CM 3

La Méthode Du Simplexe

Marcher sur les toits

Cours *Optimisation Discrète* 10 mars 2011

Friedrich Eisenbrand
EPFL

Récapitulation

Lemme

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. L'élimination de Gauss-Jordan calcule une matrice $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ inversible et une matrice $A' \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sous la forme échelonnée en lignes tel que

$$U \cdot A = A'.$$

Retour à la programmation linéaire

Sans perte de généralité, les colonnes de A sont linéairement indépendantes. Pourquoi ? :

- Considérons le programme linéaire

$$\max\{c^T x\colon x \in \mathbb{R}^n,\, Ax \leq b\} \tag{4}$$

- Avec l'élimination de Gauss-Jordan, on calcule $U^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $U^T \cdot A^T$ est sous la forme échelonnée en lignes
- $A \cdot U = [A' \mid 0]$ où les colonnes de $A' \in \mathbb{R}^{m \times n'}$ sont linéairement indépendantes et $0 \in \mathbb{R}^{m \times n''}$ est une matrice nulle et $n = n' + n''$
- On réécrit le programme linéaire

$$\max\{c^T x\colon Ax \leq b\} \quad \text{comme} \quad \max\{c^T \cdot U \cdot U^{-1} x\colon A \cdot U \cdot U^{-1} x \leq b\}$$

et on considère le programme linéaire

$$\max\{{c'}^T y\colon y \in \mathbb{R}^{n'},\, A' y \leq b\} \tag{5}$$

où ${c'}^T$ est formé par les n' premières composantes de $c^T U$.

Retour à la programmation linéaire

Théorème

Si $x \in \mathbb{R}^n$ est admissible pour (4), on obtient que $y' \in \mathbb{R}^{n'}$ est admissible pour (5), où y' est formé par les n' premières composantes de $U^{-1}x$. De plus, $c^T x = c'^T y'$ si les n'' dernières composantes de $c^T U$ sont zéro.
Si y' est admissible pour (5), $x = U\binom{y'}{0}$ est admissible pour (4) et $c^T x = c'^T y'$.

Théorème

Si une des n'' dernières composantes de $c^T U$ est non-nulle et le PL (5) est admissible, alors le PL (4) est non-borné.

Retour à la programmation linéaire

PL original et sa transformée

$$\begin{array}{lrcl} \max & x_1 + x_2 + 2x_3 & & \\ & 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 & \leq & 5 \\ & 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \leq & 6 \end{array}$$

Avec $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on trouve le programme linéaire

$$\begin{array}{lrcl} \max & y_1 + y_2 & & \\ & 2y_1 + 1y_2 & \leq & 5 \\ & 1y_1 + 2y_2 & \leq & 6 \end{array}$$

Si $c^T = (1, 1, 3)$ est l'objectif dans le PL original, on obtient

$$c^T U = (1, 1, 3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, 1, 1)$$

Comme la dernière composante de l'objectif est non-nulle, le programme linéaire original n'est pas borné.

Retour à la programmation linéaire

Exercice de 5 Min.

Un rayon est un ensemble $r(x^*, d) = \{x^* + \alpha \cdot d\colon \alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ où $x^*, d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$.
Pour le deuxième cas de l'exemple, trouvez un rayon admissible qui n'est pas borné par rapport à la fonction objective.

Sans perte de généralité colonnes de A sont linéairement indépendantes

À l'aide de l'élimination de Gauss-Jordan

- Si on veut résoudre un PL (4) on calcule le PL (5) et on résout PL (5) au lieu de PL (4).
- Comme ça on a réduit le nombre de variables et les colonnes de la matrice sont linéairement indépendantes.

Conséquence

Désormais, on suppose que les colonnes de la matrice A d'un programme linéaire $\max\{c^T x \colon x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\}$ sont *linéairement indépendantes*.

Trouver une solution optimale d'un PL

Tâche

Trouver une solution optimale du programme linéaire

$$\max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\} \tag{6}$$

où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de plein rang-colonne, $b \in \mathbb{R}^m$ et $c \in \mathbb{R}^n$.

Les Toits

Notation

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$

- a_i : $i^{\text{ème}}$ ligne de A
- a^j : $j^{\text{ème}}$ colonne de A
- $a_{i,j}$: l'élément de A qui est dans la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A

Définition (Toit)

Soit $B \subseteq \{1, \ldots, m\}$ un sous-ensemble des indexes des lignes de A. B est un *toit* si

i) $|B| = n$,

ii) les lignes a_i, $i \in B$ sont linéairement indépendantes, et

iii) le programme linéaire

$$\max\{c^T x \colon a_i^T x \leq b_i, \; i \in B\} \tag{7}$$

est borné.

