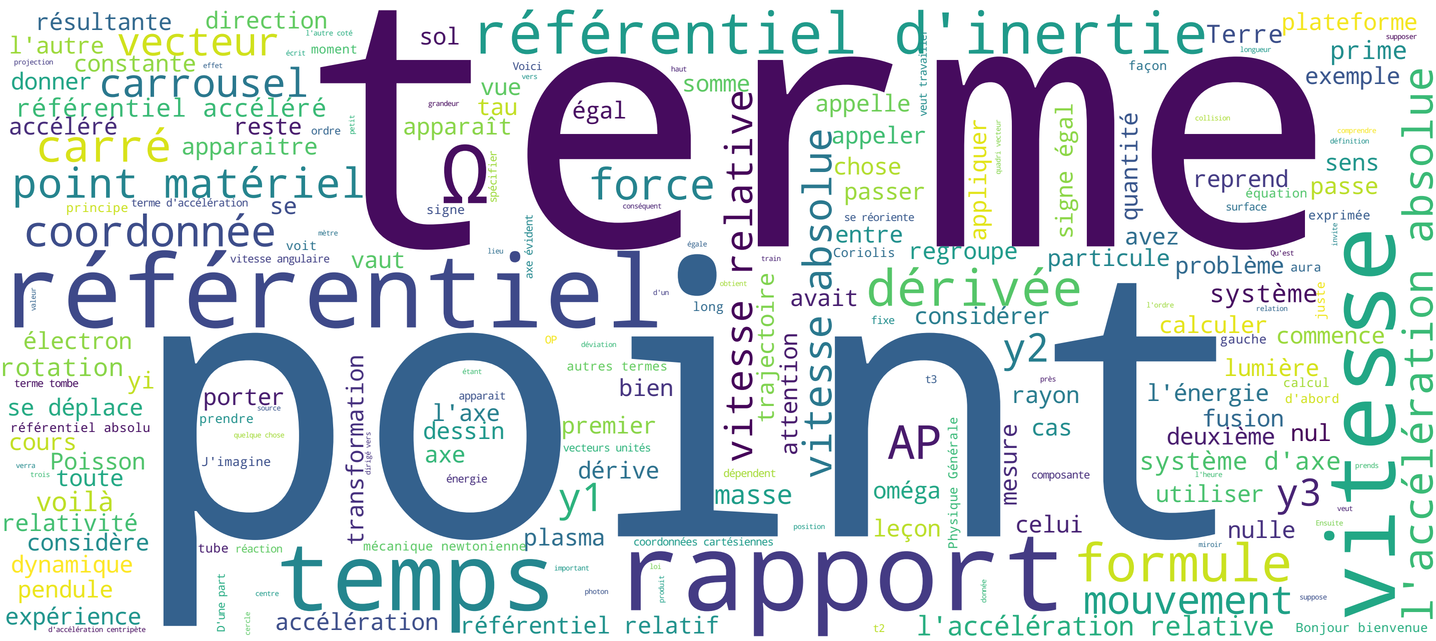
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

