels : notez ici O x y z et O prime, x prime, y prime, z prime, avec le référentiel primé qui va à la vitesse v par rapport au référentiel O x y z. Première chose que je veux faire c'est dire que l'espace est homogène, ça veut dire que je dois pouvoir faire ma description physique autour de n'importe quel point ou si vous voulez avoir mon origine des axes n'importe où, vous prenez cet acte O x par exemple, je dois pouvoir mettre le point O beaucoup plus loin ici, je ne dois rien changer à la physique que j'observe et que je décris, de même pour le temps, on a une homogénéité du temps, l'origine du temps n'a pas de sens physique particulier on doit pouvoir prendre n'importe quelle origine en d'autres termes on doit pouvoir faire des translations dans l'espace et dans le temps et ne rien changer. Et bien si vous y réfléchissez pendant un moment, le seul moyen c'est d'avoir des relations linéaires.

Notes

Summary

0m 35s

Homogénéité du temps et de l'espace



La transformation de coordonnées ne doit pas dépendre du choix de l'origine du temps ou des coordonnées spatiales.

La transformation doit être invariante par translation dans l'espace ou le temps.

$$x' = Ax + Bt$$
$$y' = y \qquad z' = z$$
$$t' = Cx + Dt$$

Mécanique | 2013 10

Donc je vais poser que entre mes coordonnées x prime, j'introduis un temps t prime associé à ce système de coordonnées, les relations x prime et t prime et x et t sont linéaires, dans la direction y et z, un argument de symétrie permet rapidement de se convaincre que on doit s'attendre à ce que rien ne change dans ces directions-là, ce que j'ai écrit ici. Donc voilà on a déjà une première étape des relations linéaires.

Notes

Summary

2m 04s

Vitesse de translation

$$x' = Ax + Bt$$
$$y' = y \qquad z' = z$$
$$t' = Cx + Dt$$

O' se déplace à la vitesse v

$$O' \implies x' = 0 \implies \frac{x}{t} = -\frac{B}{A} = v$$

$$B = -vA$$

Mécanique | 2013 16

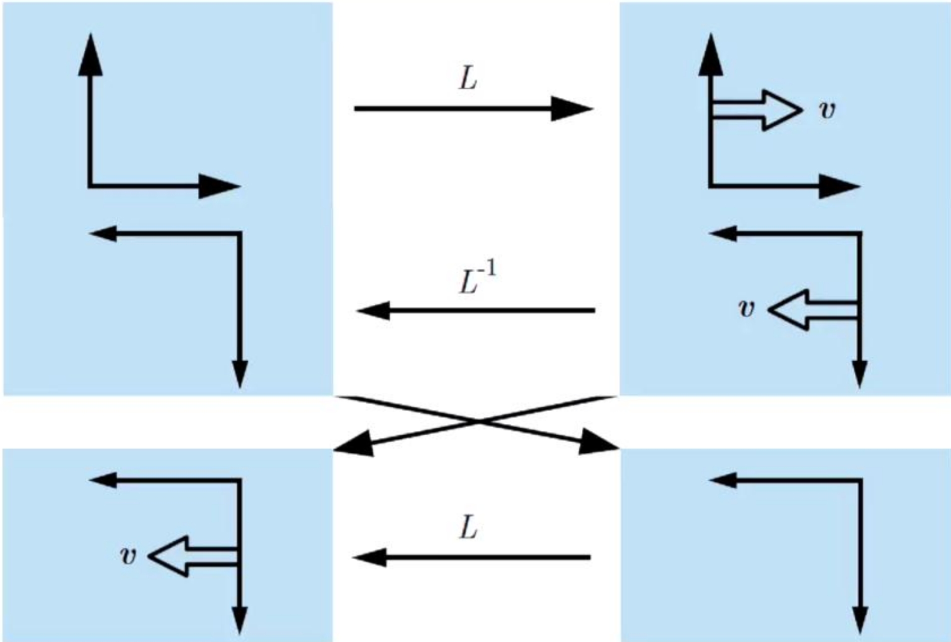
Ensuite on sait une chose, c'est que un référentiel se déplace à la vitesse v par rapport à l'autre. Comment est-ce qu'on l'exprime là-dedans? Et bien le point O prime se déplace à la vitesse v, il a la coordonnée x prime égal 0. Quand on met x prime égal 0 ici on a x sur t qui vaut moins B sur A et ça c'est la vitesse du point O prime dans le référentiel non primé. Donc ça c'est B. On a donc une première relation : B égal moins vA. Cette première relation entre ces quatre coefficients.

