Heute (20.11.2014):

- Textbuch Kapitel 5.4, 5.5
- Wiederholung komplexe Zahlen
- Komplexe Eigenwerte
- Textbuch Kapitel 6.1, 6.2
- Skalarprodukt, Norm, Kosinussatz
- Orthogonalität, Orthonormale Basen, Projektion

Wiederholung Komplexe Zahlen

Definition

Die komplexen Zahlen $\mathcal{C}$ ist die Menge von Zahlen $c = a + ib$, wobei $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und i die imaginäre Einheit ist ($i^2 = -1$).

Wenn $c = a + ib$, dann nennt man

- $\Re c = a$ den *Realteil* von c,
- $\Im c = b$ den *Imaginärteil* von c,
- $\bar{c} = a - ib$ das *Konjugiert-Komplexe* von c.
- $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$ der *Betrag* von c.

Definition

Sei $B \in \mathcal{C}^{m \times n}$. Die *konjugiert-komplexe* Matrix von B ist die Matrix $\bar{B}$ mit

$$(\overline{B})_{ij} = \overline{B_{ij}},$$

d.h. die Einträge sind die komplex-konjugierten Einträge von B.

Satz 74

Seien $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$. Dann gilt: $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$. (*)

Insbesondere folgt daraus: Sei $A \in \mathcal{C}^{m \times n}$, $B \in \mathcal{C}^{n \times p}$, $x \in \mathcal{C}^n$, $\alpha \in \mathcal{C}$. Dann

$$\overline{\alpha x} = \bar{\alpha}\bar{x} \qquad \overline{Ax} = \bar{A}\bar{x} \qquad \overline{AB} = \bar{A}\bar{B} \qquad \overline{\alpha A} = \bar{\alpha}\bar{A}$$

Beweis komponentenweise

Beweis durch Linearität der (Matrix) Multiplikation

Beweis für jeden Eintrag

<u>Beweis</u>: $\overline{\alpha\cdot\beta} = \overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$

$\alpha = a + i\cdot b$

$\beta = c + i\cdot d$

$\alpha\cdot\beta = (a+ib)\cdot(c+id) = ac - bd + i(bc+ad)$

$\Rightarrow \overline{\alpha\cdot\beta} = ac - bd - i(bc+ad)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$

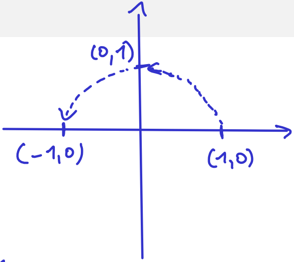
$\overline{\alpha} = a - i\cdot b$

$\overline{\beta} = c - i\cdot d \Rightarrow \overline{\alpha}\cdot\overline{\beta} = (a-ib)\cdot(c-i\cdot d) = ac - bd - i(bc+ad)$

$\boxtimes$

Beispiel: Komplexe Eigenwerte

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$ $\hat{=}$ Drehung um $90°$ gegen den Uhrzeigersinn



Charakteristisches Polynom:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1$$

Eigenwerte:

$$\lambda_{1/2} = \pm i$$

Eigenvektoren:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = i \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}}$$

$(i^2 = -1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = (-i) \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Komplexe Eigenwerte 1

Satz 75

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *und* $\lambda \in \mathcal{C}$ *ein Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor* $v \in \mathcal{C}^n$. *Dann ist auch* $\overline{\lambda}$ *ein Eigenwert von* A *mit Eigenvektor* $\overline{v}$.

Beweis:

$$A\overline{v} = \overline{A}\,\overline{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \overline{\lambda}\,\overline{v}$$

$\square$

$A = \overline{A}$ da $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Quiz: n ungerade. Gibt es immer einen reellen EW?

Ja!

Komplexe Eigenwerte 2

Satz 76

Sei A eine reelle 2×2 Matrix mit komplexen Eigenwert $\lambda = a - ib$ $(b \neq 0)$ und zugehörigen Eigenvektor $v \in \mathcal{C}^2$. Dann

$$A = PCP^{-1} \qquad \text{mit} \qquad P = [\Re v \ \Im v] \text{ und } C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Beweis: 1. $P = [\mathrm{Re}\,v \quad \mathrm{Im}\,v]$, dann ist P invertierbar $\iff$ $\underbrace{\mathrm{Re}\,v}_{u}$, $\underbrace{\mathrm{Im}\,v}_{w}$ lin. unabh.