http://go.epfl.ch/traite-meca-1-15

Référentiels accélérés

Mécanique, cours 15.1

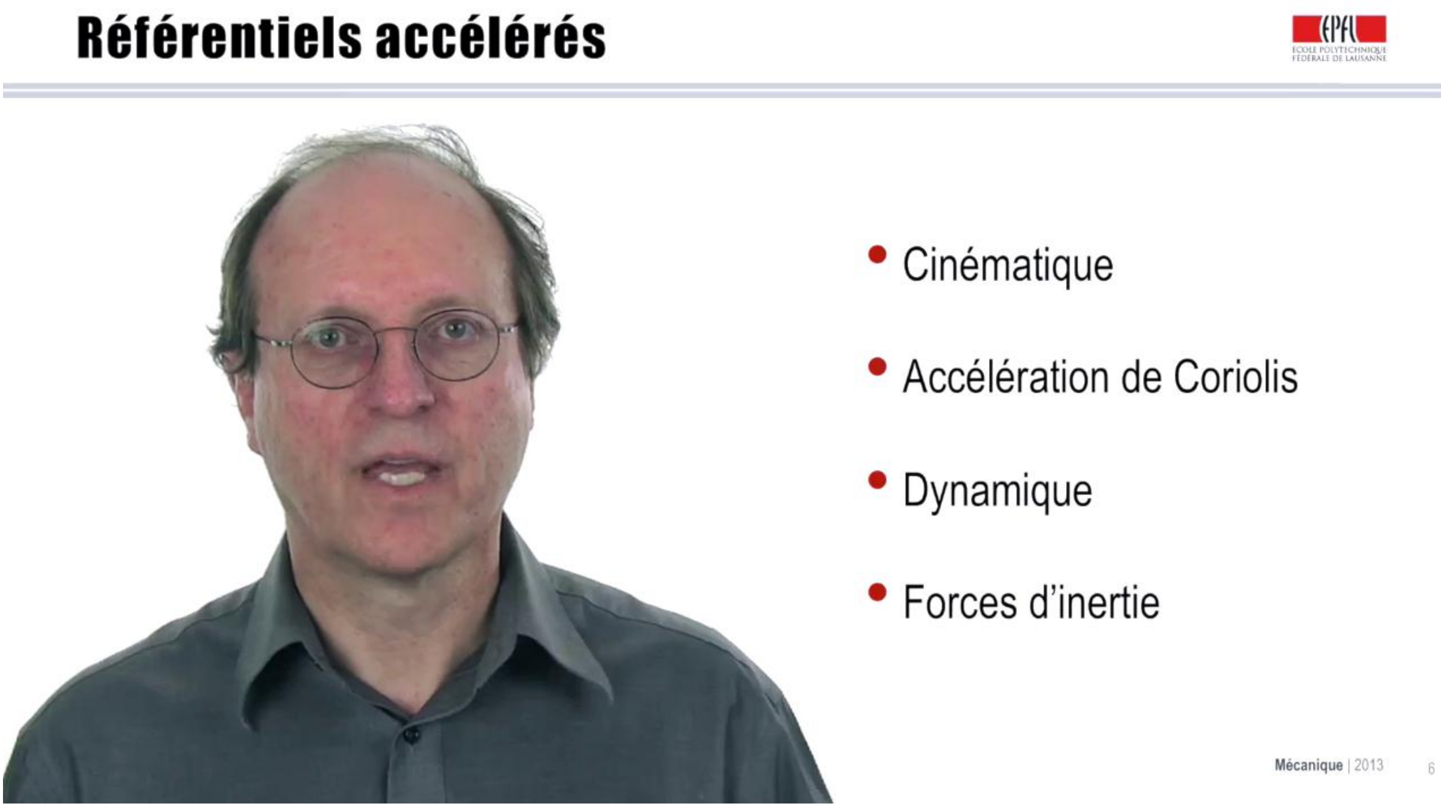
Jean-Philippe Ansermet



Search MOOC

Video

EPFL



Bonjour, bienvenue au cours de Physique Générale de l'ÉPFL. Dans cette leçon on va voir comment appliquer la mécanique newtonienne du point matériel lorsqu'on veut travailler avec un référentiel qui est accéléré par rapport à un référentiel d'inertie. Dans un premier temps, on va voir comment exprimer la cinématique en faisant référence explicitement aux vitesses ou accélérations par rapport à ce référentiel accéléré et comment on obtient les vitesses et les accélérations par rapport au référentiel d'inertie. Dans ce travail, on va faire apparaitre la fameuse accélération de Coriolis. Ensuite, on verra comment conduire une analyse de la dynamique du système, en utilisant le référentiel accéléré et ceci nous conduira à introduire des forces d'inertie.

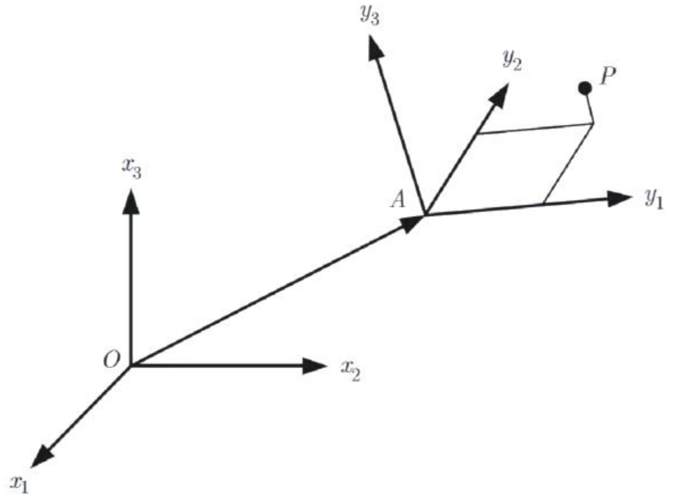
Notes

Summary

0m 04s

Référentiels 'absolu' et 'relatif'