Notes

Summary

2m 37s

Isotropie de l'espace



Mécanique | 2013 20

De plus, on va imposer l'isotropie de l'espace. On ne doit pas être tributaire d'un choix particulier de l'orientation des axes. On doit avoir la même physique quelle que soit l'orientation des axes. Alors on va faire le calcul qui utilise l'isotropie de l'espace, mais avant de faire le calcul, je vous invite à regarder un petit croquis qui nous aide à comprendre ce qu'on va faire : je schématise ici ma situation avec mes deux systèmes de coordonnées correspondant à deux référentiels l'un se déplaçant à la vitesse v par rapport à l'autre. Et la transformation je l'appelle L comme Lorentz, la transformation qui passe de ce système à celui-là. Maintenant je me propose d'inverser tous les axes et je dis que ça ne doit rien changer. Maintenant la transformation qui nous ferait passer de ce système à celui-là, je vais l'appeler L moins 1, c'est la transformation inverse. Direct on va de là à là, inverse, on va dans l'autre sens. Et maintenant je vous invite à faire l'observation suivante : si j'intervertis le rôle des coordonnées et donc si j'intervertis ces deux images-là, comme ceci, le dessin que j'ai là en bas, n'est rien d'autre que celui que j'ai là en haut. Mais retourné. Donc cette transformation-là, c'est la transformation L initiale. Exprimons-le de façon algébrique.

Notes

Summary

3m 21s

Isotropie de l'espace

Transformation inverse :

$$x = \frac{Dx' - Bt'}{\Delta}$$
$$t = \frac{-Cx' + At'}{\Delta}$$

$$\Delta = AD - BC$$

Vitesse de l'origine:

$$O \implies x = 0 \implies \frac{x'}{t'} = \frac{B}{D}$$

On inverse le sens des axes de coordonnées spatiales :

$$(-x) = \frac{D(-x') - Bt'}{\Delta} \qquad x = \frac{Dx' + Bt'}{\Delta}$$
$$t = \frac{-C(-x') + At'}{\Delta} \qquad t = \frac{Cx' + At'}{\Delta}$$

On échange le rôle des variables :

$$x' = \frac{Dx + Bt}{\Delta} \qquad x' = Ax + Bt$$
$$t' = \frac{Cx + At}{\Delta} \qquad t' = Cx + Dt$$

D'abord on va calculer la transformation inverse. Alors je vous invite à considérer la matrice L, donnée par A B C D et je vous invite à calculer L moins 1. En faisant une pause. Voilà le résultat avec delta qui apparaît ici qui est le déterminant de la matrice AD moins BC. Maintenant si je veux exprimer la vitesse de l'origine O : l'origine O est caractérisée par x égal 0 on a donc pour l'origine : x prime sur t prime qui est la vitesse de O dans le référentiel primé qui vaut B sur D, c'est tout ce qu'on sait pour le moment sur cette vitesse. Mais maintenant je vous propose comme indiqué dans le schéma tout à l'heure, d'inverser le sens des axes. Alors voilà ici j'ai remplacé x par moins x, x prime par moins x prime, qui apparaît ici aussi, je nettoie tout ça, ça me donne ces relations-là. Et maintenant j'intervertis le rôle des variables, là où j'avais x, je vais mettre x prime, là où j'avais x prime, je mets x etc.