Annahme: $w = \alpha \cdot u \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

$A \cdot v = \lambda \cdot v \qquad v = u + iw = u(1 + \alpha \cdot i)$

echt komplex

$Av = Au(1 + \alpha \cdot i) = \lambda v = \lambda(1 + \alpha i)u$

$\Rightarrow Au = \lambda \cdot u \quad$ ↯ da $u \in \mathbb{R}^2, A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und λ echt komplex eben gezeigt P ist invertierbar

$P = [\mathrm{Re}\, v \quad \mathrm{Im}\, v]$

$C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ $\quad \lambda = a - ib$

noch zu zeigen: $A = P \cdot C \cdot P^{-1}$

$\iff A \cdot P = P \cdot C$

Beweis durch Nachrechnen:

$A \cdot P$

$$A \cdot \mathrm{Re}\, v \underset{\uparrow}{=} \mathrm{Re}(A \cdot v) = \mathrm{Re}(\lambda v) = \mathrm{Re}\left[(a - ib)(\mathrm{Re}(v) + i\,\mathrm{Im}(v))\right]$$

$$= a\,\mathrm{Re}(v) + b\,\mathrm{Im}(v)$$

$A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A \cdot \mathrm{Im}\, v \underset{\downarrow}{=} \mathrm{Im}(A v) = \mathrm{Im}(\lambda v) = a \cdot \mathrm{Im}(v) - b\,\mathrm{Re}(v).$$

$P \cdot C$

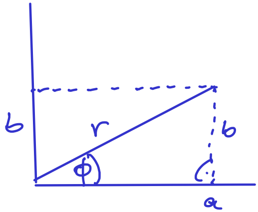
$$[\mathrm{Re}\, v \quad \mathrm{Im}\, v] \cdot \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \left[a\,\mathrm{Re}(v) + b\,\mathrm{Im}(v), \quad -b\,\mathrm{Re}(v) + a\,\mathrm{Im}(v)\right]$$

Was bedeutet das? Abb. durch A ist gleichbedeutend mit Basiswechsel ($*P^{-1}$), dann Abb. mit C, und anschließendem Basiswechsel ($*P$)

$\Rightarrow A \cdot P = P \cdot C$

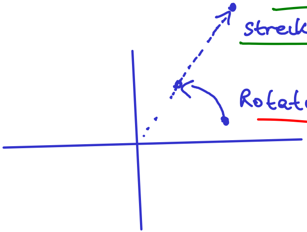
Rotationsmatrizen

$$C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{R} \text{ nicht beide gleich } 0.$$



$$r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$C = r \begin{bmatrix} a/r & -b/r \\ b/r & a/r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$



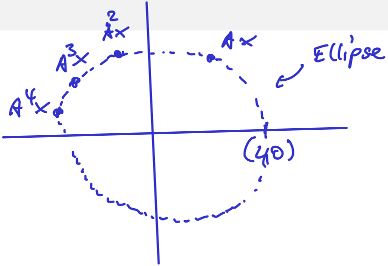
Streckung um Faktor r

Rotation um Winkel ϕ

Wenn also
$A = P \cdot C \cdot P^{-1}$
bedeutet das bis auf Basiswechsel eine Rotation + Streckung

Beispiel: Komplexe Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/5 \\ 3/4 & 11/10 \end{bmatrix}.$$



$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}\,i$, $\lambda_2 = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}\,i$

$\lambda_1 = \frac{4}{5} - i\left(-\frac{3}{5}\right)$

Eigenvektoren: $v_1 = \begin{bmatrix} -2-4i \\ 5 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2+4i \\ 5 \end{pmatrix}$

Alternative Darstellung mit $P = [\Re v_1 \;\; \Im v_1]$

$$A = P \cdot C \cdot P^{-1}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

Geometrie

Skalarprodukt

Definition

Seien $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Dann ist das *Skalarprodukt* von u und v definiert durch

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathsf{T}} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$$

Alternativ schreibt man manchmal auch $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >$.

Bsp.:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2(-5) + 3 \cdot 6 = 12$$

Eigenschaften des Skalarprodukts

Satz 77

Für $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ *und* $c \in \mathbb{R}$ *gilt:*

i) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

ii) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

iii) $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$

iv) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$, *und* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ *genau dann wenn* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Beweis: i–iii) folgt direkt durch Def.

iv) $u \cdot u = \underbrace{u_1^2}_{\geq 0} + u_2^2 + \dots + u_n^2 \geq 0$

$+$ $u \cdot u = 0 \iff$ alle $u_i = 0$

$\iff u = 0$

$\square$

Norm

("Länge")

Definition

Sei $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die *Norm* von v:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2} \qquad \geq 0$$

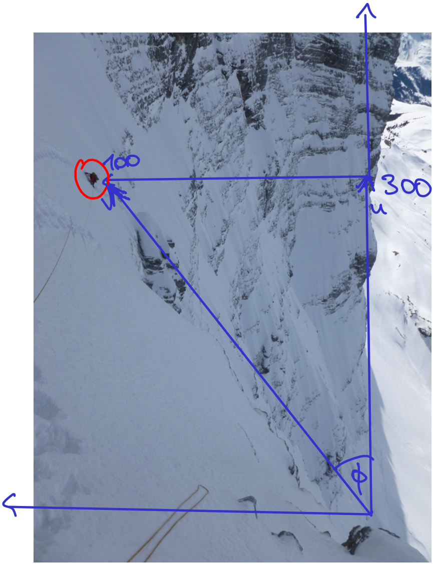
Ist $\|\mathbf{v}\| = 1$ nennt man $\mathbf{v}$ einen *Einheitsvektor*.

Satz 78

Für $c \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|c\,\mathbf{v}\| = |c|\;\|\mathbf{v}\|$. (nach Definition)
Also ist jeder Vektor $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ ein Einheitsvektor (Normalisierung).