Equation horaire $\boldsymbol{OA}(t)$



Je commence avec ma définition des référentiels. Comme je veux travailler avec un référentiel d'inertie et un autre qui peut être accéléré par rapport à ce référentiel d'inertie, par commodité de langage, je vais considérer que j'ai un référentiel absolu, c'est le référentiel d'inertie, et un référentiel relatif à l'autre, qui est donc le référentiel accéléré. Voici un dessin qui schématise la situation. D'une part, on a un référentiel d'inertie, centré, matérialisé par un système d'axes de coordonnées, centré en haut, et je donne les coordonnées *x1*, *x2*, *x3*, pour le référentiel d'inertie. Et maintenant, je suppose que je m'intéresse à un autre référentiel, accéléré par rapport au premier, que je matérialise par un système d'axes *Ay1*, *y2*, *y3*. Ça, c'est mon référentiel relatif, ou, donc, accéléré par rapport au référentiel d'inertie. Maintenant, je dois spécifier comment ce référentiel-là se déplace par rapport au premier. Alors, d'une part je vais donner l'équation horaire du point *A*. D'autre part, je dois spécifier comment ce système d'axes évolue dans le temps, comment il se réoriente dans le temps.

Notes

Summary

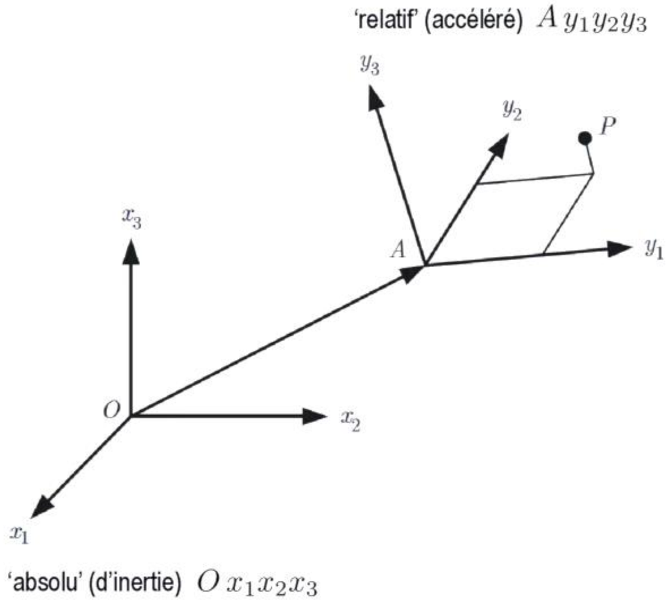
1m 05s

Référentiels ‘absolu’ et ‘relatif’

Equation horaire $\boldsymbol{OA}(t)$

Repère : $(A, \hat{\boldsymbol{y}}_1\hat{\boldsymbol{y}}_2\hat{\boldsymbol{y}}_3)$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{y}}_i}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \hat{\boldsymbol{y}}_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$



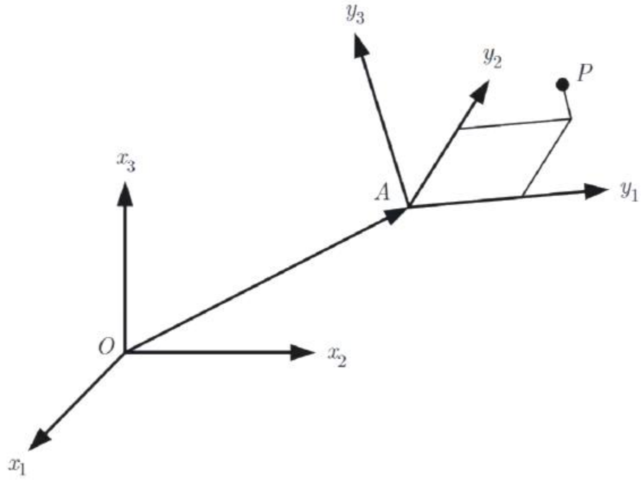
Mécanique | 2013 14

Pour ce faire, je vais me donner des vecteurs unités le long des axes, ***y1***, ***y2***, ***y3***, et je vais appliquer, voilà mon repère, et je vais appliquer les formules de Poisson avec ici un vecteur ***Ω*** qui caractérise comment ce repère, pardon, comment ce référentiel, c'est très important de ne pas se tromper, comment le référentiel *Ay1*, *y2*, *y3* se réoriente par rapport à notre référentiel d'inertie. Dans la pratique on va considérer des choses comme un carrousel, ou le mouvement de la dynamique à la surface de la Terre, donc la Terre tourne autour de son axe, on aura donc un axe évident, pour le carrousel aussi, on a un axe évident, donc la direction du ***Ω*** sera immédiatement discernable dans le problème.

