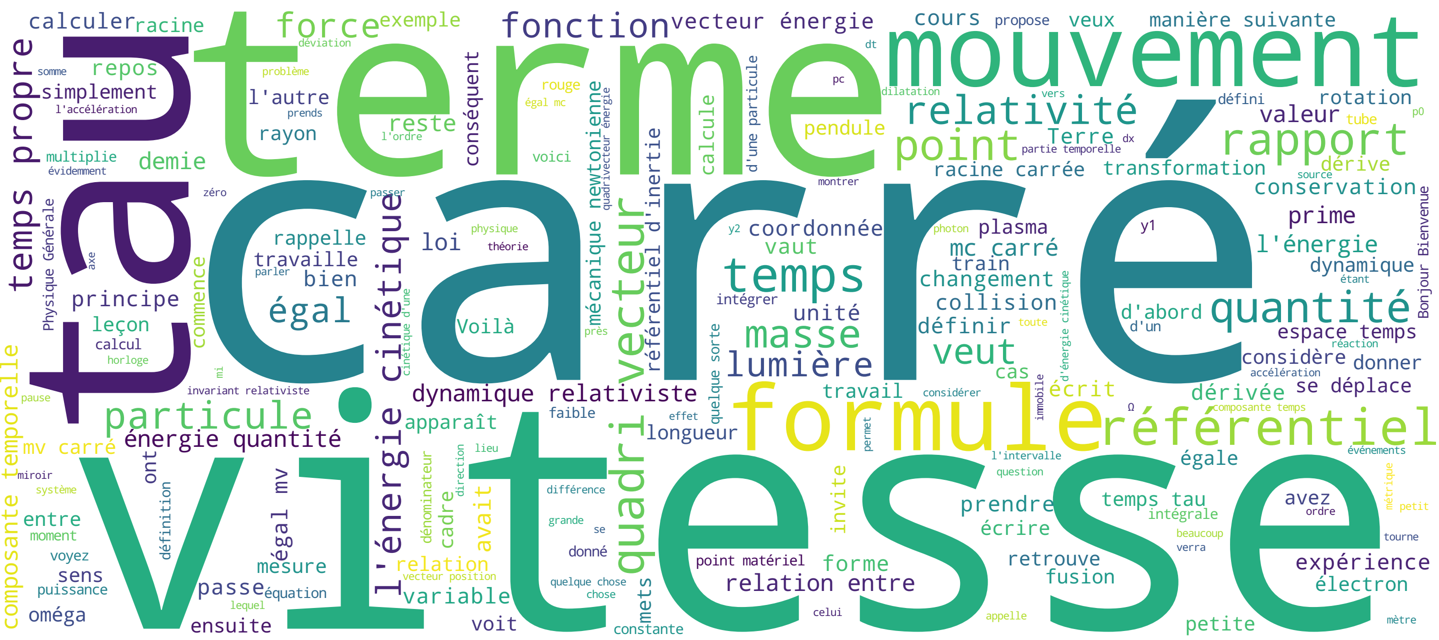
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

