Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Lineare Algebra

Übungsblatt 2 **25. September 2013**

Allgemeine Hinweise:
Lösungen zu der mit einem Stern markierten Aufgabe können in Zweiergruppen bis **Mittwoch, 2. Oktober um 16 Uhr** durch Einwurf in der Box vor Büro MA B1 533 abgegeben werden.

Zusätzlich zu den Übungen ist es empfehlenswert, jede Woche die Aufgaben mit ungerader Nummer im aktuell behandelten Kapitel des Lehrbuchs zu machen. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

(i) Gegeben sind die Vektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{bmatrix}.$$

- Für welche Werte von h ist der Vektor $\boldsymbol{w}$ eine Linearkombination von $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$?
- Geben Sie die zugehörigen Koeffizienten α_1, α_2 der Vektoren $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ an.

(ii) Zeigen Sie, dass der Vektor $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}$ in der durch die Spalten der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$$

erzeugten Ebene im $\mathbb{R}^3$ liegt.

(iii) Zeigen Sie, dass für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

die Matrixgleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ nicht für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ lösbar ist. Beschreiben Sie geometrisch die Menge der Vektoren $\boldsymbol{b}$ für die $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lösbar ist.

Aufgabe 2

(i) Wir betrachten die beiden linearen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} x + 2y &= k \\ 4x + hy &= 5 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -3x + hy &= 1 \\ 6x + ky &= -3 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Werte für h und k so dass das GLS jeweils

- keine Lösung hat,
- eine eindeutige Lösung hat,
- unendlich viele Lösungen hat.

(ii) Spannen die Vektoren $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ den Raum $\mathbb{R}^3$ auf? Begründen Sie Ihre Antwort.

(iii) Spannen die Vektoren $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ den Raum $\mathbb{R}^4$ auf? Begründen Sie Ihre Antwort.

(iv) Geben Sie die Lösungen der beiden linearen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= -5 \\ x_2 - x_3 &= 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= -2 \end{aligned}$$

in parametrisierter Vektorform an und interpretieren Sie die Lösungsmenge geometrisch.

(v) Bestimmen Sie den Kern der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

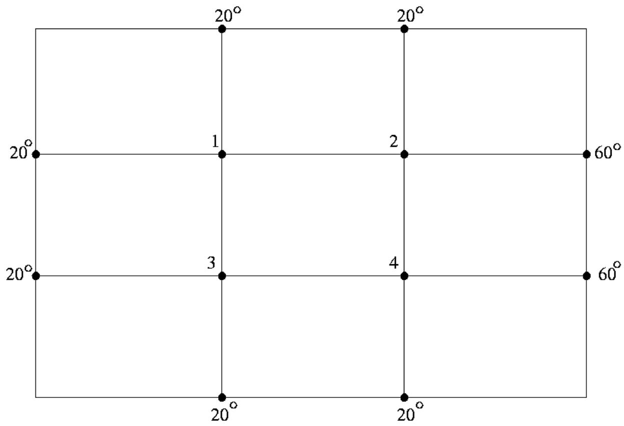
und geben Sie die Lösung in parametrisierter Vektorform an.

Aufgabe 3 $(*)$

Wir betrachten ein Wärmeübertragungsproblem, in dem man für eine dünne Metallplatte die Temperatur im Gleichgewichtszustand bestimmen möchte, wenn die Temperaturen an den Rändern bekannt sind. Wir beschränken uns darauf die Temperaturen an den auf der Abbildung eingezeichneten Knotenpunkten zu berechnen.

Seien T_1, T_2, T_3 und T_4 die zu bestimmenden Temperaturen der inneren vier Knotenpunkte und nehmen Sie an, dass die Temperatur eines Knoten durch das arithmetische Mittel der Temperaturen an den vier Nachbarknoten (oben, links, unten, rechts) gegeben ist. Beispielsweise gilt für den ersten Knoten

$$T_1 = (20 + 20 + T_3 + T_2)/4.$$



- Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, dessen Lösung die Temperaturen T_1, T_2, T_3 und T_4 an den Knoten 1, 2, 3 und 4 bestimmt.
- Bestimmen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix des Systems.
- Lösen Sie das GLS.

Wahr/Falsch

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.

Kapitel 1.3

(i) Eine andere Schreibweise für den Vektor $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ ist [4, 3].

(ii) Die Punkte $\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ liegen auf einer Geraden durch den Ursprung.

(iii) Ein Beispiel einer Linearkombination von $\boldsymbol{v_1}$ und $\boldsymbol{v_2}$ ist $\frac{1}{2}\boldsymbol{v_1}$.

(iv) Die Menge Span$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ kann immer als Ebene dargestellt werden, die den Ursprung enthält.

(v) Das GLS mit erweiterter Koeffizentenmatrix $[\boldsymbol{a_1} \quad \boldsymbol{a_2} \quad \boldsymbol{a_3} \quad \boldsymbol{b}]$ ist lösbar genau dann wenn $b \in \text{Span}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3})$ gilt.

(vi) Der Vektor $\boldsymbol{v}$ ist die Summe der Vektoren $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{v}$.

Kapitel 1.4

(i) Der Vektor $\boldsymbol{b}$ ist eine Linearkombination der Spalten einer Matrix A genau dann, wenn die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mindestens eine Lösung hat.

(ii) Die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist lösbar wenn die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A \quad \boldsymbol{b}]$ in jeder Zeile ein Pivotelement enthält.

(iii) Wenn die Spalten einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ den Raum $\mathbb{R}^m$ aufspannen, dann ist die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lösbar für alle Vektoren $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.

(iv) Jede Linearkombination von Vektoren kann für eine entsprechende Matrix A und einen Vektor x in der Form $A\boldsymbol{x}$ geschrieben werden.

(v) Wenn die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lösbar ist, liegt $\boldsymbol{b}$ im Erzeugnis der Spalten von A.

Kapitel 1.5

(i) Ein homogenes Gleichungssystem ist immer lösbar.

(ii) Die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ hat nur die triviale Lösung genau dann wenn die Gleichung mindestens eine freie Variable enthält.

(iii) Die Gleichung $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$ beschreibt eine Gerade durch den Punkt $\boldsymbol{v}$ parallel zu $\boldsymbol{u}$.

Für die folgenden vier Fragen entscheiden Sie bitte, ob (a) das System $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ eine nichttriviale Lösung hat und (b) ob die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für jedes $\boldsymbol{b}$ mindestens eine Lösung hat.

- A ist eine 3×3-Matrix mit drei Pivotelementen.
- A ist eine 4×4-Matrix mit drei Pivotelementen.
- A ist eine 2×5-Matrix mit zwei Pivotelementen.
- A ist eine 3×2-Matrix mit zwei Pivotelementen.