Notes

Summary

2m 45s



$$\boldsymbol{AP} = \sum_i y_i \hat{\boldsymbol{y}}_i$$

$$\boldsymbol{v}_r(P) = \sum_i \dot{y}_i \, \hat{\boldsymbol{y}}_i$$

$$\boldsymbol{a}_r(P) = \sum_i \ddot{y}_i \, \hat{\boldsymbol{y}}_i$$

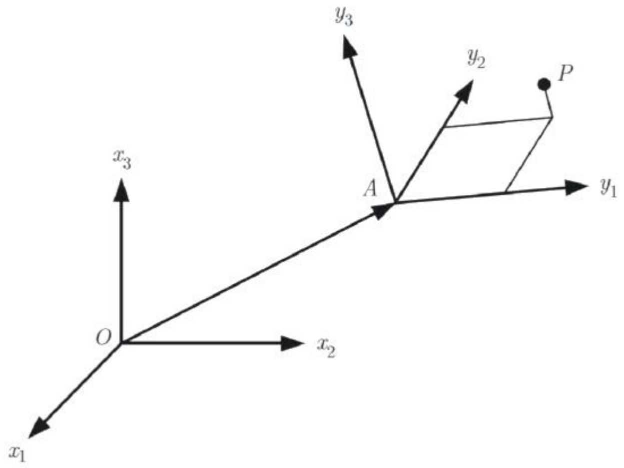
Maintenant, je veux définir ce que je vais appeler les vitesses et les accélérations relatives, c'est-à-dire relatives au référentiel *Ay1*, *y2*, *y3*. Pour ce faire je vais repérer la position du point *P* par rapport à ce référentiel. Je vais utiliser les coordonnées cartésiennes, *yi*. Et donc ici j'ai écrit la projection du vecteur ***AP*** sur le repère porté par mon système d'axes cartésiens. Si maintenant je dérive seulement la coordonnée cartésienne par rapport au temps, j'ai la vitesse du point *P*, mesurée par rapport à *Ay1*, *y2*, *y3*. Donc je vais appeler **v***r*, le *r* ici fait référence au référentiel relatif, donc ce référentiel-là. **v***r* de *P* c'est donc la somme des dérivées par rapport au temps des coordonnées du point *P* fois les vecteurs unités portés par mon système d'axes de coordonnées. Pour l'accélération, bien sûr, c'est la même chose, il suffit de faire une dérivée double par rapport au temps des coordonnées cartésiennes du point *P*. Donc voilà, on a maintenant la vitesse relative et l'accélération relative du point *P*.

Notes

Summary

3m 53s

Vitesse absolue



$$\boldsymbol{v}_a(P) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{OP} \qquad \boldsymbol{OP} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{AP}$$

$$\boldsymbol{v}_a(P) = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{OA}) + \frac{d}{dt}(\boldsymbol{AP}) = \boldsymbol{v}_a(A) + \frac{d}{dt}\left(\sum_i y_i \hat{\boldsymbol{y}}_i\right)$$

$$= \boldsymbol{v}_a(A) + \sum_i \dot{y}_i \hat{\boldsymbol{y}}_i + \sum_i y_i \dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_i$$

$$= \boldsymbol{v}_a(A) + \boldsymbol{v}_r(P) + \sum_i y_i (\boldsymbol{\Omega} \wedge \hat{\boldsymbol{y}}_i)$$