Notes

Summary

5m 09s

Isotropie de l'espace

$$x' = \frac{Dx + Bt}{\Delta} \qquad x' = Ax + Bt$$

$$t' = \frac{Cx + At}{\Delta} \qquad t' = Cx + Dt$$

$$\frac{D}{\Delta} = A \qquad \frac{B}{\Delta} = B \qquad \frac{C}{\Delta} = C \quad \text{et} \quad \frac{A}{\Delta} = D$$

$$\Delta = 1 \quad \text{et} \quad A = D$$

$$O \implies x = 0 \implies \frac{x'}{t'} = \frac{B}{D} = \frac{B}{A} = -v$$

Mécanique | 2013 38

J'ai cette relation-là et maintenant je déclare que cette transformation-là est équivalente à la transformation initiale. Je réécris ce résultat et maintenant on a donc, on doit avoir, D sur delta qui est égal à A D sur delta qui est égal à B et les autres relations comme ceci : D sur delta égal A, B sur delta égal B, on a aussi C sur delta égal C et A sur delta égal D. Ces deux relations, on voit manifestement qu'on doit avoir delta qui est égal à 1 et ici on a A égal D même chose là, donc on a obtenu ces relations-là. Maintenant pour la vitesse du point O mesurée dans le référentiel primé, on a x prime sur t prime qui était B sur D, c'est ce qu'on avait trouvé mais on voit que D c'est égal à A et B sur A c'est moins v donc on trouve que la vitesse de O c'est moins v, c'est un résultat assez intuitif, mais ici on l'a démontré en toute rigueur, en utilisant les principes de symétrie.

Notes

Summary

6m 41s

Vitesse de la lumière

$$x' = Ax + Bt \qquad \longrightarrow \qquad u' = \frac{Au + B}{Cu + D} = \frac{u - v}{u\, C/A + 1}$$
$$t' = Cx + Dt$$

En particulier pour la vitesse de la lumière :

$$c = \frac{c - v}{c\, C/A + 1} \implies C = -A\frac{v}{c^2}$$

$$\Delta = 1 \implies \quad \Delta = AD - BC = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) A^2 = 1$$

Mécanique | 2013 44

Maintenant on va imposer la vitesse de la lumière qui doit être la même dans tous les référentiels. Alors regardons d'abord quelles sont les conséquences de ces relations-là pour la composition des vitesses, et bien si je calcule x prime sur t prime, si je fais x prime sur t prime j'aurai ce terme divisé par celui-là si je divise par t, j'ai un x sur t qui apparaît et ça je vais l'appeler u. x sur t, c'est la vitesse dans le référentiel non primé et x prime sur t prime, c'est la vitesse dans le référentiel primé et j'ai donc cette relation-là. Maintenant je divise par A il me reste u ici, B sur A c'est moins v, ici j'ai C sur A et D sur A ça ça vaut 1. J'ai donc ceci et maintenant j'applique cette règle au cas de la vitesse de la lumière. Je dis donc que ici je dois avoir C et ici je dois aussi avoir C et là aussi. Je me retrouve avec cette équation-là avec un petit peu d'algèbre on arrive au résultat que C vaut moins A fois v sur c carré. Maintenant on avait obtenu que delta valait 1 or delta vaut AD moins BC. AD ça vaut A carré et puis dans BC, B ça vaut moins v fois A et puis C ça vaut ça.

Notes

Summary

8m 03s

Vitesse de la lumière

$$x' = Ax + Bt \qquad\qquad u' = \frac{Au+B}{Cu+D} = \frac{u-v}{u\,C/A+1}$$
$$t' = Cx + Dt$$

En particulier pour la vitesse de la lumière :

$$c = \frac{c-v}{c\,C/A+1} \implies C = -A\frac{v}{c^2}$$

$$\Delta = 1 \implies \quad \Delta = AD - BC = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)A^2 = 1 \implies A = \pm\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Transformation de Lorentz obtenue par des arguments de nature mécanique.