http://go.epfl.ch/traite-meca-1-24

# Aperçu de dynamique relativiste

## Mécanique, cours 24.1

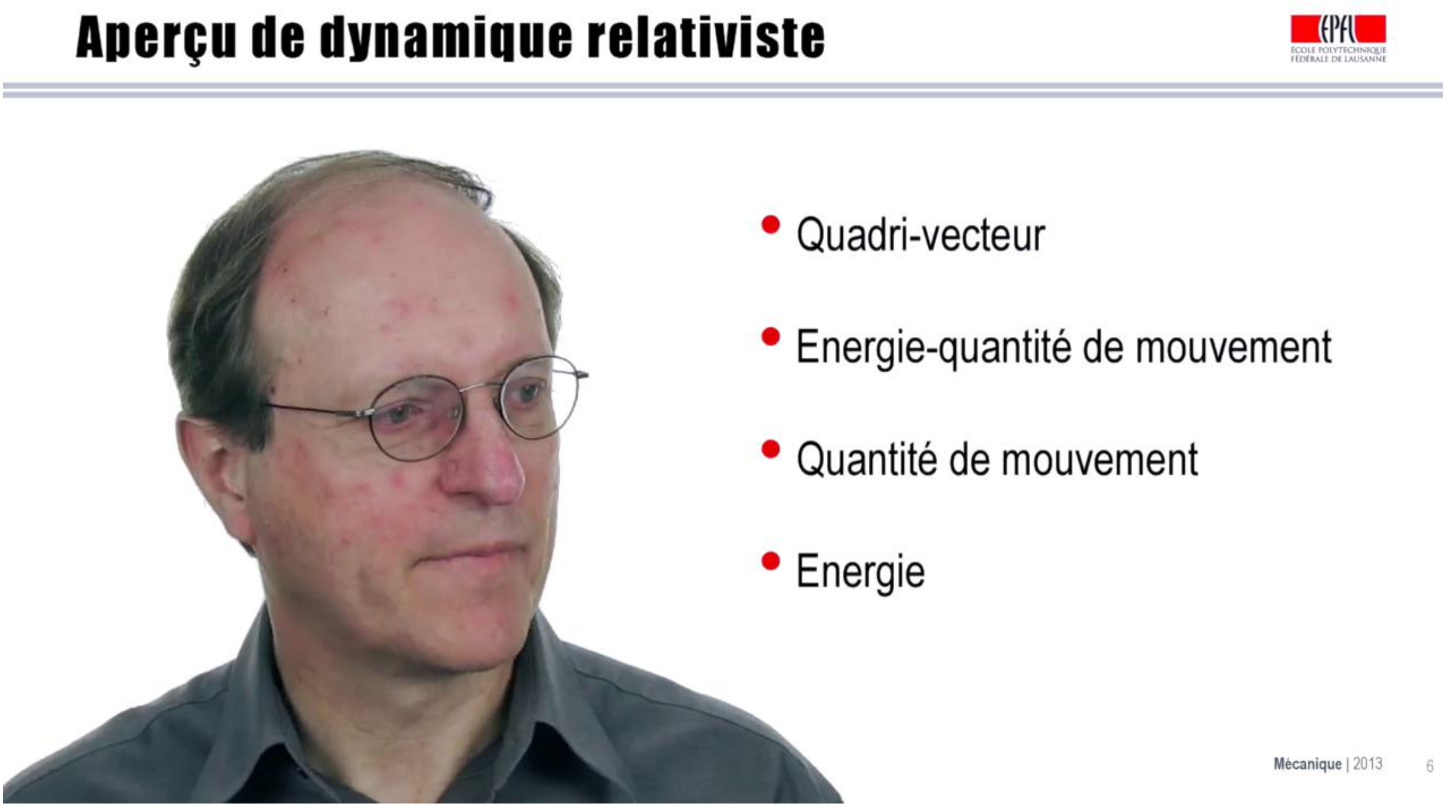
Jean-Philippe Ansermet




Search MOOC

Video

EPFL




Bonjour. Bienvenue au cours de Physique Générale de l'ÉPFL. Dans cette leçon, je vais donner quelques éléments de dynamique relativiste. Je vais commencer par définir un quadri-vecteur dans l'espace temps, on va ensuite voir le quadri-vecteur énergie-quantité de mouvement, On verra ensuite, la relation entre la quantité de mouvement et la vitesse, en dynamique relativiste, et enfin, on parlera de l'énergie, et on verra la fameuse formule E égal mc carré.

Notes

Summary

0m 00s

# Quadri-vecteurs

Vecteur de l'espace-temps :

- une composante temporelle : $ct$
- trois composantes spatiales : $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$
- une métrique : $-c^2t^2 + \boldsymbol{x}^2$