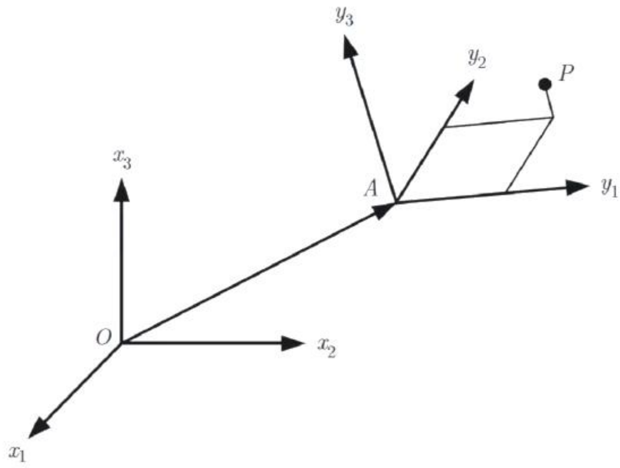
Je passe maintenant au calcul de la vitesse absolue. Je reprends mon système avec mes deux référentiels, j'ai le point *O* du référentiel d'inertie et le point *P*, ici, la vitesse absolue, c'est la vitesse du point P par rapport à ce référentiel-là. Donc on doit calculer la dérivée par rapport au temps de ***OP***. Ceci on va l'appeler la vitesse absolue du point *P*. On va utiliser cette décomposition du vecteur ***OP*** parce que ***OA*** est une donnée du problème, et donc, quand je calcule explicitement la dérivée, j'ai ce terme-là, qui n'est rien d'autre que la vitesse par rapport au référentiel d'inertie, donc c'est une vitesse absolue du point *A*. Ici j'ai la dérivée par rapport au temps du vecteur ***AP***, je dois faire attention, parce que maintenant, ***AP*** étant écrit de cette manière-là, j'ai deux termes qui vont apparaitre. Si je fais la dérivée de la coordonnée par rapport au temps, j'ai ce terme-là, et celui-là on l'a déjà identifié comme étant la vitesse relative du point P. Et maintenant, ce terme-là, je peux l'expliciter avec les formules de Poisson, comme ceci.

Notes

Summary

5m 28s

Vitesse absolue



$$\boldsymbol{v}_a(P) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{OP} \qquad \boldsymbol{OP} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{AP}$$

$$\boldsymbol{v}_a(P) = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{OA}) + \frac{d}{dt}(\boldsymbol{AP}) = \boldsymbol{v}_a(A) + \frac{d}{dt}\left(\sum_i y_i \hat{\boldsymbol{y}}_i\right)$$

$$= \boldsymbol{v}_a(A) + \sum_i \dot{y}_i \hat{\boldsymbol{y}}_i + \sum_i y_i \dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_i$$

$$= \boldsymbol{v}_a(A) + \boldsymbol{v}_r(P) + \sum_i y_i (\boldsymbol{\Omega} \wedge \hat{\boldsymbol{y}}_i)$$

$$\boldsymbol{v}_a(P) = \boldsymbol{v}_a(A) + \boldsymbol{v}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AP}$$

Mécanique | 2013 24

Maintenant je peux prendre ces termes-là, et les regrouper avec les autres termes qui dépendent de *i*, et j'ai donc une somme sur *i* des *yi*, ***yi** chapeau*, et ça, ce terme-là, c'est le vecteur ***AP***. Donc j'ai un ***Ω*** ^ ***AP***. Voilà, on a trouvé la vitesse absolue du point *P*, exprimée en terme de la vitesse du point *A*, ce point *A*, la vitesse relative du point *P*, la vitesse du point *P* vue dans ce système-là. Et on a ce terme de rotation ***Ω*** ^ ***AP*** qui apparaît.

Notes

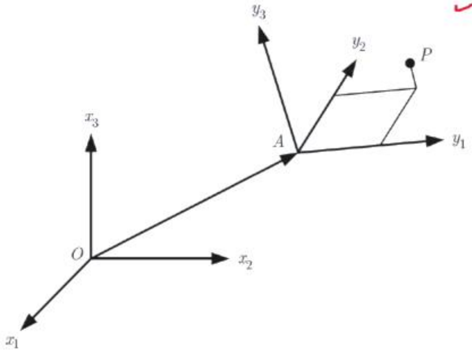
Summary

7m 08s

Accélération absolue

$$\boldsymbol{v}_a(P) = \boldsymbol{v}_a(A) + \boldsymbol{v}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AP}$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_a(P)}_{\vec{a}_a(P)} = \underbrace{\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_a(A)}_{\vec{a}_a(A)} + \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_r(P) + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AP} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \frac{d}{dt}\boldsymbol{AP}$$



Je passe maintenant à l'accélération absolue. Je reprends mon schéma avec mes deux référentiels, je reprends la formule pour l'accélération absolue du point *P*. Si on prend la vitesse absolue du point *P* et on la dérive par rapport au temps, on va obtenir l'accélération absolue du point *P*, comme ceci. Ça, c'est bien l'accélération absolue du point *P*, un vecteur. Ici, la dérivée, la vitesse absolue du point *A*, ça fait l'accélération absolue du point *A*. Ici, le ***vr*** de *P*, vous vous souvenez qu'il y a deux termes, donc il faudra faire attention. Après il faut dériver ce terme par rapport au temps. Je fais porter une fois la dérivée sur le ***Ω*** et une fois sur le ***AP***.