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \left\| \frac{1}{\|v\|} v \right\| = \left| \frac{1}{\|v\|} \right| \|v\| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1$$

Beispiel Projektion/Kosinussatz



Kosinussatz im $\mathbb{R}^n$: $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos \phi$$

eingeschlossene Winkel von u und v

Bsp:

$$v = \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$\|v\| = \sqrt{100^2 + 300^2} = 100\sqrt{10} \quad \|u\| = 300$$

$$\cos \phi = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|} = \frac{300^2}{300 \cdot 100\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{9}{10}}$$

$$\Rightarrow \phi \approx 18^\circ$$

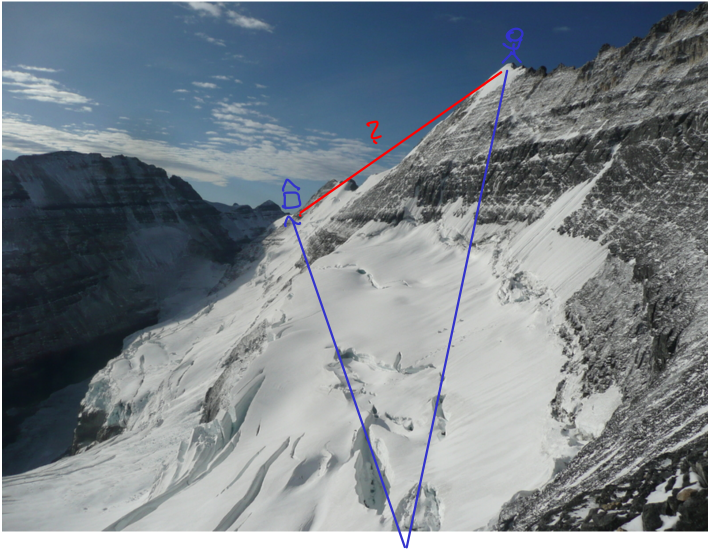
Distanz

Definition

Für $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ist die *Distanz* zwischen u und v

$$\operatorname{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Beispiel Distanz



Gipfel $\begin{pmatrix} 300 \\ 1000 \\ 300 \end{pmatrix} = u$

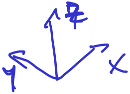
Hütte $\begin{pmatrix} 250 \\ 2000 \\ 0 \end{pmatrix} = v$

Distanz (Luftlinie)
zw. Gipfel und Hütte

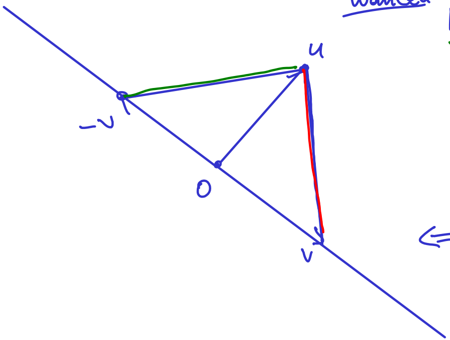
$$\left\| \begin{pmatrix} 300 \\ 1000 \\ 300 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 250 \\ 2000 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{50^2 + 1000^2 + 300^2}$$

$$\approx 1045$$



Motivation Orthogonalität



wanted: $\|u-v\| = \|u+v\|$

$$\|u-v\|^2 = (u-v)\cdot(u-v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2u\cdot v$$

$$\|u+v\|^2 = (u+v)\cdot(u+v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u\cdot v$$

$$\iff u\cdot v = 0$$

Motivation für Def. von Orthogonalität

Orthogonalität

Definition

Zwei Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ heissen *orthogonal* zueinander wenn

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Satz 79

Zwei Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *sind orthogonal zueinander genau dann wenn gilt*

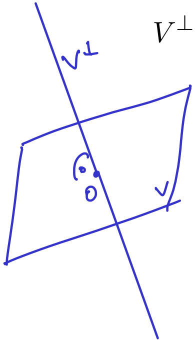
$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

hatten wir gerade eben.

Orthogonales Komplement

Definition

Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum. Die Menge aller Vektoren $u \in \mathbb{R}^n$ die orthogonal auf allen Vektoren in V stehen, heisst *Orthogonales Komplement* (oder *Orthogonalraum*) von V.



$$V^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n \ : \ \text{für alle } v \in V \text{ gilt } u \cdot v = 0\}$$

Eigenschaften Orthogonales Komplement

Satz 80

1. *Sei* $V = \text{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$. *Dann ist* $u \in V^\perp$ *genau dann wenn* u *orthogonal zu allen* $v_1, \ldots, v_k$ *ist.*
2. $V^\perp$ *ist ein Unterraum.* (Übung)

Beweis: 1) $v \in V$: $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k$

$v \cdot u = \alpha_1 v_1 \cdot u + \ldots + \alpha_k v_k \cdot u$

genau dann 0, wenn $v_i \cdot u = 0$

Bsp: $V \subseteq \mathbb{R}^3$ $V = \mathbb{R}^3$ was ist $V^\perp = \{0\}$