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ y' &= y \qquad\qquad z' = z \\ t' &= \frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{aligned}}$$

Quand on substitue C là-dedans, il nous reste ceci : on a une relation pour A et on en déduit que A vaut 1sur racine carrée de 1 moins v carré sur c carré, et voilà ce terme qu'on retrouve partout, en relativité, qui nous apparaît, ici. On a donc, A qui vaut D. A nous donne C, ici, et on a une relation, aussi, entre B et A. On a donc, A, B, C, et D qui sont obtenues, et donc, par des raisonnements de type mécanique, on arrive aux transformations de Lorentz. C'est un très joli résultat. Je reprend la compositon des vitesses, pour insister sur ce point-là de la cinématique.

Notes

Summary

9m 46s

Loi de composition des vitesses

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

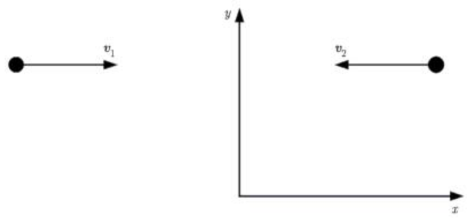
$$\longrightarrow \quad v_{x'} = \frac{v_x - v}{1 - v \cdot v_x/c^2}$$

Une particule se déplace à la vitesse de la lumière

$$v_x = c$$

$$v_{x'} = \frac{c - v}{1 - v/c} = c$$

Deux particules de vitesses égales et opposées



On a donc, les transformations de Lorentz; quand je fais x prime, sur t prime, j'ai v x prime. J'ai le rapport de ces deux numérateurs, x sur t, j'appelle ça v de x, et donc, voilà la formule pour la composition des vitesses. Si on n'avait pas, dans la ré, mécanique classique, on avait cette loi-là, et on a donc, une modification avec ce terme, comme ceci. La cinématique a donc profondément changé. Si maintenant, je, j'insiste. Si on prend pour la vitesse v x, la vitesse de la lumière, on doit avoir, avec c, ici, et c, là, on a cette formule-là, et tout ça, ça simplifie pour donner c. On a donc bien, la vitesse qui reste c, si elle est c dans un référentiel. Donc, tous les référentiels en translation uniforme, elle reste c. Je vous propose un autre petit problème. Vous avez deux particules qui viennent l'une contre l'autre, vues dans le référentiel x et y, ici, et la question que je pose maintenant, c'est dans le référentiel lié à cette particule, donc, dans le référentiel où cette particule est au repos, quelle est la vitesse de la deuxième particule? Je vous invite à faire une pause, et essayer d'y répondre en appliquant cette formule.

Notes

Summary

10m 37s

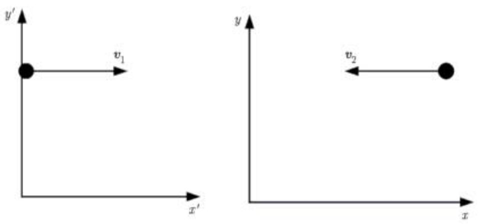
Loi de composition des vitesses

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \longrightarrow v_{x'} = \frac{v_x - v}{1 - v \cdot v_x/c^2}$$

Une particule se déplace à la vitesse de la lumière

$$v_x = c$$
$$v_{x'} = \frac{c - v}{1 - v/c} = c$$

Deux particules de vitesses égales et opposées



$|v_1| = |v_2| = 0.9\,c$

$$v_2' = \frac{v_2 - v_1}{1 - v_2 v_1/c^2} = \frac{-0.9\,c - 0.9\,c}{1 + (0.9)^2} = -0.99\,c$$

Mécanique | 2013 55

Et bien, si je définis mon système, mon deuxième référentiel comme x prime et y prime, qui se déplace à la vitesse v un, par rapport à celui-ci, l'application de la formule me donne ceci. La vitesse v deux, par rapport à x prime, y prime, v deux prime, j'applique cette formule. J'ai v deux moins le v, c'est v un, et j'ai v deux, v un, sur c carré au dénominateur. Si maintenant, c'est ce que j'ai fait, ici, je regarde le cas, où v un et v deux, valent zéro virgule neuf fois c, on voit que vu du référentiel, où une particule est au repos, l'autre arrive avec une vitesse zéro virgule neuf, neuf, fois c. Je passe, maintenant, à la définition de l'intervalle espace-temps.