Notes

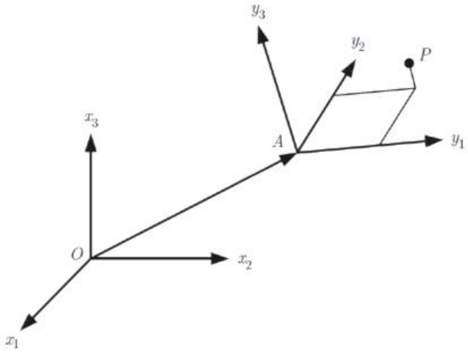
Summary

7m 57s

Accélération absolue

$$\boldsymbol{v}_a(P) = \boldsymbol{v}_a(A) + \boldsymbol{v}_r(P) + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{AP}$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_a(P) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_a(A) + \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_r(P) + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{AP} + \boldsymbol{\Omega}\wedge\frac{d}{dt}\boldsymbol{AP}$$



$$\boldsymbol{a}_a(P) = \boldsymbol{a}_a(A) + \frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{y}_i\hat{\boldsymbol{y}}_i\right) + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\wedge\boldsymbol{AP} + \boldsymbol{\Omega}\wedge\frac{d}{dt}\left(\sum_i y_i\hat{\boldsymbol{y}}_i\right)$$

$$\sum_i \dot{y}_i\boldsymbol{\Omega}\wedge\hat{\boldsymbol{y}}_i = \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{v}_r$$

$$\boldsymbol{v}_r$$

$$\boldsymbol{a}_r$$

$$\boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{AP})$$

$$\boldsymbol{a}_a(P) = \boldsymbol{a}_a(A) + \boldsymbol{a}_r(P) + 2\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{v}_r(P) + \boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{AP}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\wedge\boldsymbol{AP}$$

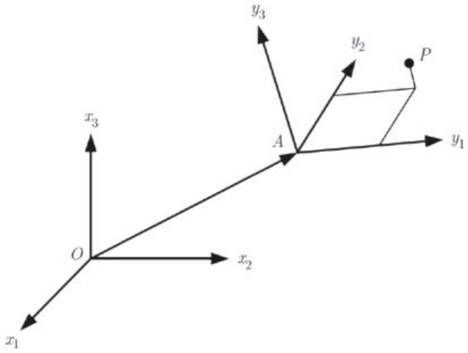
Ici, on a une dérivée par rapport au temps de cette somme. Il y aura deux termes qui apparaissent, et là, encore une fois. Quand on fait porter la dérivée sur le vecteur ***yi***, on a la formule de Poisson, on regroupe les termes comme tout à l'heure et on a ***Ω*** ^ ***vr*** qui apparaît. Quand maintenant, je fais porter la dérivée, ici, sur les ***yi***, j'ai ***vr*** qui apparait. J'ai donc un ***Ω*** ^ ***vr***, un deuxième qui apparait ici. Maintenant, si je fais apparaitre la dérivée des ***yi***, les vecteurs par rapport au temps, j'ai formule de Poisson, et je regroupe les termes, j'ai un ***Ω*** ^ ***AP***, donc j'ai ***Ω*** ^ (***Ω*** ^ ***AP***). Il reste un terme. Quand je dérive cette coordonnée-là par rapport au temps, on l'avait vu, on obtient l'accélération relative du point *P*. Je regroupe tous les termes et voilà ma formule, c'est la formule la plus longue de ce cours de mécanique.

Notes

Summary

8m 56s

Accélération absolue



$$\boldsymbol{v}_a(P) = \boldsymbol{v}_a(A) + \boldsymbol{v}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AP}$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_a(P) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_a(A) + \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_r(P) + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AP} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \frac{d}{dt}\boldsymbol{AP}$$

$$\boldsymbol{a}_a(P) = \boldsymbol{a}_a(A) + \frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{y}_i \hat{\boldsymbol{y}}_i\right) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{AP} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \frac{d}{dt}\left(\sum_i y_i \hat{\boldsymbol{y}}_i\right)$$

$$\boldsymbol{v}_r$$

$$\sum_i \dot{y}_i \boldsymbol{\Omega} \wedge \hat{\boldsymbol{y}}_i = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_r$$

$$\boldsymbol{a}_r \qquad \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AP})$$

$$\boldsymbol{a}_a(P) = \boldsymbol{a}_a(A) + \boldsymbol{a}_r(P) + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AP}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{AP}$$

Mécanique | 2013 32

L'accélération absolue du point *P*, exprimée avec l'accélération absolue du point *A*, l'accélération relative du point *P*, l'accélération de ce point *P*, vue dans ce référentiel-là, et des termes qui dépendent de la vitesse relative du point *P*, donc la vitesse dans le référentiel *Ay1*, *y2*, *y3*, et on a encore des termes de rotation ici. On a tous ces termes-là.

