École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Prof. Eisenbrand

Lineare Algebra (Herbst 2014)

Übung 13

Abgabe bis **15.12.2014** um 11 Uhr in Box vor MA C1 573.

Aufgabennummern beziehen sich auf Ausgabe: David C. Lay: Linear Algebra and its Applications. Fourth international Edition (Pearson).

Wir empfehlen zusätzlich die Übungen mit ungerader Nummer im behandelten Kapitel des Lehrbuches. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

1. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit linear abhängigen Spalten. Dann gilt $\ker(A^TA) \supsetneq \{0\}$, d.h. der Kern von A^TA enthält einen von 0 verschiedenen Vektor.

2. Geben Sie eine orthogonale Basis für den Spann der folgenden Vektoren an.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

3. Bestimmen Sie eine orthogonale Basis des Spaltenraums der folgenden Matrix.

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Berechnen Sie eine QR-Zerlegung der Matrix aus Teil (3).

5. Finden Sie eine QR-Zerlegung der folgenden Matrix.

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 7 \\ 2 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Lösung:

1. Da die Spalten von A linear abhängig sind, gibt es einen von Null verschiedenen Vektor $\boldsymbol{x}$, so dass $A\boldsymbol{x} = 0$ gilt. Somit gilt aber auch

$$(A^TA)\boldsymbol{x} = A^T(A\boldsymbol{x}) = A^T0 = 0,$$

und somit ist $\boldsymbol{x} \in \ker(A^TA)$.

2. Mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens erhalten wir:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2^T \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} - \frac{-50}{50} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Somit ist $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ eine orthogonale Basis. Um eine orthonormale Basis $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ zu erhalten, normieren wir beide Vektoren:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{50}}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. Seien $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ die drei Spalten der Matrix. Wir wenden das Gram-Schmidt-Verfahren an:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} - \frac{-36}{12}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{6}{12}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{30}{12}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. Um die Matrix Q mit orthonormalen Spalten zu bestimmen können wir die orthogonale Basis aus Aufgabenteil (3) benutzen. Wir normalisieren die Vektoren und erhalten

$$Q = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt $Q^T Q = I$, und wir erhalten die Zerlegung $A = QR$ für

$$R = Q^T A = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 6 & -18 & 3 \\ 0 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Alternativ kann die Matrix R natürlich auch wie in der Vorlesung direkt aus den Koeffizienten im Gram-Schmidt-Verfahren bestimmt werden.

5. Wir bestimmen zunächst eine orthonormale Basis des Spaltenraums.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{49}{49}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dann normieren wir die Basisvektoren und erhalten so die Spalten von Q:

$$Q = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 2 \\ 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten R aus den Koeffizienten im Gram-Schmidt-Verfahren:

$$R = 7\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

1. Seien
$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}3\\-1\\1\\13\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\\2\end{bmatrix}\quad \text{und}\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}-4\\1\\0\\3\end{bmatrix}.$$
Finden Sie die beste Näherung $\hat{\boldsymbol{y}}$ in dem von $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ erzeugten Unterraum und geben Sie deren Distanz zu $\boldsymbol{y}$ an.

2. Bestimmen Sie für
$$A=\begin{pmatrix}2&1\\-2&0\\2&3\end{pmatrix},\qquad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}-5\\8\\1\end{pmatrix}$$
alle Lösungen des kleinste Quadrate Problems $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$. Geben Sie auch den Fehler an.

3. Bestimmen Sie für
$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix},\qquad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\3\\8\\2\end{pmatrix}$$
alle Lösungen des kleinste Quadrate Problems $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$. Geben Sie auch den Fehler an.

4. Beschreiben Sie *alle* Lösungen des kleinste Quadrate Problems für das System
$$x+y=2$$
$$x+y=4$$
Erklären Sie Ihre Antwort und fertigen Sie eine Skizze an.

5. Bestimmen Sie für
$$A=\begin{bmatrix}2&3\\2&4\\1&1\end{bmatrix}\quad \text{und}\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}7\\3\\1\end{bmatrix}.$$
   1. eine QR-Zerlegung von A
   2. alle Lösungen des kleinste Quadrate Problems $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$. Geben Sie auch den Fehler an.