Quadri-vecteur : $(ct, \boldsymbol{x})$

Mécanique | 2013 12

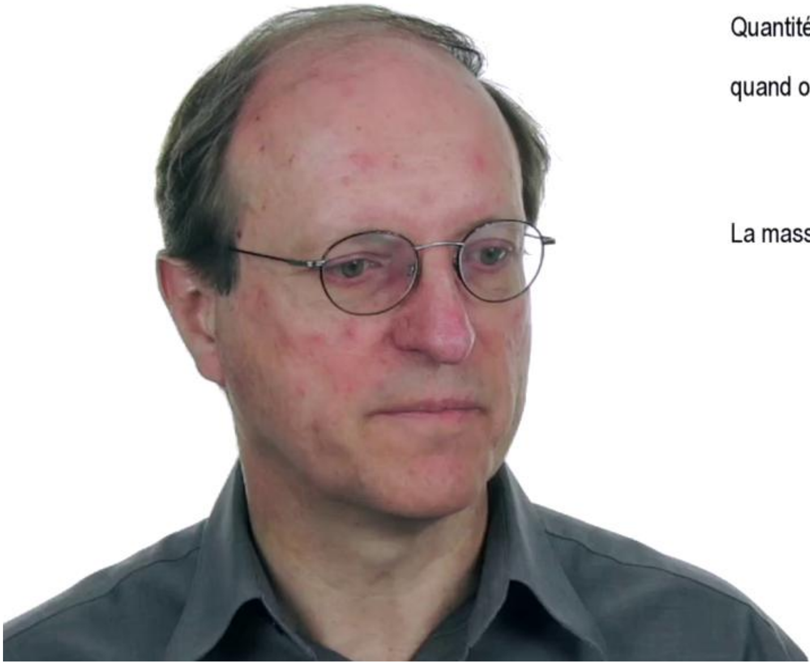
Je commence avec la notion de quadri-vecteur. On a vu que, on devait définir un temps relatif au référentiel, et on a défini des événements. On peut donc d´finir un espace temps avec des points caractérisants des événements, et des vecteurs, donc leur composante temporelle sera mesurée par ct, t étant le temps, ct ayant les unités d'une distance. Et puis on aura les trois composantes spatiales de ce vecteur, qui sont x, y, z. Les composantes habituelles. On va définir une métrique, dans cet espace temps, on va reprendre notre définition de la mesure de l'intervalle, et on va donner à ce vecteur espace temps en quelque sorte ce que l'on pourrait appeler une longueur, où on calcule moins la partie temporelle au carré, plus la partie spatiale au carré. Avec ceci, on a défini un espace dans lequel on travaille avec des quadri-vecteurs de composante temporelle ct, et de composante spatiale x.

Notes

Summary

0m 37s

# Quadri-vecteur énergie-quantité de mouvement



Quantité de mouvement doit prendre la forme $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}$

quand on change de référentiel et que la vitesse devient $<< c$.

$$\boldsymbol{p} = m\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}$$

La masse est une constante physique, un invariant relativiste.

**Mécanique** | 2013 16

Je passe maintenant à la quantité de mouvement ou quadri-vecteur énergie-quantité de mouvement. Ce que je cherche à faire, c'est prendre mon quadri-vecteur, que je viens de définir, et en quelque sorte le dériver par rapport au temps. Je veux le faire de telle manière à ce que ma quantité de mouvement prenne la bonne allure lorsque je travaille à des vitesses faibles. Donc ce qu'on veut, c'est p égal mv, lorsque la vitesse est beaucoup plus faible que la vitesse de la lumière. Maintenant, on veut une forme pour notre quantité de mouvement, qui obéisse au principe de relativité. On veut donc la même forme dans tous les référentiels. Et lorsque ce référentiel est tel que la vitesse est faible, on doit retomber sur l'expression newtonienne p égal mv. Pour ce faire, il faut prendre p égal m, dx sur d tau, où tau représente le temps propre. Je rappelle le temps propre, c'est le temps mesuré avec une horloge, qui est immobile dans le référentiel. Alors, dans cette formule, la masse, c'est une propriété physique qu'on considère comme un invariant relativiste, en se référant au principe de la relativité aussi.