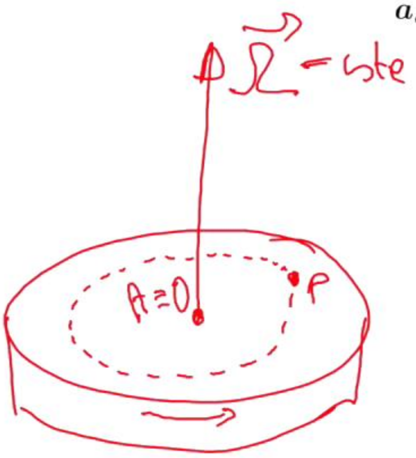
Notes

Summary

10m 10s

Définition : accélération de Coriolis

$$\boldsymbol{a}_a(P) = \cancel{\boldsymbol{a}_g(A)} + \cancel{\boldsymbol{a}_r(P)} + 2\boldsymbol{\Omega}\wedge\cancel{\boldsymbol{v}_r(P)} + \underline{\boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{AP})} + \cancel{\dot{\boldsymbol{\Omega}}\wedge\boldsymbol{AP}}$$



Accélération de Coriolis

Accélération centripète

Je réécris cette formule, et maintenant ce terme-là est connu comme étant l'accélération de Coriolis, et ce terme-là s'appelle l'accélération centripète. Il est possible de comprendre le sens physique de ces termes en regardant un petit exemple. Je vous propose d'imaginer la situation suivante : on considère un carrousel comme ceci, une plateforme qui tourne avec une vitesse angulaire constante, voilà mon $\boldsymbol{\Omega}$, donc la plateforme tourne comme ceci. J'imagine maintenant un point matériel P qui est fixe sur la plateforme. Et je prends pour A, confondu avec O, un point sur l'axe de rotation. Donc ce terme-là est nul, le point P ne bouge pas sur la plateforme, ce terme est nul aussi, la vitesse relative est nulle, ce terme tombe aussi. Je vais supposer que $\boldsymbol{\Omega}$ est une constante, ce terme tombe. Il ne me reste plus que celui-là, et ce terme-là a l'allure d'un terme d'accélération centripète, ce qui est bien le cas, parce que dans le référentiel du sol, donc dans le référentiel absolu, mon point matériel décrit un cercle, si P est fixe sur le carrousel, et le carrousel tourne. Voilà l'origine du terme d'accélération centripète.

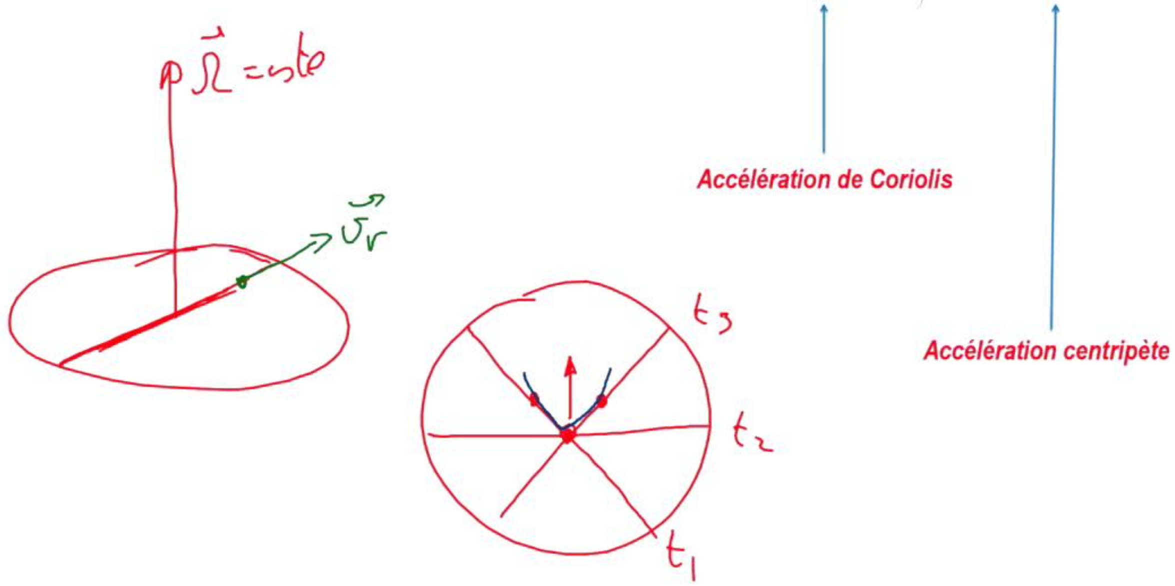
Notes

Summary

10m 43s

Définition : accélération de Coriolis

$$\boldsymbol{a}_a(P) = \boldsymbol{a}_a(A) + \boldsymbol{a}_r(P) + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AP}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{AP}$$