Lösung:

1. Die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ sind orthogonal, denn $\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2=-4-2-0+6=0$. Somit können wir die orthogonale Projektion $\hat{\boldsymbol{y}}=\mathrm{proj}_{\mathrm{Col}(A)}(\boldsymbol{y})$, die die beste Approximation ist, direkt angeben:
$$\hat{\boldsymbol{y}}=\frac{\boldsymbol{y}^T\cdot\boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1^T\cdot\boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1+\frac{\boldsymbol{y}^T\cdot\boldsymbol{v}_2}{\boldsymbol{v}_2^T\cdot\boldsymbol{v}_2}\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}-1\\-5\\-3\\9\end{bmatrix}$$
Die Distanz zwischen $\boldsymbol{y}$ und dem von $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ ist der Abstand zwischen $\boldsymbol{y}$ und $\hat{\boldsymbol{y}}$, d.h. die Norm des Vektors
$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{y}-\hat{\boldsymbol{y}}=\begin{bmatrix}4\\4\\4\\4\end{bmatrix}\quad \text{und daher}\quad ||\boldsymbol{z}||=\sqrt{4^2+4^2+4^2+4^2}=8.$$

2. Wir müssen $A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$ lösen. Wir berechnen
$$A^T A = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad A^T\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -24 \\ -2 \end{pmatrix}$$
und durch elementare Zeilenoperationen finden wir
$$\left(\begin{array}{cc|c} 12 & 8 & -24 \\ 8 & 10 & -2 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -6 \\ 24 & 30 & -6 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -6 \\ 0 & 14 & 42 \end{array}\right)$$
$$\iff \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \implies \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$
Der Fehler des kleinste Quadrate Problems ist dann $\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\| = 0$, also ist $\hat{\mathbf{x}}$ sogar eine Lösung von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

3. Wir wenden die elegante Methode aus der Vorlesung an. Die zweite und dritte Spalte von A sind orthogonal und die erste Spalte ist gerade die Summe der zweiten und dritten Spalte. Wir bezeichnen die zweite und dritte Spalte von A mit $\boldsymbol{u}$ bzw. $\boldsymbol{v}$ und können somit direkt die Projektion von $\boldsymbol{b}$ in den Spaltenraum von A bestimmen:
$$\operatorname{proj}_{\mathrm{Col}(A)}(\boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} + \frac{\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} = \frac{4}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{10}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$
Damit ist $\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ eine Lösung des kleinste Quadrate Problems. Wie man leicht sieht (oder nachrechnet), wird der Kern $\ker(A)$ von $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ erzeugt und somit sind alle Lösungen des kleinste Quadrate Problems gegeben durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$.
Der Fehler des kleinste Quadrate Problems ist $\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\| = \sqrt{20}$.

4. In einer Skizze ist sofort klar, dass die Menge aller Lösungen des kleinste Quadrate Problems die Gerade sein muss, die in der Mitte zwischen den beiden parallelen Geraden $x + y = 2$ und $x + y = 4$ verläuft. Wir rechnen nach:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^T\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \implies \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -t+3 \\ t \end{pmatrix}$$
Das bedeutet, dass die Menge aller Lösungen des kleinste Quadrate Problems wie erwartet die Gerade $x + y = 3$ ist.

5. Eine QR-Zerlegung von A ist
$$A = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Wir nutzen diese, um die (eindeutige) Lösung des kleinste Quadrate Problems anzugeben (vgl. Vorlesung):
$$\hat{\boldsymbol{x}} = R^{-1}Q^T\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3

1. Zeigen Sie, dass die Spalten einer $m \times n$ Matrix A linear unabhängig sind genau dann, wenn $A^T A$ invertierbar ist.