Notes

Summary

1m 53s

# Quadri-vecteur énergie-quantité de mouvement

Quantité de mouvement doit prendre la forme $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$

quand on change de référentiel et que la vitesse devient $<< c$.

$$\boldsymbol{p} = m\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}$$

La masse est une constante physique, un invariant relativiste.

$$p^0 = m\frac{d(ct)}{d\tau} = mc\frac{dt}{d\tau} \qquad t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \text{Quadri-vecteur} \quad (p^0, \boldsymbol{p})$$

Mécanique | 2013 20

On va étendre cette définition maintenant à la composante temporelle du quadri-vecteur énergie quantité de mouvement, on va avoir un p0, qu'on va prendre comme la dérivée par rapport au temps, de la composante temporelle du quadri-vecteur position. Donc on va calculer m fois d de ct, ct c'était la composante temporelle de notre quadri-vecteur position, et on dérive par rapport à tau. On a donc un dt sur d tau qui intervient or, on avait vu la relation qu'on avait appelée la, dilatation du temps, la relation entre le t et le tau. Le temps t, là où l'objet se déplace à une vitesse v, est le temps propre qui est le temps tau. On a donc dt sur d tau qui est donné par 1 sur la racine carrée, on a donc, si je calcule maintenant c fois p 0, 1 mc carré, sur cette racine de1 moins v carré sur c carré. J'ai construit maintenant un quadri-vecteur avec une composante temporelle notée p indice 0, et p la quantité de mouvement. Examinons maintenant la relation entre la quantité de mouvement et la vitesse.

Notes

Summary

3m 18s

# Quantité de mouvement et vitesse

$$\boldsymbol{p} = m\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} \qquad \boldsymbol{p} = m\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\,\frac{dt}{d\tau}$$

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

**Mécanique** | 2013 25

On a cette formule qu'on préconise pour la dynamique relativiste, p égal m, dx sur d tau, où tau étant le temps propre. On peut considérer x comme une fonction de t, et t cpmme une fonction de tau. Encore une fois, on voit la relation entre t et tau, et donc j'arrive à la conclusion que ma formule qui lie la quantité de mouvement et la vitesse est celle qui est indiquée ici, je n'ai donc plus simplement p égal mv, j'ai un mv sur racine de 1 moins v carré sur c carré. On ne devrait pas s'étonner d'avoir une formule différente. Je vous rappelle qu'au début de notre cours sur la mécanique newtonienne on a introduit la quatité de mouvement commeune grandeur extensive qui caractérise le mouvement, et on s'est posé ensuite la question de savoir quelle était la relation entre la quantité de mouvement et la vitesse. On avait fait des expériences, du type collision sur un banc à air, donc à des vitesses très, très inférieures à la vitesse de la lumière, et dans ce cas-là on avait conclu p égal mv. Maintenant on aimerait traiter le cas de particules qui ont une vitesse voisine de celle de la lumière. On ne doit pas s'étonner, changeant ainsi de domaine d'application, que notre formule change.

Notes

Summary

4m 58s

# Quantité de mouvement et vitesse

$$\boldsymbol{p} = m\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} \qquad \boldsymbol{p} = m\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\,\frac{dt}{d\tau}$$

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

**Mécanique** | 2013 25

Certains auteurs veulent attribuer un sens particulier à la formule p égal mv, et donc voyant la formule indiquée ici, ils sont obligés de définir une masse qui dépend de la vitesse. Je ne vois pas pourquoi on le ferait, on est parti dans notre construction de la théorie de la relativité du principe de relativité, qui nous imposait que la masse était un invariant relativiste, je trouverais inutile de parler maintenant d'une masse qui dépendrait de la vitesse.

Notes

Summary

6m 32s

# Energie

$$cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mc^2 + \frac{1}{2} m\, v^2 + \cdots$$

C'est l'énergie cinétique plus un terme :

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$



Passons maintenant à la composante temps de notre quadri-vecteur énergie-quantité de mouvement. On avait cette formule-là pour le cp 0. Maintenant, si je considère une vitesse beaucoup plus petite que la vitesse de la lumière, je peux faire un développement limité, et dire que ceci est égal à 1 moins une demie de v carré sur c carré. Et ça, 1 sur 1 moins x, c'est à peu près égal à 1 plus x, donc j'ai mc carré fois 1 plus une demie de v carré sur c carré. Donc le premier terme c'est mc carré, et le deuxième terme va nous donner une demie de mv carré, comme ceci. On reconnaît dans le une demie de mv carré, l'énergie cinétique d'une particule de masse m et de vitesse v, le terme une demie de mv carré correspond à l'énergie cinétique d'une particule de masse m et de vitesse v, on va donc identifier cp 0 à une énergie, et on va écrire E égal mc carré sur racine de 1 moins v carré sur c carré.