Mécanique | 2013 35

Si maintenant je considère encore une fois un carrousel, une vitesse ***Ω*** constante, mais cette fois-ci, j'imagine un point matériel qui se déplace à vitesse constante sur une ligne peinte sur le carrousel, donc le ***v*** de *r*, mon point matériel va être ici, et mon ***v*** de *r* est comme ceci. Cette vitesse-là, c'est la vitesse par rapport au carrousel. Maintenant si je fais un dessin vu d'au-dessus du carrousel, de cette ligne que j'ai dessinée ici, je la dessine en trois instants, un, deux, trois, les instants *t1*, *t2* et *t3*, que j'ai choisis pour que le point matériel soit juste avant de passer sur l'axe. À *t2* il est sur l'axe et à *t3* il est juste après. Qu'est-ce que j'observe? J'observe que ma trajectoire dans le référentiel d'inertie, dans le référentiel du sol, ma trajectoire est incurvée comme ceci. Par conséquent il y a une composante de l'accélération, comme ceci, j'ai une déviation vers la gauche et j'ai une composante d'accélération qui est vers la gauche, or, ce ***Ω*** ^ ***v****r*, ***Ω*** ^ ***v****r* avec la main droite, vient diriger dans ce sens-là, donc c'est ce terme-là. Voici une façon de visualiser pourquoi on doit avoir ce terme de Coriolis. Passons maintenant à la dynamique.

Notes

Summary

12m 28s

Dans le référentiel d'inertie $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_a(P)$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_a(A) + m\boldsymbol{a}_r(P) + m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{AP} + m\boldsymbol{\Omega} \wedge \left(\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AP}\right) + 2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_r(\boldsymbol{P})$$

$$m\boldsymbol{a}_r(P) = \underline{\boldsymbol{F}_{effectif}}$$

Alors, la deuxième loi de Newton nous dit, pour un point matériel, la résultante des forces est égale à la masse fois l'accélération, l'accélération mesurée dans un référentiel d'inertie. Avec notre nouveau vocabulaire, on doit écrire ici $\boldsymbol{F}$, la résultante des forces, et ici, on met masse fois l'accélération absolue du point P, accélération mesurée dans le référentiel d'inertie. Si on applique notre grande formule, voilà tous les termes qu'on a, avec l'accélération relative, ici, la vitesse relative, là, et tous les autres termes. Maintenant, si on est attachés à faire de la mécanique newtonienne en considérant qu'on veut travailler uniquement en pensant à notre référentiel, qui est un référentiel accéléré, on veut écrire quelque chose comme ceci avec l'accélération relative à ce référentiel. Dans ce cas-là, il faut faire la chose suivante, il faut faire passer tous ces termes-là de l'autre coté du signe égal, et ça donne ceci.

Notes

Summary

14m 21s

Dans le référentiel d'inertie $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_a(P)$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_a(A) + m\boldsymbol{a}_r(P) + m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{AP} + m\boldsymbol{\Omega} \wedge \left(\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AP}\right) + 2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_r(\boldsymbol{P})$$

$$m\boldsymbol{a}_r(P) = \boldsymbol{F}_{effectif}$$

$$m\boldsymbol{a}_r(P) = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_a(A) - \underbrace{m\boldsymbol{\Omega} \wedge \left(\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AP}\right)}_{\text{Force centrifuge}} - m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{AP} - \underbrace{2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_r(P)}_{\text{Force de Coriolis}}$$

Vous avez ici masse fois l'accélération relative égal la force, c'est la résultante de toutes les forces qu'on avait avant, et après, il y a tous ces termes qui interviennent, qui ont changé de signe, puisqu'on a passé ces termes de l'autre coté du signe égal. Ce terme-là, à ce moment-là, si $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AP}$ est centripète, dirigé vers le centre, avec le signe moins, il est dirigé vers l'extérieur, c'est ce qu'on appelle la force centrifuge. Et ce terme-là, c'est ce qu'on appelle la force de Coriolis.

Notes

Summary

15m 49s