Notes

Summary

12m 15s

Définition : intervalle espace-temps

Un événement est donné par quatre coordonnées : (ct, x, y, z)

Evénement A : (ct_A, x_A, y_A, z_A)

Evénement B : (ct_B, x_B, y_B, z_B)

Distance spatiale : $\Delta_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$

Intervalle de genre temps : $\Delta_{AB} < c|t_A - t_B|$

Mesure de l'intervalle : $\tau_{AB} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\,(t_A - t_B)^2 - \Delta_{AB}^2}$

Intervalle de genre espace : $\Delta_{AB} > c|t_A - t_B|$

Mesure de l'intervalle : $d_{AB} = \sqrt{\Delta_{AB}^2 - c^2(t_A - t_B)^2}$

Comme on a une coordonnée temps associée au référentiel, il est commode de définir ce que Einstein avait appelé des évènements, et un évènement est caractérisé par quatre coordonnées : une coordonnée temps et trois coordonnées d'espace. Si on veut que ici, on ait des coordonnées qui ont toutes les mêmes unités, il suffit de multiplier le temps par c. Considérons maintenant, deux évènements. Vous voyez que vous avez deux évènements donnés par quatre coordonnées : une coordonnée temps, trois coordonnées espace, pour des évènements appelés A et B. Alors, d'abord, on peut définir la distance spatiale que j'ai notée delta A B. C'est donc la distance au sens Euclidien entre A et B, et si maintenant, j'ai une distance entre A et B qui est plus petite que la distance parcourue par la lumière pendant la durée t A moins t B, alors, on va définir une mesure de l'intervalle tau A B, comme ceci, avec ce terme-là qui est positif. Donc, la racine est réelle. Ceci, on appelle la mesure de l'intervalle pour les évènements A et B. Si maintenant, on a une distance spatiale delta A B qui est plus grande que la distance parcourue par la lumière, pour la durée t A moins t B, alors, on a une mesure de l'intervalle qu'on va donner en calculant delta carré A B moins c carré fois deux delta t au carré, là aussi, qui est réelle.

Notes

Summary

13m 20s

Propriété : invariance de l'intervalle espace-temps

L'intervalle d'espace-temps,
autrement dit les grandeurs τ_{AB} ou d_{AB}
possèdent des valeurs qui sont indépendantes du référentiel choisi

" invariants relativistes "

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \tau_{AB} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\,(t_A - t_B)^2 - \Delta_{AB}^2}$$

$$y' = y \qquad z' = z$$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \tau_{AB} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\,(t'_A - t'_B)^2 - (\Delta'_{AB})^2}$$

Mécanique | 2013 70

Pourquoi on définit cette mesure de l'intervalle? Parce qu'elle a une propriété bien particulière et très utile. L'intervalle d'espace-temps, que ce soit tau A B, ou d A B, est indépendant du choix de référentiel. C'est un, ce qu'on appelle un invariant relativiste. Pour le montrer, il faut faire le calcul suivant. Vous avez les relations de la transformation de Lorentz. Vous, si vous définissez tau A B, comme ceci, ce que je suis en train de dire, c'est que vous pouvez calculer tau A B, avec les coordonnées dans le référentiel primé. Vous mettez t prime, les t prime, conformément à ce, à la transformation de Lorentz, et vous allez tomber sur le tau A B. C'est beaucoup d'algèbre, euh, et on n'apprendra pas grand chose à faire ce calcul-là, mais il peut être fait, et on obtient l'invariance de la mesure de l'intervalle, quelque chose qui est très utile quand on doit faire une analyse de la cinématique relativiste d'un phénomène.

Notes

Summary

15m 13s