Notes

Summary

7m 09s

$$cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = mc^2 + \frac{1}{2}m\,v^2 + \cdots$$

C'est l'énergie cinétique plus un terme : $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

$$\frac{E}{c^2}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p} \longrightarrow \frac{\boldsymbol{v}}{c} = \frac{\boldsymbol{p}c}{E}$$

$$(p^0, \boldsymbol{p}) \longrightarrow -\left(p^0\right)^2 + \boldsymbol{p}^2 = -\frac{E^2}{c^2} + \boldsymbol{p}^2 = -\frac{m^2c^2}{1-v^2/c^2} + \frac{m^2v^2}{1-v^2/c^2} = -m^2c^2$$

'Condition de masse' : $E = \sqrt{\boldsymbol{p}^2c^2 + m^2c^4}$



On constate que si on divise par c carré cette formule, et on multiplie par v, au lieu de c carré on met un v, on retrouve notre formule de p c'est ce que j'ai écrit ici, et cette formule-là, je vous propose de l'écrire de la manière suivante : vous voyez ici v sur c, qui est sans unité, et pc a bien l'unité d'une énergie, donc pc sur E aussi sans unité, ces deux formules j'ai mis en rouge parce que, quand vous faites de la dynamique relativiste, c'est des formules qu'il vaut mieux savoir par coeur. Notre quadri-vecteur p0, p, on veut maintenant en calculer la norme au sens de la métrique qu'on s'est donnée. Donc on va prendre moins la partie temporelle au carré, plus la partie spaciale au carré. Maintenant, notre E, c'est notre cp0, donc le p0 au carré ça fait E carré sur c carré, ce que j'ai écrit ici, si maintenant pour le E je mets cette valeur-là, ça me donne ce terme, et si je prends ma formule p en fonction de v en relativité, j'ai ce terme-là. Je peux après simplifier la formule. Je mets : moins 1 sur mc carré en évidence, il me reste un 1 ici, et il me reste un v carré sur c carré, qui se simplifie avec le dénominateur, et il ne me reste plus que le terme moins m carré, c carré. J'ai donc une relation entre E, p, et m, qu'on écrit d'habitude de la manière suivante, et qu'on appelle la condition de masse. Voilà l'énergie.

Notes

Summary

8m 33s

# Energie

$$cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = mc^2 + \frac{1}{2}m\,v^2 + \cdots$$

C'est l'énergie cinétique plus un terme : $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

$$\frac{E}{c^2}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p} \longrightarrow \frac{\boldsymbol{v}}{c} = \frac{\boldsymbol{p}c}{E}$$

$$(p^0, \boldsymbol{p}) \longrightarrow -\left(p^0\right)^2 + \boldsymbol{p}^2 = -\frac{E^2}{c^2} + \boldsymbol{p}^2 = -\frac{m^2c^2}{1-v^2/c^2} + \frac{m^2v^2}{1-v^2/c^2} = -m^2c^2$$

'Condition de masse' : $E = \sqrt{\boldsymbol{p}^2c^2 + m^2c^4}$

**Mécanique** | 2013 35

P carré et m carré apparaissent ici Les puissances de c sont déterminées par les unités. Vous voulez vous assurer que ceci soit une énergie au carré et cela aussi. Donc il faut simplement se souvenir que E peut s'exprimer comme une racine carrée, avec un teme en p carré et un terme en m carré. Les c sont immédiats, pas avec la considération d'unité. Voilà 3 formules notées en rouge, parce qu'elles sont importantes lorsqu'on fait de la dynamique relativiste.

Notes

Summary

10m 36s

# Propriété : conservation énergie-q. de mouvement

- **Le quadrivecteur énergie-quantité de mouvement est une grandeur conservée dans un système isolé.**
- En particulier c'est le cas dans une collision.
- Il y a donc conservation de l'énergie définie par la formule relativiste.
- Mais … quand deux particules s'accolent, la masse finale n'est pas égale à la somme des masses initiales !