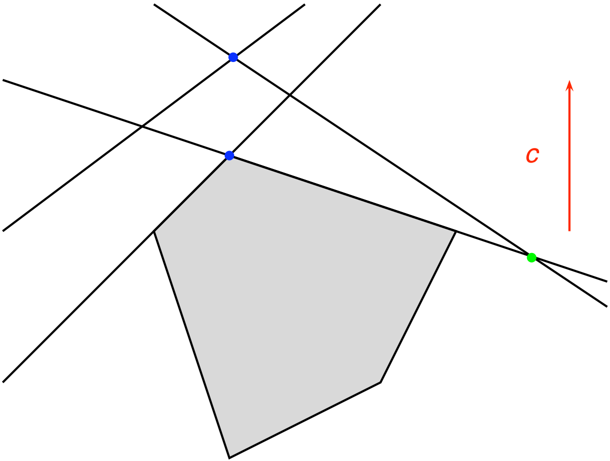


FIGURE: Les points bleus marquent des toits et le point vert marque un ensemble qui satisfait i) et ii) mais pas iii), alors ce n’est pas un toit.

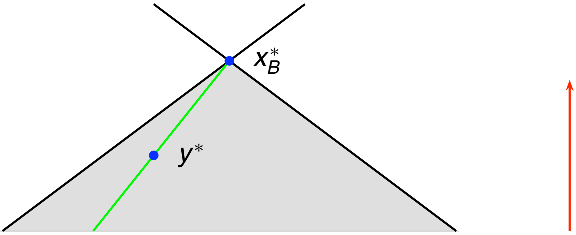
Quelle est la solution optimale d'un PL défini par un toit ?

Lemme

Soit $B \subseteq \{1, \ldots, m\}$ *un toit du PL* (6) *et soit* x_B^* *la solution unique du système*

$$a_i^T x = b_i,\ i \in B,$$

alors x_B^* *est une solution optimale du PL-toit* (7).



Définition

La *valeur* d'un toit B est la valeur optimale $c^T x_B^*$ du PL-toit

$$\max\{c^T x \colon a_i^T x \leq b_i,\ i \in B\}.$$

Théorème (Dualité faible)

La valeur d'un toit est une borne supérieure des valeurs de la fonction objective sur les tous les points admissibles.

L'enveloppe linéaire, affine, conique et convexe

Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble de vecteurs de dimension n. *L'enveloppe linéaire*, *l'enveloppe affine*, *l'enveloppe conique* et *l'enveloppe convexe* de X sont définies comme suit.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{lin.hull}(X) &= \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_t x_t \colon t \geq 1, && (8)\\
&\quad x_1, \ldots, x_t \in X,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{R}\} && (9)\\
\mathrm{affine.hull}(X) &= \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_t x_t \colon t \geq 1, && (10)\\
&\quad x_1, \ldots, x_t \in X,\ \sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{R}\} \\
\mathrm{cone}(X) &= \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_t x_t \colon t \geq 1, && (11)\\
&\quad x_1, \ldots, x_t \in X,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \\
\mathrm{conv}(X) &= \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_t x_t \colon t \geq 1, && (12)\\
&\quad x_1, \ldots, x_t \in X,\ \sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}
\end{aligned}
$$

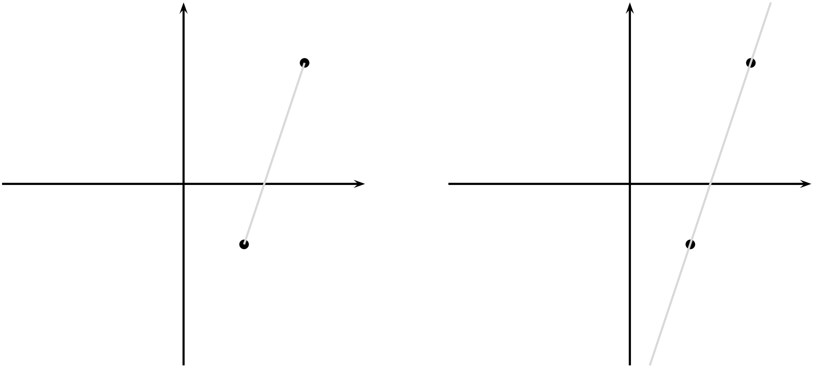


FIGURE: Deux points avec leur enveloppe convexe (à gauche) et leur enveloppe affine (à droite).