2. Bestimmen Sie die Gerade, die die folgenden Punkte am besten approximiert, d.h. so dass die Summe der Quadrate der vertikalen Abstände der Punkte zur Geraden minimiert wird.

$$(2,1), \quad (5,2), \quad (7,3), \quad (8,3)$$

   Hinweis: Stellen Sie ein entsprechendes kleinste Quadrate Problem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ auf und fertigen Sie eine Skizze an.

Lösung:

1. Wir zeigen zunächst, dass

$$\mathrm{Ker}(A^T A) = \mathrm{Ker}(A)$$

   gilt. Wenn $A\mathbf{x} = 0$ gilt, dann gilt auch $(A^T A)\mathbf{x} = 0$; und falls $(A^T A)\mathbf{x} = 0$, dann gilt auch $0 = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T \cdot (A\mathbf{x}) = \|A\mathbf{x}\|^2$, und daher $A\mathbf{x} = 0$.

   Laut Definition ist $A^T A$ invertierbar äquivalent zu $\mathrm{Ker}(A^T A) = \{0\}$, und somit äquivalent zu $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$, was wiederum dazu äquivalent dazu ist, dass die Spalten von A linear unabhängig sind (denn wenn sie abhängig wären, würde es einen von 0 verschiedenen Vektor in $\mathrm{Ker}(A)$ geben).

2. Der vertikale Abstand der Punkte (x_0, y_0) von der Geraden $y = ax + b$ ist $(ax_0 + b) - y_0$, also möchten wir

$$Q = (2a + b - 1)^2 + (5a + b - 2)^2 + (7a + b - 3)^2 + (8a + b - 3)^2$$

   minimieren. Dies kann wie folgt als kleinste Quadrate Problem aufgefasst werden: Für

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

   suchen wir gerade die Lösung $\hat{\mathbf{x}}$ des kleinste Quadrate Problems, denn

$$\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\| = \| \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \| = \| \begin{pmatrix} 2a + b - 1 \\ 5a + b - 2 \\ 7a + b - 3 \\ 8a + b - 3 \end{pmatrix} \| = Q^2,$$

   und wenn wir den kleinste Quadrate Fehler minimieren, minimieren wir auch Q (da $Q \geq 0$).

   Wir lösen also $A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$ wie üblich.

$$A^T A = \begin{pmatrix} 142 & 22 \\ 22 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^T\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 57 \\ 9 \end{pmatrix}$$

   Die Inverse von $A^T A$ kann mit Hilfe der Inversenformel fï 2 $\times$ 2 Matrizen aus der Vorlesung bestimmt werden und wir erhalten:

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T\mathbf{b} = \frac{1}{84} \begin{pmatrix} 4 & -22 \\ -22 & 142 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{84} \begin{pmatrix} 30 \\ 24 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   Die gesuchte Gerade, die die Punkte am besten annähert, ist $y = \frac{5}{14}x + \frac{4}{14}$ bzw. $5x - 14y = -4$. Mit Hilfe der Skizze sollte man auf dasselbe Ergebnis kommen.

Wahr/Falsch
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.
Kapitel 6.4 und 6.5

1. Wenn $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ eine orthogonale Basis von W ist, dann ist $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, c\boldsymbol{v_3}$ für $c \in \mathbb{R}$ eine orthogonale Basis.
2. Für einen Unterraum W und $\boldsymbol{x} \in W^{\perp}$ gilt $\text{proj}_W(\boldsymbol{x}) = 0$.
3. Die Lösung des kleinste Quadrate Problems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist der Punkt im Spaltenraum von A, der den kleinsten Abstand zu $\mathbf{b}$ hat.
4. Die Lösung des kleinste Quadrate Problems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist $\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$.
5. Wenn die Spalten von A linear unabhängig sind, dann hat das kleinste Quadrate Problem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ eine eindeutige Lösung.
6. Wenn $A = QR$ eine QR-Zerlegung von A ist, dann ist die Lösung des kleinste Quadrate Problems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gerade $\hat{\mathbf{x}} = R^{-1} Q^T \mathbf{b}$.

Lösung: Kapitel 6.4 und 6.5

1. F
2. W
3. W
4. F
5. W
6. F