

Lineare Algebra

Übungsblatt 1

19. September 2013

Allgemeine Hinweise:

Die Adresse der Webseite zur Vorlesung ist `disopt.epfl.ch/LinAlg13`

Lösungen zu der mit einem Stern markierten Aufgabe können in Zweiergruppen bis **Mittwoch, 25. September um 16 Uhr** durch Einwurf in der Box vor Büro MA B1 533 abgegeben werden.

Die Angaben zur Aufgabennummern beziehen sich auf die folgende Version des Lehrbuches: David C. Lay: Linear Algebra and its Applications. Fourth international Edition (Pearson).

Zusätzlich zu den Übungen ist es empfehlenswert, jede Woche die Aufgaben mit ungerader Nummer im aktuell behandelten Kapitel des Lehrbuchs zu machen. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

- (i) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden $x_1 + 2x_2 = -13$ und $3x_1 - 2x_2 = 1$.
- (ii) Haben die drei Ebenen

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \quad x_2 - x_3 = 1 \quad \text{und} \quad x_1 + 3x_2 = 0$$

mindestens einen gemeinsamen Punkt?

- (iii) Bestimmen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems

$$3x_1 + 2x_4 - x_5 = 12,$$

$$x_3 + 2x_4 - 4x_2 = -1,$$

$$x_5 + 2x_3 - 4x_1 = -8.$$

und geben Sie die Einträge $a_{2,3}$ und $a_{1,4}$ an.

- (iv) Lösen Sie jeweils das lineare Gleichungssystem (GLS) durch elementare Zeilenumformungen auf der erweiterten Koeffizientenmatrix.

(a)

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 12,$$

$$x_3 + 2x_1 - 4x_2 = -1,$$

$$x_2 + 2x_3 - 4x_1 = -8.$$

(b)

$$\begin{aligned}6x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 11 \\ -3x_1 + 2x_2 - 1x_3 &= -4 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 9\end{aligned}$$

(v) Entscheiden Sie, ob das GLS lösbar ist (ohne es komplett zu lösen).

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_4 &= -3 \\ 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_3 + 3x_4 &= 1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5.\end{aligned}$$

(vi) Finden Sie die elementare Zeilenoperation, die die erste Matrix in die zweite überführt, sowie ihre Umkehrung.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -6 & 3 & -5 \\ 4 & -8 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 4 & -8 & 6 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2

(i) Bringen Sie die folgenden Matrizen in reduzierte Zeilenstufenform

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -6 & 12 & -9 \\ 4 & -8 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) Für welche Werte von h stellen die folgenden Matrizen die erweiterte Koeffizientenmatrix eines lösbaren GLS dar?

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & -3 & h \\ -2 & 6 & -5 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & h & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

(iii) Geben Sie die Lösungsmenge des zu der folgenden erweiterten Koeffizientenmatrix gehörigen GLS an

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3 (*)

Bestimmen Sie für jedes der nachfolgenden linearen Gleichungssysteme (GLS)

- die erweiterte Koeffizientenmatrix
- die reduzierte Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix
- die Lösungsmenge des Systems.

(1)

$$1x + y + 2z + 3w = 13$$

$$x - 2y + z + w = 8$$

$$3x + y + z - w = 1$$

(2)

$$12x + y + z - 2w = 1$$

$$3x - 2y + z - 6w = -2$$

$$x + y - z - w = -1$$

$$6x + z - 9w = -2$$

$$5x - y + 2z - 8w = 3$$

Wahr/Falsch

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.

Kapitel 1.1

- (i) Jede elementare Zeilenoperation ist umkehrbar.
- (ii) Die Lösung eines linearen Gleichungssystems (GLS) mit Variablen x_1, \dots, x_n ist eine Liste von reellen Zahlen (s_1, \dots, s_n) , die jede Gleichung des Systems zu einer wahren Aussage macht, wenn die Werte s_1, \dots, s_n für x_1, \dots, x_n eingesetzt werden.
- (iii) Zwei Matrizen sind zeilenäquivalent wenn sie die gleiche Anzahl an Zeilen haben.
- (iv) Elementare Zeilenoperationen, die auf die erweiterte Koeffizientenmatrix angewendet werden, verändern niemals die Lösungsmenge des zugehörigen GLS.
- (v) Zwei äquivalente lineare Gleichungssysteme können verschiedene Lösungsmengen haben.
- (vi) Ein lösbares GLS hat eine oder mehrere Lösungen.

Kapitel 1.2

- (i) Die Zeilenstufenform einer Matrix ist eindeutig.
- (ii) Die reduzierte Zeilenstufenform einer Matrix ist eindeutig.
- (iii) Wenn die Zeilenstufenform einer erweiterten Koeffizientenmatrix eine Zeile der Form $[0\ 0\ 0\ 5\ 0]$ enthält, dann ist das zugehörige GLS unlösbar.
- (iv) Wenn jede Spalte der erweiterten Koeffizientenmatrix ein Pivotelement enthält, dann ist das zugehörige GLS lösbar.
- (v) Die Pivotposition in einer Matrix hängt davon ab, ob Zeilenvertauschungen bei der Zeilenreduzierung verwendet wurden.
- (vi) Wann immer ein GLS freie Variablen hat, enthält die Lösungsmenge mehrere Lösungen.