Algèbre linéaire avancée II
Prof. F. Eisenbrand

Mardi 16 avril 2019
EPFL

Examen Blanc

L'examen peut être rendu aux assistants le mardi 30 avril avant la leçon d'exercice.

Étudiant(e) :

Salle :

Durée : 2 heures

Grading : L'examen est divisé en trois parties. Travaillez sur toutes les questions.

— Pour chacune des questions *Vrai/Faux*, décidez si elle est vraie ou fausse. Pour chaque affirmation, on compte +1 point si la réponse est correcte, 0 point s'il n'y a pas de réponse, et -1 point si la réponse est fausse, ou s'il y a plusieurs croix.

— Les questions *QCM* sont des questions à choix multiples. Dans chaque question, il n'y a qu'une seule réponse correcte, et on compte +3 points si la réponse est correcte, 0 s'il n'y a pas de réponse, et -1 point si la réponse est fausse, ou s'il y a plusieurs croix.

— Pour chacune des questions ouvertes, on compte +8 points au maximum.

Avant de commencer :

— Utilisez un stylo de couleur autre que le rouge, et pas de crayon.

— La réponse doit être écrite sous l'exercice, et éventuellement au recto. Elle doit être rédigée d'une manière claire et compréhensible.

— Si vous avez besoin de feuilles supplémentaires, indiquez sur chaque feuille supplémentaire votre nom et l'exercice correspondant.

— Des feuilles de brouillon seront à votre disposition. Elles ne seront pas corrigées.

— Aucune aide n'est permise pendant l'examen. Aucun matériel n'est autorisé.

L'objectif de cet examen blanc est de vous donner une idée de ce à quoi ressemblera l'examen final. L'examen final aura le même format, et aura une durée de 3 heures. Les exercices de cet examen couvrent seulement une partie des sujets du cours ; par contre, on vous conseille de réviser aussi tous les autres sujets. On vous suggère de faire cet examen chez vous en vous mettant dans des conditions les plus proches de celles de l'examen (cf ci-dessus). Afin de recevoir d'éventuelles remarques et une évaluation informelle, vous pouvez rendre l'examen le 30 avril 2019 durant la séance d'exercices.

Bon courage !

Exercice 1 - Vrai/Faux
Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique. Pour n'importe quel sous-espace vectoriel U de V, on denote $U^{\perp} = \{v \in V : \langle u, v \rangle = 0 \; \forall \, u \in U\}$. Pour chaque sous-espace W de V, on a $(W^{\perp})^{\perp} \subseteq W$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Exercice 2 - Vrai/Faux
Soient $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Alors, les matrices par blocs

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

sont congruentes.

☐ VRAI ☐ FAUX

Exercice 3 - Vrai/Faux
Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice inversible et diagonalisable avec colonnes $a_1, \ldots, a_n$. Soit $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq (\mathbb{R}^n)^*$ la base duale de $\{a_1, \ldots, a_n\}$ et, pour $1 \leq i \leq n$, soient $d_i \in \mathbb{R}^n$ tels que $v_i(x) = \langle d_i, x \rangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Alors, la matrice $D = (d_1, \ldots, d_n)$ est diagonalisable.

☐ VRAI ☐ FAUX

Exercice 4 - Vrai/Faux
Soient $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice hermitienne et $I \in \mathbb{C}^{n \times n}$ la matrice identité, alors $A + iI$ est toujours inversible. (Où $i \in \mathbb{C}$ denote l'unité imaginaire.)

☐ VRAI ☐ FAUX

Exercice 5 - Vrai/Faux
Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$, B une base de V, et f, g deux formes sesquilinéaires. Si B est une base orthonormale par rapport à f et par rapport à g, alors $f = g$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Exercice 6 - Vrai/Faux
Considérons $V = \mathbb{R}^n$ avec deux formes bilinéaires symétriques semi-définies positives $f(x, y) = x^T Ay$ et $g(x, y) = x^T By$, où $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si f et g ont le même indice de nullité, alors les matrices A et B sont congruentes.

☐ VRAI ☐ FAUX

Exercice 7 - Vrai/Faux
Si les matrices A et B sont hermitiennes alors AB est hermitienne.

☐ VRAI ☐ FAUX

Exercice 8 - Vrai/Faux
Soit $V = \mathbb{F}_2^2$ muni de la forme bilinéaire symétrique $g:\ \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2$ définie par

$$g(x, y) := x^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y.$$

Il existe une base orthogonale de $\mathbb{F}_2^2$ par rapport à g.

☐ VRAI ☐ FAUX

Exercice 9 - QCM
Soit $V = \mathbb{F}_2^3$ et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \to \mathbb{F}_2$ défini par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Laquelle des assertions suivantes est <u>fausse</u> ?

- ☐ Il existe $\{0\} \neq W \subseteq V$ et $v \in V$ tels que $v \notin W + W^{\perp}$.
- ☐ Il existe $\{0\} \neq W \subseteq V$ tel que $W \subseteq W^{\perp}$.
- ☐ Il existe $\{0\} \neq W \subseteq V$ tel que $V = W \oplus W^{\perp}$.
- ☐ Il existe $v \in V$ tel que $v \notin W^{\perp}$ pour chaque $\{0\} \neq W \subseteq V$.

Exercice 10 - QCM
Soit $V = \mathbb{R}^4$ et soient $v, v_1, v_2, v_3 \in V$ définis comme

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $d = \min_{u \in span\{v_1, v_2, v_3\}} ||v - u||$. Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

- ☐ $d = \frac{1}{\sqrt{18}}$.
- ☐ $d = \frac{1}{18}$.
- ☐ $d = \sqrt{\frac{2}{9}}$.
- ☐ $d = \frac{\sqrt{2}}{9}$.

Exercice 11 - QCM
Soit $m \geq n$ et soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ les valeurs singulières d'une matrice $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

- ☐ $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2$ sont les valeurs propres positives de AA^T.
- ☐ $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2$ sont les valeurs propres positives de $A^T A$.
- ☐ $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2$ sont les valeurs propres positives de $A\overline{A}^T$.
- ☐ $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2$ sont les valeurs propres positives de $\overline{A}A$.

Question 12 : *Cette question est notée sur 8 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 * *Réservé au correcteur*

Soient $V = \mathbb{R}^n$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire standard, $\{b_1, \dots, b_n\}$ une base de V, et $\{b_1^\star, \dots, b_n^\star\}$ la base orthogonale de V obtenue à partir de $\{b_1, \dots, b_n\}$ après avoir appliqué le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Maintenant soient

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \qquad B^\star = \begin{pmatrix} b_1^\star & \dots & b_n^\star \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Finalement, soit $\Delta = \max_{i,j} |(b_j)_i|$.

a) Montrer qu'il existe une matrice M triangulaire supérieure ($\forall i > j : \ M_{ij} = 0$), avec des un sur la diagonale ($\forall i : \ M_{ii} = 1$), telle que $B = B^\star M$.

b) Montrer que $|\det(B)| = \Pi_{j=1}^n ||b_j^\star||_2$.

c) Montrer que $|\det(B)| \leq (\sqrt{n}\Delta)^n$

Question 13 : *Cette question est notée sur* 8 *points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 * *Réservé au correcteur*

Soit $V = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire standard, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, et $V_1 = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_k\}$, $V_2 = \operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_l\} \subseteq \mathbb{R}^n$ deux sous-espaces avec $x_1, \ldots, x_k$ linéairement indépendants et $y_1, \ldots, y_l$ linéairement indépendants. Définissons $H_1 := \{v_1 + w \mid w \in V_1\}$ et $H_2 := \{v_2 + w \mid w \in V_2\}$ et considérons le problème

$$(\star) \qquad \min_{x \in H_1, y \in H_2} \|x - y\| \,.$$

a) Transformer le problème $(\star)$ en problème de moindres carrés. C'est-à-dire, donner une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times r}$ (pour certains nombres $r, m \in \mathbb{N}$) et un vecteur $b \in \mathbb{R}^m$ tels que

$$\min_{x \in H_1, y \in H_2} \|x - y\| = \min_{z \in \mathbb{R}^r} \|Az - b\| \,.$$

b) Montrer que les solutions optimales $x^\star$ et $y^\star$ du problème $(\star)$ sont uniques si et seulement si $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Question 14 : *Cette question est notée sur* 8 *points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 * *Réservé au correcteur*

Soient $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^3$, et $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ la forme quadratique

$$Q(x) = 7x_1^2 + x_2^2 + 7x_3^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

On indique la norme euclidienne par $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ et la 2-sphère par $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ \|x\| = 1\}$.

a) Déterminer les valeurs $N_{min} = \min\{Q(x) :\ x \in S^2\}$ et $N_{max} = \max\{Q(x) :\ x \in S^2\}$ et donner deux vecteurs atteignant ces valeurs.

b) Pour chaque valeur $m \in [N_{min,}, N_{max}]$, trouver un vecteur $v_m \in S^2$ tel que $Q(v_m) = m$.

c) Déterminer l'ensemble des vecteurs $v \in S^2$ qui maximisent $Q(x)$.