Chapitre 6

Réponse harmonique

Solutions des problèmes de la section 6.4

6.4.1 Soit $p_i = p_{i+1}$, $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, un pôle double de G(z). Alors la décomposition en éléments simples (6.1) (vol. 1) comprend les éléments simples :

$$\frac{c_i z}{z - p_i} + \frac{c_{i+1} z}{(z - p_i)^2}$$

Si ce pôle double est nul, il faut remplacer, dans (6.1) (vol. 1), c_0 par :

$$\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{z} + \frac{\gamma_2}{z^2}$$

Dans le domaine temporel, ces expressions produisent les signaux :

$$c_i p_i^k + c_{i+1} k p_i^{k-1} \qquad k \ge 0$$

$$\gamma_0 \Delta(kh) + \gamma_1 \Delta(kh-h) + \gamma_2 \Delta(kh-2h) \qquad k \ge 0$$

Par conséquent, les conclusions du paragraphe 6.2.1 de meurent valides, sauf quand $\left|p_{i}\right|=1.$

6.4.2 Avec h = 0.025 s, nous avons :

$$H'(w) = H\left(\frac{1+0,0125w}{1-0,0125w}\right)$$
$$= \frac{0,0975}{\frac{1+0,0125w}{1-0,0125w} - 0,95}$$
$$= 0,05\frac{80-w}{w+2,05}$$

D'où :

$$H'(j\nu) = 0.05 \frac{80 - j\nu}{j\nu + 2.05}$$

On en déduit les valeurs asymptotiques :

$$H'(0) = 1.95$$
$$\lim_{\nu \to \infty} H'(j\nu) = -0.05$$

Le diagramme de Nyquist apparaît dans la figure 6.1.

Fig. 6.1 Diagramme de Nyquist pour un entraînement électrique en vitesse.

Afin de tracer de façon asymptotique les diagrammes de Bode, "déroulons" la pulsation ν de 0 à l'infini. Pour $\nu \ll 2,05$:

$$H'(j\nu) = 0.05 \frac{80}{2.05} = 1.95$$
 $|H'(j\nu)| = 1.95$ $\operatorname{Arg} H'(j\nu) = 0^{\circ}$

Et, quand $2,05 \ll \nu \ll 80$:

$$H'(j\nu) = 0.05 \frac{80}{j\nu} = \frac{4}{j\nu}$$
 $|H'(j\nu)| = \frac{4}{\nu}$ $\operatorname{Arg} H'(j\nu) = -90^{\circ}$

Finalement, lorsque $\nu \gg 80$:

$$H'(j\nu) = 0.05 \frac{-j\nu}{j\nu} = -0.05$$
 $|H'(j\nu)| = 0.05$ $\operatorname{Arg} H'(j\nu) = -180^{\circ}$

Les diagrammes de Bode sont représentés dans la figure 6.2, y compris leurs approximations par segments de droite.

Fig. 6.2 Diagrammes de Bode pour un entraînement électrique en vitesse.

6.4.3 On a, avec h = 0.025 s :

$$H'(w) = H\left(\frac{1+0.0125w}{1-0.0125w}\right)$$
$$= \frac{10^{-3}\left(1.23\frac{1+0.0125w}{1-0.0125w} + 1.21\right)}{\left(\frac{1+0.0125w}{1-0.0125w} - 1\right)\left(\frac{1+0.0125w}{1-0.0125w} - 0.95\right)}$$
$$= 0.51 \cdot 10^{-5}\frac{(w+9760)(80-w)}{w(w+2.05)}$$

 Et :

$$H'(j\nu) = 0.51 \cdot 10^{-5} \frac{(j\nu + 9760)(80 - j\nu)}{j\nu(j\nu + 2.05)}$$

Nous en déduisons les valeurs asymptotiques :

$$\lim_{\nu \to 0} \operatorname{Arg} H'(j\nu) = -90^{\circ}$$
$$\lim_{\nu \to \infty} H'(j\nu) = -0.51 \cdot 10^{-5}$$

Cette fonction de transfert harmonique est tracée dans la figure 6.3.

Fig. 6.3 Diagramme de Nyquist pour un entraînement électrique en position.

6.4.4 La fonction de transfert échantillonnée du processus s'écrit (problème 5.5.4):

$$H(z) = \gamma \frac{h^2}{2} \cdot \frac{z+1}{(z-1)^2}$$

 $\mathrm{Donc}:$

$$H'(w) = \gamma \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\frac{1 + \frac{h}{2}w}{1 - \frac{h}{2}w} + 1}{\left(\frac{1 + \frac{h}{2}w}{1 - \frac{h}{2}w} - 1\right)^2} = \gamma \frac{h}{2} \cdot \frac{\frac{2}{h} - w}{w^2}$$

H'(w) est une fonction rationnelle dont le degré du dénominateur est strictement plus grand que celui du numérateur. Ceci est dû au zéro z = -1 du numérateur.

Pour
$$\nu \ll 2/h$$
:

$$H'(j\nu) = \gamma \frac{h}{2} \cdot \frac{\frac{2}{h}}{(j\nu)^2} = -\frac{\gamma}{\nu^2} \qquad |H'(j\nu)| = \frac{\gamma}{\nu^2} \qquad \operatorname{Arg} H'(j\nu) = -180^{\circ}$$

Et, quand $\nu \gg 2/h$:

$$H'(\mathbf{j}\nu) = \gamma \frac{h}{2} \cdot \frac{-\mathbf{j}\nu}{(\mathbf{j}\nu)^2} = -\frac{\gamma \frac{h}{2}}{\mathbf{j}\nu} \qquad |H'(\mathbf{j}\nu)| = \frac{\gamma \frac{h}{2}}{\nu} \qquad \arg H'(\mathbf{j}\nu) = -270^{\circ}$$

Le diagramme de Nyquist est tracé dans la figure 6.4 et les diagrammes de Bode asymptotiques dans la figure 6.5.

Fig. 6.4 Diagramme de Nyquist pour un entraînement électrique en position par moteur brushless.

Fig. 6.5 Diagrammes de Bode pour un entraînement électrique en position par moteur brushless.

6.4.5 Dans l'exemple 1.42, la fréquence d'échantillonnage vaut $f_e = 10$ Hz. Avec une entrée sinusoïdale de fréquence $f_e/2 = 5$ Hz et une phase nulle, à savoir l'entrée $\sin(2\pi 5t)$, les développements du paragraphe 6.3.2 révèlent que la sortie du processus représenté dans la figure 1.86 (vol. 1) est nulle. Avec l'entrée $\sin(2\pi 9, 9t)$ de fréquence f = 9,9 Hz, il ressort de ces développements que la sortie est, en ne considérant que le premier harmonique, une sinusoïde de fréquence $f_e - f = 10 - 9,9 = 0,1$ Hz.

6.4.6 Nous pouvons écrire :

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{\frac{1}{\tau}}{s(s+\frac{1}{\tau})} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{\tau}}$$

Alors :

$$H(z) = \frac{z-1}{z} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-\frac{h}{\tau}}} \right)$$
$$= 1 - \frac{z-1}{z-e^{-\frac{h}{\tau}}}$$
$$= \frac{1-e^{-\frac{h}{\tau}}}{z-e^{-\frac{h}{\tau}}}$$

Par conséquent :

$$H'(w) = \frac{1 - e^{-\frac{h}{\tau}}}{\frac{1 + \frac{h}{2}w}{1 - \frac{h}{2}w} - e^{-\frac{h}{\tau}}}$$
$$= \frac{1 - e^{-\frac{h}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{h}{\tau}}} \cdot \frac{\frac{2}{h} - w}{w + \frac{2}{h} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{h}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{h}{\tau}}}}$$

Et:

$$H'(j\nu) = \frac{1 - e^{-\frac{h}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{h}{\tau}}} \cdot \frac{\frac{2}{h} - j\nu}{j\nu + \frac{2}{h} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{h}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{h}{\tau}}}}$$

On en déduit les valeurs asymptotiques :

$$H'(0) = 1$$
$$\lim_{\nu \to \infty} H'(j\nu) = -\frac{1 - e^{-\frac{h}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{h}{\tau}}} \in] -1, 0[$$

Le diagramme de Nyquist est tracé dans la figure 6.6.

Fig. $6.6\,$ Diagramme de Nyquist.

Les diagrammes de Bode asymptotiques se déterminent en « déroulant » la pulsation ν de 0 à l'infini :

$$\nu \ll \frac{2}{h} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{h}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{h}{\tau}}} \qquad H'(j\nu) = 1 \quad |H'(j\nu)| = 1 \quad \operatorname{Arg} H'(j\nu) = 0^{\circ}$$
$$\frac{2}{h} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{h}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{h}{\tau}}} \ll \nu \ll \frac{2}{h} \qquad H'(j\nu) = \frac{1 - e^{-\frac{h}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{h}{\tau}}} \cdot \frac{\frac{2}{h}}{j\nu}$$
$$|H'(j\nu)| = \frac{1 - e^{-\frac{h}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{h}{\tau}}} \cdot \frac{\frac{2}{h}}{\nu} \qquad \operatorname{Arg} H'(j\nu) = -90^{\circ}$$
$$\nu \gg \frac{2}{h} \qquad H'(j\nu) = -\frac{1 - e^{-\frac{h}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{h}{\tau}}}$$

$$|H'(j\nu)| = \frac{1 - e^{-\frac{h}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{h}{\tau}}}$$
 $\operatorname{Arg} H'(j\nu) = -180^{\circ}$

Il en résulte les diagrammes de Bode asymptotiques de la figure 6.7.

Fig. 6.7 Diagrammes de Bode.

6.4.7 Pour $\omega/2\pi = 2$ Hz, la sortie observée présente cette même fréquence (fig. 6.8). Des battements surviennent quand $\omega/2\pi = 19$ Hz; la fréquence de l'enveloppe vaut 20-19 = 1 Hz. Aucune transmission n'a lieu à la fréquence de Nyquist $\omega/2\pi = 20$ Hz. Finalement, lorsque $\omega/2\pi = 39$ Hz, un signal de fréquence 40 - 39 = 1 Hz apparaît.

Fig. 6.8 Réponse harmonique en boucle ouverte de l'entraı̂nement dans les cas $\omega/2\pi$ =2, 19, 20, 39 Hz.

6.4.8 La fonction de transfert du dispositif est la transformée en z de sa réponse impulsionnelle :

$$G(z) = \frac{z}{z-1}$$

Donc :

$$G'(w) = \frac{\frac{1 + \frac{h}{2}w}{1 - \frac{h}{2}w}}{\frac{1 + \frac{h}{2}w}{1 - \frac{h}{2}w} - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{w + \frac{2}{h}}{w}$$

Et:

$$G'(j\nu) = \frac{1}{2} \cdot \frac{j\nu + \frac{2}{h}}{j\nu}$$

Le diagramme de Nyquist, tracé dans la figure 6.9, s'obtient aisément en notant que :

$$G'(\mathbf{j}\nu) = \frac{1}{2} - \mathbf{j}\frac{1}{h\nu}$$

Fig. 6.9 Diagramme de Nyquist.

Pour $\nu \ll 2/h$:

$$G'(j\nu) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2}{h}}{j\nu} = \frac{1}{jh\nu}$$
 $|G'(j\nu)| = \frac{1}{h\nu}$ $\operatorname{Arg} G'(j\nu) = -90^{\circ}$

Et, quand $\nu \gg 2/h$:

$$G'(j\nu) = \frac{1}{2}$$
 $|G'(j\nu)| = \frac{1}{2}$ $\operatorname{Arg} G'(j\nu) = 0^{\circ}$

Il en découle les diagrammes de Bode asymptotiques de la figure 6.10

Fig. 6.10 Diagrammes de Bode.

Ce dispositif peut être considéré comme un intégrateur numérique.

6.4.9 Lorsque l'entrée u(kh) est l'impulsion unité $\Delta(kh)$ la sortie du système est égale à sa réponse impulsionnelle ; ici :

$$g(kh) = \frac{\Delta(kh) - \Delta(kh - h)}{h}$$

D'où la fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{1}{h} \left(\mathcal{Z} \{ \Delta(kh) \} - \mathcal{Z} \{ \Delta(kh-h) \} \right)$$
$$= \frac{1}{h} (1 - z^{-1})$$
$$= \frac{z - 1}{hz}$$

Par conséquent :

$$G'(w) = \frac{\frac{1 + \frac{h}{2}w}{1 - \frac{h}{2}w} - 1}{\frac{1 + \frac{h}{2}w}{1 - \frac{h}{2}w}} = \frac{2}{h} \cdot \frac{w}{w + \frac{2}{h}}$$

 Et :

$$G'(\mathbf{j}\nu) = \frac{2}{h} \cdot \frac{\mathbf{j}\nu}{\mathbf{j}\nu + \frac{2}{h}}$$

Pour $\nu \ll 2/h$:

 $G'(\mathbf{j}\nu) = \mathbf{j}\nu$ $|G'(\mathbf{j}\nu)| = \nu$ $\operatorname{Arg} G'(\mathbf{j}\nu) = 90^{\circ}$

Et, lorsque $\nu \gg 2/h$:

$$G'(\mathbf{j}\nu) = \frac{2}{h}$$
 $|G'(\mathbf{j}\nu)| = \frac{2}{h}$ $\operatorname{Arg} G'(\mathbf{j}\nu) = 0^{\circ}$

Le diagramme de Nyquist apparaît dans la figure 6.11 et les diagrammes de Bode asymptotiques dans la figure 6.12.

Fig. 6.11 Diagramme de Nyquist.

Fig. 6.12 Diagrammes de Bode.

6.4.10 Nous avons :

$$K'(z) = K_p \left(\begin{array}{c} \frac{h}{T_i} \cdot \frac{1 + \frac{h}{2}w}{1 - \frac{h}{2}w} \\ 1 + \frac{1 + \frac{h}{2}w}{1 - \frac{h}{2}w} \\ \frac{1 + \frac{h}{2}w}{1 - \frac{h}{2}w} - 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \frac{1 + \frac{h}{2}w}{1 - \frac{h}{2}w} \\ 1 + \frac{T_d}{h} \cdot \frac{1 - \frac{h}{2}w}{1 - \frac{h}{2}w} \\ \frac{1 + \frac{h}{2}w}{1 - \frac{h}{2}w} \end{array} \right) \\ = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i} \cdot \frac{1 + \frac{h}{2}w}{w} \right) \left(1 + T_d \frac{w}{1 + \frac{h}{2}w} \right)$$

En posant $w={\rm j}\nu$ et en négligeant ${\rm j}\frac{h}{2}\nu$ vis-à-vis de 1 :

$$K'(j\nu) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i j\nu}\right) (1 + T_d j\nu)$$
$$= K_p T_d \frac{\left(j\nu + \frac{1}{T_i}\right) \left(j\nu + \frac{1}{T_d}\right)}{j\nu}$$

Lorsque $\nu \ll 1/T_i$:

$$K'(j\nu) = K_p \frac{1}{j\nu T_i}$$
 $|K'(j\nu)| = K_p \frac{1}{\nu T_i}$ $\operatorname{Arg} K'(j\nu) = -90^{\circ}$

Quand $1/T_i \ll \nu \ll 1/T_d$:

 $K'(j\nu) = K_p$ $|K'(j\nu)| = K_p$ $\operatorname{Arg} K'(j\nu) = 0^{\circ}$

Et, si $\nu \gg 1/T_d$:

$$K'(j\nu) = K_p T_d j\nu \qquad |K'(j\nu)| = K_p T_d \nu \qquad \operatorname{Arg} K'(j\nu) = 90^\circ$$

On en déduit les diagrammes de Bode de la figure 6.13.

Fig. 6.13 Diagrammes de Bode du régulateur PID.

6.4.11 Avec h = 1 s, on a :

$$H'(w) = H\left(\frac{1+0.5w}{1-0.5w}\right)$$

= $\frac{3}{\left(\frac{1+0.5w}{1-0.5w} - 1\right)\left(\frac{1+0.5w}{1-0.5w} - 0.5\right)}$
= $\frac{(2-w)^2}{w\left(w + \frac{2}{3}\right)}$

Et:

$$H'(j\nu) = \frac{(2-j\nu)^2}{j\nu\left(j\nu + \frac{2}{3}\right)}$$

Quand $\nu \ll 2/3$:

$$H'(j\nu) = \frac{4}{j\nu\frac{2}{3}} = \frac{6}{j\nu}$$
 $|H'(j\nu)| = \frac{6}{\nu}$ $\operatorname{Arg} H'(j\nu) = -90^{\circ}$

Pour $2/3 \ll \nu \ll 2$:

$$H'(j\nu) = \frac{4}{(j\nu)^2} = -\frac{4}{\nu^2}$$
 $|H'(j\nu)| = \frac{4}{\nu^2}$ $\operatorname{Arg} H'(j\nu) = -180^\circ$

Et, si $\nu \gg 2$:

$$H'(j\nu) = 1$$
 $|H'(j\nu)| = 1$ $\arg H'(j\nu) = -360^{\circ}$

Les diagrammes de Bode asymptotiques sont tracés dans la figure 6.14. En ce qui concerne $K_pH'(j\nu)$ avec $K_p = 0,056$, le graphique d'atténuation, en traitillé dans la figure 6.14, se déduit de celui de $H'(j\nu)$ par une translation verticale de $20 \log 0,056 = -25$ dB : le graphique de phase n'est pas modifié puisque Arg $K_p=0$.

Fig. 6.14 Diagrammes de Bode.

6.4.12 Nous pouvons écrire :

$$H'(w) = H\left(\frac{1+0.5w}{1-0.5w}\right)$$
$$= \frac{0.015}{\frac{1+0.5w}{1-0.5w} - 0.985}$$
$$= 0.0076 \frac{2-w}{w+0.015}$$

Et:

$$H'(j\nu) = 0,0076 \frac{2 - j\nu}{j\nu + 0,015}$$

D'où les valeurs asymptotiques :

$$H'(0) = 1$$
$$\lim_{\nu \to \infty} H'(j\nu) = -0,0076$$

Le diagramme de Nyquist est tracé dans la figure 6.15.

Fig. 6.15 Diagramme de Nyquist.

6.4.13 On détermine tout d'abord :

$$H'(w) = \frac{h\gamma}{\frac{1+\frac{h}{2}w}{1-\frac{h}{2}w} - 1} = \frac{\gamma\left(1-\frac{h}{2}w\right)}{w}$$

D'où :

$$H'(j\nu) = \frac{\gamma \left(1 - \frac{h}{2}j\nu\right)}{j\nu} = -\gamma \frac{h}{2} - j\frac{\gamma}{\nu}$$

Il en découle le diagramme de Nyquist en traitillé dans la figure 6.16.

Fig. 6.16 Diagrammes de Nyquist.

En ce qui concerne le régulateur :

$$K'(w) = \frac{K_p}{\frac{1 + \frac{h}{2}w}{1 - \frac{h}{2}w}} = K_p \frac{1 - \frac{h}{2}w}{1 + \frac{h}{2}w}$$

Alors :

$$K'(\mathbf{j}\nu) = K_p \frac{1 - \frac{h}{2}\mathbf{j}\nu}{1 + \frac{h}{2}\mathbf{j}\nu}$$

 Et :

$$|K'(j\nu)| = K_p$$

Arg $K'(j\nu) = -2$ Arctg $\left(\frac{h}{2}\nu\right)$

Pour obtenir le diagramme de Nyquist de $K'(j\nu)H'(j\nu)$, il suffit donc de multiplier le module de chaque point du diagramme de Nyquist de $H'(j\nu)$ par K_p et d'augmenter son argument de $-2\operatorname{Arctg}\left(\frac{h}{2}\nu\right)$. En particulier :

$$\lim_{\nu \to \infty} |K'(j\nu)H'(j\nu)| = K_p \lim_{\nu \to \infty} |H'(j\nu)| = K_p \gamma \frac{h}{2}$$
$$\lim_{\nu \to \infty} \left(\arg \left(K'(j\nu)H'(j\nu) \right) \right)$$
$$= \lim_{\nu \to \infty} \operatorname{Arg} K'(j\nu) + \lim_{\nu \to \infty} \operatorname{Arg} H'(j\nu)$$
$$= \lim_{\nu \to \infty} \left(-2\operatorname{Arctg} \left(\frac{h}{2} \nu \right) \right) - \pi$$
$$= -2\pi$$

Le diagramme de Nyquist de $K'({\rm j}\nu)H'({\rm j}\nu)$ apparaı̂t en trait plein dans la figure 6.16.

6.4.14 Nous avons :

$$G'(w) = \frac{\frac{1+\frac{h}{2}w}{1-\frac{h}{2}w} + 0.5}{\left(\frac{1+\frac{h}{2}w}{1-\frac{h}{2}w}\right)^2} = 0.5\frac{\left(w+3\frac{2}{h}\right)\left(\frac{2}{h}-w\right)}{\left(w+\frac{2}{h}\right)^2}$$

Et:

$$G'(\mathbf{j}\nu) = 0.5 \frac{\left(\mathbf{j}\nu + 3\frac{2}{h}\right)\left(\frac{2}{h} - \mathbf{j}\nu\right)}{\left(\mathbf{j}\nu + \frac{2}{h}\right)^2}$$

Si $\nu \ll 2/h$:

$$G'(j\nu) = 0.5 \frac{3\frac{2}{h} \cdot \frac{2}{h}}{\left(\frac{2}{h}\right)^2} = 1.5 \qquad |G'(j\nu)| = 1.5 \qquad \operatorname{Arg} G'(j\nu) = 0^{\circ}$$

Si $2/h \ll \nu \ll 3 \cdot 2/h$:

$$G'(j\nu) = 0.5 \frac{3\frac{2}{h}(-j\nu)}{(j\nu)^2} = -\frac{3}{h}j\nu \qquad |G'(j\nu)| = \frac{3}{h}\nu \qquad \arg G'(j\nu) = -270^{\circ}$$

Et, lorsque $\nu \gg 3\cdot 2/h$:

$$G'(j\nu) = 0.5 \frac{j\nu(-j\nu)}{(j\nu)^2} = -0.5 \qquad |G'(j\nu)| = 0.5 \qquad \operatorname{Arg} G'(j\nu) = -180^{\circ}$$

Les diagrammes de Bode asymptotiques apparaissent dans la figure 6.17 et le diagramme de Nyquist dans la figure 6.18.

Fig. 6.17 Diagrammes de Bode

Fig. 6.18 Diagramme de Nyquist.



Fig. 6.1 Diagramme de Nyquist pour un entraı̂nement électrique en vitesse.



Fig. 6.2 Diagrammes de Bode pour un entraînement électrique en vitesse.



Fig. 6.3 Diagramme de Nyquist pour un entraînement électrique en position.



Fig. 6.4 Diagramme de Nyquist pour un entraînement électrique en position par moteur brushless.



Fig. 6.5 Diagrammes de Bode pour un entraînement électrique en position par moteur brushless.



Fig. 6.6 Diagramme de Nyquist.



Fig. 6.7 Diagrammes de Bode.



Fig. 6.8 Réponse harmonique en boucle ouverte de l'entraı̂nement dans les cas $\omega/2\pi$ =2, 19, 20, 39 Hz.



Fig. 6.9 Diagramme de Nyquist.



Fig. 6.10 Diagrammes de Bode.



Fig. 6.11 Diagramme de Nyquist.



Fig. 6.12 Diagrammes de Bode.



Fig. 6.13 Diagrammes de Bode du régulateur PID.



Fig. 6.14 Diagrammes de Bode.



Fig. 6.15 Diagramme de Nyquist.



Fig. 6.16 Diagrammes de Nyquist.



Fig. 6.17 Diagrammes de Bode



Fig. 6.18 Diagramme de Nyquist.