Mécanique | 2013 40

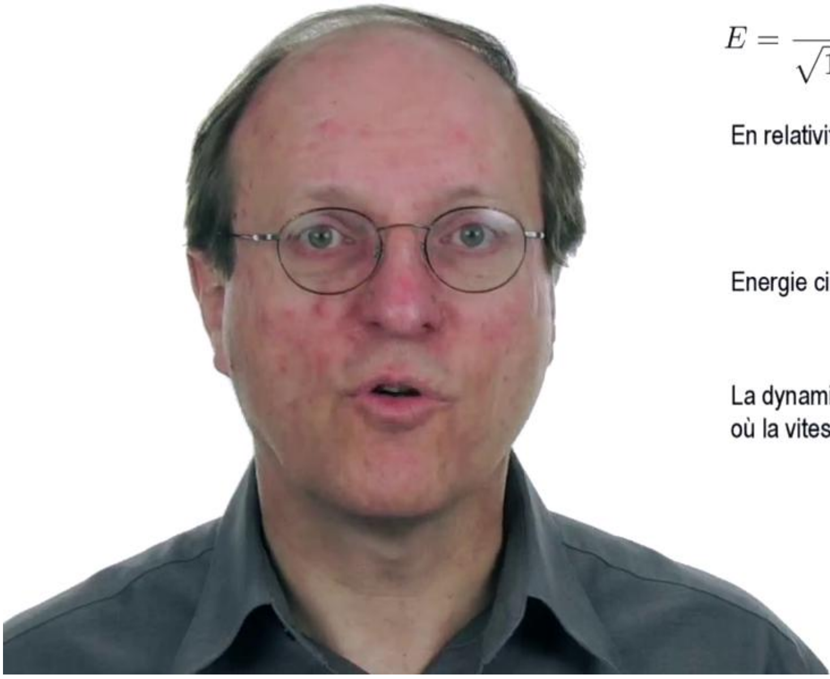
Il y a une propriété extrêmement importante de ce quadrivecteur énergie-quantité de mouvement, la voici. Le quadrivecteur énergie-quantié de mouvement est une grandeur conservée dans un système isolé. Comme l'est la quantité de mouvement dans la mécanique newtonienne. Par conséquent, dans une collision, cette grandeur est conservée. Alors ça, ça a une importance considérable, il y a un changement, ça ressemble à ce qu'on avait dit. Mais là, il y a une composante temps, qui représente l'énergie, et par conséquent, on est en train de dire que dans le cadre de la dynamique relativiste, avec la définition relativiste de l'énergie, on a une conservation de l'énergie. Je rappelle que dans le cadre de la mécanique newtonienne, on avait considéré un cas particulier de collision, qu'on avait appelé les collisions élastiques, dans lesquelles l'énergie était conservée. Ici on a toujours la conservation de l'énergie. Mais, ça veut dire qu'il y a quelque chose qui change, et si vous analysez la collision entre deux particules, qui restent ensemble après la collision, vous devez imposer la conservation de l'énergie, et vous allez voir que vous devez considérer que la masse finale n'est plus égale à la somme des masses initiales. On n'a donc plus la conservation de la masse.

Notes

Summary

11m 08s

# Dynamique



$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

En relativité, l'énergie d'une particule au repos est définie par :

$$E = mc^2$$

Energie cinétique : $$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2$$

La dynamique doit rester celle de Newton quand on utilise un référentiel où la vitesse de la particule est faible.

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau} = \boldsymbol{F}$$

**Mécanique** | 2013 46

Je passe maintenant à la dynamique proprement dite. On a cette formule-là pour l'énergie. Lorsque la particule est au repos, elle a une énergie qui est bien définie, qui vaut sa masse fois c carré, ça c'est la grande nouveauté, et si on veut calculer l'énergie cinétique de la particule, on va prendre l'énergie E, ceci, c'est l'énergie E, et on soustrait l'énergie au repos, on va appeler ça, tout naturellement, l'énergie cinétique. La dynamique : comment est-ce qu'on va avoir une loi de la dynamique? Eh bien, même discours que tout à l'heure. Lorsqu'on est dans un référentiel où la particule est pratiquement au repos, on doit avoir la formule de Newton, correspondant à la deuxième loi. Mais, on doit avoir une forme pour cette loi, qui est indépendante du référenciel. Donc on va encore une fois devoir faire une dérivée par rapport à tau, le temps propre. Voilà, encore une fois, la loi de Newton, modifiée pour la relativité, en ce sens qu'au lieu d'avoir le temps, on a le temps propre qui apparaît ici.