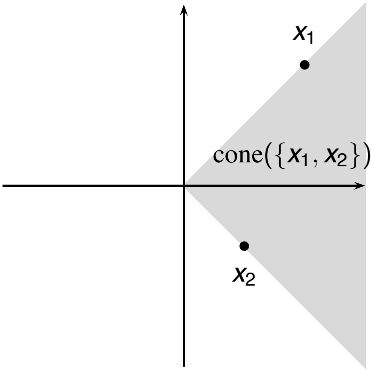
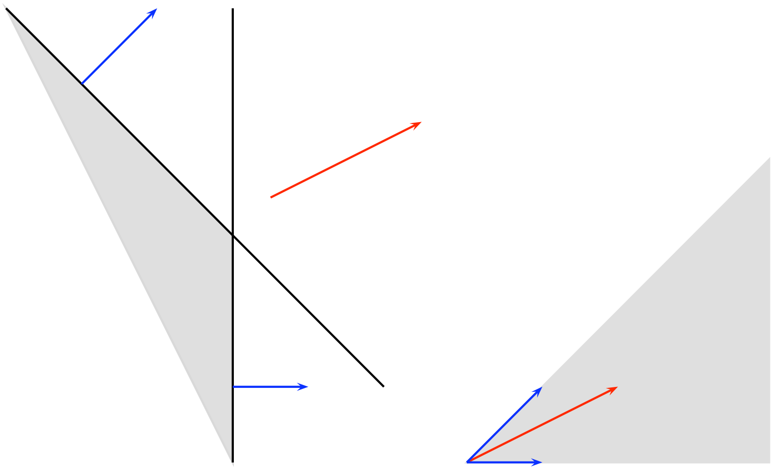


FIGURE: Deux points avec leur enveloppe conique.

Caractérisation des toits

Lemme

Soit $B \subseteq \{1, \ldots, m\}$ un ensemble d'indexes qui satisfait i) et ii), alors B est un toit si et seulement si $c \in \mathrm{cone}\{a_i^T : i \in B\}$.



Caractérisation des toits

Exercice de 5 Min.

Trouver un toit et 3 lignes qui sont linéairement indépendantes, mais qui ne sont pas un toit du PL.

$$\max\left\{x_1+x_2+x_3 : \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 5\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Sommets

Définition

Soit B un toit du PL (6). La solution x_B^* unique du système

$$a_i^T x = b_i,\ i \in B, \tag{13}$$

est le *sommet* du toit.

Proposition

Soit B un toit du PL (6). Le sommet x_B^* de B est l'unique solution optimale du PL-toit (7) si et seulement si c est une combinaison conique des vecteurs $a_k,\ k \in B$ avec des facteurs strictement positifs.

Algorithme simplexe

Brouillon d'algorithme

i) Calcule le sommet x_B^* du toit B

ii) Trouve un index $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus B$ tel que $a_i\, x_B^* > b_i$. Si un tel index n'existe pas, x_B^* est la solution optimale.

iii) Détermine index $j \in B$ tel que

   a) $B' = B \cup \{i\} \setminus \{j\}$ est un toit

   b) Sommet $x_{B'}^*$ de B' est admissible pour le PL défini par B.

   Si un tel index n'existe pas, le PL (6) est inadmissible.

Terminaison et dégénération

Définition (Toit et PL dégeneré)

Un toit B du PL (6) est *dégeneré* si la solution optimale du PL (7) n'est pas unique. Un PL est dégeneré si le PL a un toit dégeneré.

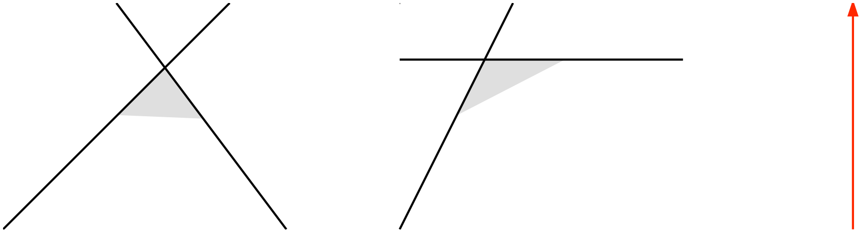


FIGURE: Toit non-dégeneré et toit dégeneré

Le cas non-dégéneré

Théorème

L'algorithme simplexe termine si le PL (6) *est non-dégéneré.*

Implementer pas iii)

Trouver un index qui sort le toit

- On considère les systemes d'équations

$$\begin{aligned}\Sigma_{k\in B} a_k z_k &= c^T && (14)\\ \Sigma_{k\in B} a_k y_k &= -a_i && (15)\end{aligned}$$

  avec variables $z_k, y_k \; k \in B$.
- Calcule la solution $z^* \in \mathbb{R}^n$ de (21) et la solution $y^* \in \mathbb{R}^n$ de (22)
- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k\in B} a_k(z_k^* + \lambda \cdot y_k^*) + a_i \cdot \lambda = c^T \qquad (16)$$

- On cherche $\lambda \geq 0$ maximal, tel que (23) est encore une combinaison conique de c.

Implementer pas iii) cont.

- Calcule $J = \{k \in B \colon y_k^* < 0\}$

$$\lambda^* = \min_{k \in J} -\frac{z_k^*}{y_k^*}. \tag{17}$$

  On choisit $j \in J$ tel que le minimum est atteint.
- j sort du toit
- Si $J = \emptyset$, on constate que le PL n'est pas admissible.

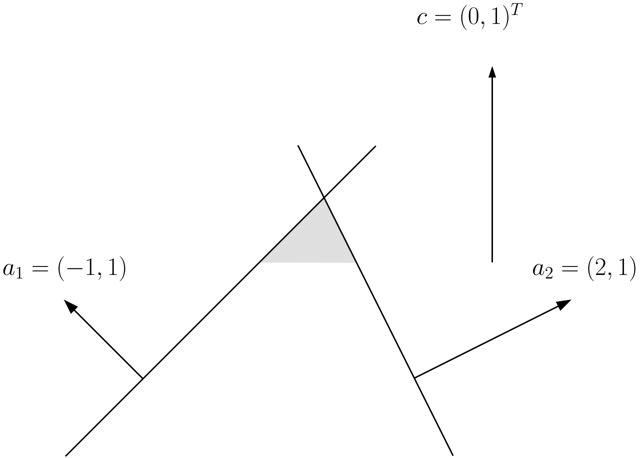


FIGURE: Le toit initial d'exemple suivant.

Exemple

On considère

$$\max\left\{x_2 \colon x \in \mathbb{R}^n,\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Le toit initial est $B = \{1, 2\}$
x_B^* est la solution de

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

alors $x_B^* = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
La contrainte $(1, 2)x \leq 1$ coupe $x_B^* = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Alors 3 va entrer dans le toit B'.
On considère

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

et on trouve

$$z^* = \left(\begin{smallmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{smallmatrix}\right).$$

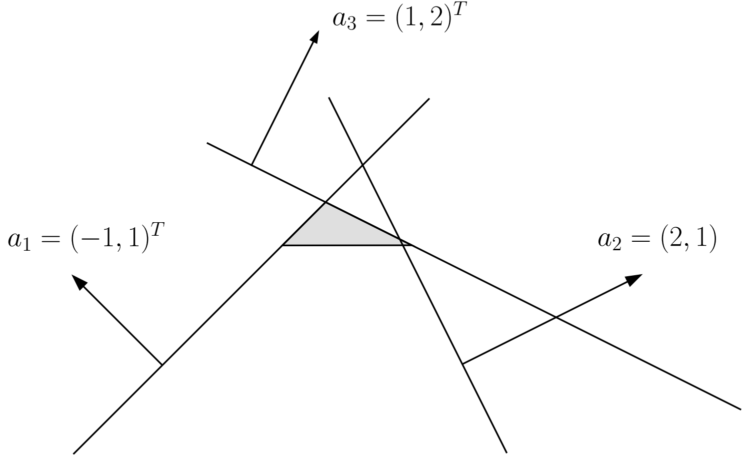
On considère

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{20}$$

et on trouve

$$y^* = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right).$$

$J = \{1, 2\}$ et le minimum dans (24) est atteint par $j = 2$. Alors $B' = \{1, 3\}$.



$a_3 = (1,2)^T$
$a_1 = (-1,1)^T$
$a_2 = (2,1)$

Questions

Questions principales

Est-ce que cette manière d'implémenter pas iii) est correcte ? En autres mots, est-ce que

- $B' = B \cup \{i\} \backslash \{j\}$ est un toit ?
- le sommet de B' est admissible pour le PL défini par B ?
- Si $J = \emptyset$, est-ce que le PL n'est pas admissible ?