École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Prof. Eisenbrand

Lineare Algebra (Herbst 2014)

Übung 9

Abgabe bis **17.11.2014** um 11 Uhr in Box vor MA C1 573.

Aufgabennummern beziehen sich auf Ausgabe: David C. Lay: Linear Algebra and its Applications. Fourth international Edition (Pearson).

Wir empfehlen zusätzlich die Übungen mit ungerader Nummer im behandelten Kapitel des Lehrbuches. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Am Donnerstag, 13.11., haben Sie die Möglichkeit innerhalb der Übungsstunde eine Probeklausur zu bearbeiten und anschliessend zur Korrektur abzugeben!

Aufgabe 1

Gibt es einen reellen Vektorraum mit genau zwei Elementen? Geben Sie entweder ein Beispiel an oder beweisen Sie, dass es keinen solchen Vektorraum gibt.

Hinweis: Benutzen Sie die Eigenschaften eines reellen Vektorraumes. Insbesondere sei "+" die Addition von Elementen des Vektorraums, "·" die Multiplikation mit Skalaren und $\mathbf{0}$ das Nullelement im Vektorraum bzgl. Addition. Dann gilt

- zu jedem v im Vektorraum gibt es ein additiv inverses Element u, sodass $v + u = \mathbf{0}$,
- für jedes v im Vektorraum gilt $v + \mathbf{0} = v$,
- für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Aufgabe 2

1. Für :

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

   bezeichnen wir mit $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$ die Koordinaten des Vektors $\boldsymbol{x}$ bezüglich dieser Basis.

   1. Bestimmen Sie den Vektor $\boldsymbol{x}$ (das heisst seine Koordinaten bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$).
   2. Finden Sie den Koordinatenvektor $[\boldsymbol{y}]_{\mathcal{B}}$ von

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 10 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Seien $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}\}$ und $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}\}$ zwei Basen eines Vektorraums V. Angenommen, es gilt $\boldsymbol{b_1} = 6\boldsymbol{c_1} - 2\boldsymbol{c_2}$ und $\boldsymbol{b_2} = 9\boldsymbol{c_1} - 4\boldsymbol{c_2}$.

   (a) Finden Sie die Basiswechselmatrizen $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ und $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$.

   (b) Finden Sie $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{C}}$ für $\boldsymbol{x} = -3\boldsymbol{b_1} + 2\boldsymbol{b_2}$ mit Hilfe von (a).

3. Betrachten Sie die folgenden Basen von $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \}, \qquad \mathcal{C} = \{ \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \}.$$

   Finden Sie die Basiswechselmatrizen $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$ und $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$. Bestimmen Sie dann $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$ für

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

4. Sei $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die durch

$$T(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}4x_1 + 3x_2\\10x_1 - 8x_2\\x_1 + 2x_2\end{pmatrix}$$

   definierte lineare Abbildung. Geben Sie die Standardmatrix von T bezüglich der Basen $\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \}$ von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{C} = \{ \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \}$ von $\mathbb{R}^3$ an.

Aufgabe 3

1. Wir betrachten die Basis $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ von $\mathbb{P}_2$ mit

$$p_1(t) = 1 + t + t^2, \quad p_2(t) = 2t - t^2, \quad p_3(t) = 2 + t - t^2.$$

   Bestimmen Sie $[t]_{\mathcal{B}}$ und $[1 + t^2]_{\mathcal{B}}$.

2. Sei $\psi : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ die durch $\psi(p)(t) = p(t + 1)$ definierte Abbildung. Zeigen Sie, dass ψ linear ist. Bestimmen Sie die Matrix von ψ in der Standardbasis $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ und bezüglich der Basis $\mathcal{C} = \{1 - t, 2 - t, 1 + t^2\}$.

Wahr/Falsch
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.

Kapitel 4.3, 4.4, 4.5

1. Die Menge mit genau einem Vektor ist linear unabhängig.
2. Wenn $\text{span}(v_1, \dots, v_p) = V$ gilt, dann ist eine Teilmenge von $\{v_1, \dots, v_p\}$ eine Basis von V.
3. Die Dimension von $\mathbb{P}_n$ ist n.
4. Der einzige Unterraum H von $\mathbb{R}^3$ mit $\dim(H) = 3$ ist $\mathbb{R}^3$.

Kapitel 4.6 & 4.7
Im Folgenden bezeichnet A eine $m \times n$ Matrix.

1. $\text{Row}(A) = \text{Col}(A)$
2. $\dim \text{Row}(A) = \dim \text{Col}(A)$
3. $\text{Row}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$.
4. $\dim \text{Row}(A) + \dim \text{Ker}(A) = n$
5. Es gibt eine 6×9 Matrix B so dass $\dim \text{Ker}(B) = 2$ gilt.
6. Für zwei Basen $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ eines Vektorraums V sind die Spalten von $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ linear unabhängig.