Notes

Summary

12m 40s

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau} = \boldsymbol{F} \qquad \frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau}\boldsymbol{v}d\tau = \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}d\tau$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau}\boldsymbol{v}d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}d\tau = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau}\boldsymbol{v}d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{dp}{dv}\frac{dv}{d\tau}vd\tau = \int_{v_1}^{v_2} \frac{dp}{dv}vdv$$



Je regarde une conséquence de cette loi, c'est le théorème de l'énergie cinétique, qui est toujours valable je veux dire par là, qu'on va, je vais maintenant montrer que le travail des forces est égal au changement d'énergie cinétique de la particule. Je le fais de la manière suivante. Je pars de cette loi de la dynamique. Je multiplie par v d tau, comme ceci. Et maintenant j'intègre entre un temps tau 1 et un temps tau 2. J'observe ici cette intégrale, et je vais faire un changement de variable, je vais passer à la variable d r, en considérant v d tau comme d r. Et donc, je vais intégrer de la valeur r 1 de r à tau 1. La valeur r 2 de r à tau 2. J'ai donc ici le travail de la force F. Maintenant on va développer ce terme-là. Alors d'abord, je vais projeter sur un axe qui porte p et v, donc je vais avoir des grandeurs scalaires ici, et j'ai aussi exprimé le fait que p est une fonction de v, et v est une fonction de tau. Maintenant, je vais faire un changement de variable, j'ai un d v sur d tau fois d tau, qui me permet de faire un changement de variable. Au lieu d'intégrer sur tau, je vais intégrer sur v, et je vais intégrer entre la valeur de v à tau 1 et la valeur de v à tau 2.

Notes

Summary

14m 04s

# Propriété : théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau} = \boldsymbol{F} \qquad \frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau}\boldsymbol{v}d\tau = \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}d\tau$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau}\boldsymbol{v}d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}d\tau = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau}\boldsymbol{v}d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{dp}{dv}\frac{dv}{d\tau}vd\tau = \int_{v_1}^{v_2} \frac{dp}{dv}vdv = [pv]_{v_1}^{v_2} - \int_{v_1}^{v_2} pdv = \left[\frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]_{v_1}^{v_2} - \int_{v_1}^{v_2} \frac{mvdv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$= \left[\frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]_{v_1}^{v_2} + \left[mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}\right]_{v_1}^{v_2} = \left[\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]_{v_1}^{v_2} = T_2 - T_1$$

Mécanique | 2013 55

J'ai mon d p sur v, j'ai le v, et j'ai le d v, l'intégration sur v. Maintenant je vous invite à faire une pause, et conclure le calcul. Personnellement, je continue le calcul en faisant une intégration par parties, J'ai écrit p v, pris entre v 1 et v 2, moins p, fois la dérivée de v par rapport à v, ça donne 1 donc j'ai simplement ce p, d, v. Le p maintenant, je l'exprime en fonction de v, ça me donne ce terme-là. L'autre, le p v, me donne évidemment ce terme-là. Et cette intégrale-là n'est pas difficile, on voit bien que si on a cette racine carrée et qu'on la dérive, on va obtenir un v, d, v, et donc je me retrouve avec ce terme-là. Il faut faire attention aux constantes, il y a un m c carré qui apparaît ici. Et maintenant, je peux écrire ces deux termes ensemble, en les mettant sous le même dénominateur, et au numérateur il me reste que m c carré. Or je reconnais ici notre formule pour E, on a donc calculé E, on doit calculer E à la vitesse v 2, moins E à la vitesse v 1, c'est donc bien la différence de l'énergie cinétique entre ces deux moments. On a donc cette différence d'énergie cinétique, qui est égale au travail des forces.

Notes

Summary

15m 44s