Lineare Algebra

Übungsblatt 6 **23. Oktober 2013**

Allgemeine Hinweise:
Lösungen zu der mit einem Stern markierten Aufgabe können in Zweiergruppen bis **Mittwoch, 30. Oktober um 16 Uhr** durch Einwurf in der Box vor Büro MA B1 533 abgegeben werden.

Zusätzlich zu den Übungen ist es empfehlenswert, jede Woche die Aufgaben mit ungerader Nummer im aktuell behandelten Kapitel des Lehrbuchs zu machen. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

1. Berechnen Sie die folgenden Determinanten mit Hilfe von Co-Faktoren:

$$a = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 3 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & -4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Berechnen Sie die folgenden Determinanten durch Finden einer Zeilenstufenform:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad e = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 8 \\ 3 & -4 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

3. Berechnen Sie die folgenden Determinanten.

$$f = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, g = \begin{vmatrix} 10 & 5 & 10 & 5 \\ 6 & 9 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

4. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Elementarmatrizen:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Zu welchen Elementaroperationen gehören sie?

5. Vorausgesetzt, dass
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7,$$
berechnen Sie die Determinanten
$$t = \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}, \quad s = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

Aufgabe 2 (∗)

Zeigen Sie, dass gilt:

a) Wenn A eine invertierbare Matrix ist, dann gilt $\det(A^{-1}) = 1/\det A$.
b) Wenn A und P quadratische $n \times n$ Matrizen sind und P invertierbar ist, dann gilt $\det(PAP^{-1}) = \det A$.
c) Wenn U eine quadratische Matrix ist mit $U^T U = I$, dann gilt $\det U = \pm 1$.
d) Wenn A eine quadratische Matrix ist mit $\det(A^4) = 0$, dann ist A nicht invertierbar.

Aufgabe 3

(i) Ist die folgende Matrix invertierbar?
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

(ii) Gegeben $n \times n$ Matrizen A, B, C, D.

(a) Ist die folgende Aussage korrekt?
$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \, \det D - \det B \, \det C.$$
Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Wenn A invertierbar ist und 0 die $n \times n$ Nullmatrix bezeichnet:

1. Finden Sie $n \times n$ Matrizen X und Y, die die folgende Zerlegung erlauben:
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ X & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix}.$$
2. Zeigen Sie, dass
$$\det A \det X = \det C$$
und
$$\det A \det Y = \det(AD - CB)$$
gilt falls $AC = CA$.

(iii) Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie $(A^{-1})_{23}$ mit Hilfe der Cramerschen Regel.

(iv) Berechnen Sie das Volumen des Parallelopipeds, das durch die Punkte

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird.

Wahr/Falsch

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.

Kapitel 3

(i) Wenn A eine Diagonalmatrix ist, dann ist die Determinante von A die Summe der Diagonaleinträge von A.

(ii) Die Anwendung elementarer Zeilenoperationen lässt die Determinante einer Matrix unverändert.

(iii) Wenn die Spalten der Matrix A linear abhängig sind, dann gilt $\det(A) = 0$.

(iv) Es gilt $\det(A+B) = \det(A)+\det(B)$ für zwei quadratische Matrizen A, B.

(v) Es gilt $\det(A^T) = -\det(A)$.

(vi) Die Determinante einer Blockmatrix der Form $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$ (A, B, D sind quadratische Matrizen) ist $\det(A)\,\det(D)$.

(vii) Die durch eine Matrix A beschriebene lineare Transformation ist injektiv genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt.