Circuit LC en régime transitoire – Exercice 1 - Corrigé

Conditions initiales

Selon la figure ci-dessous, on a :

$$u = u_C = U_0 \qquad t \le 0 \tag{1}$$

$$i = 0 \qquad t \le 0 \tag{2}$$

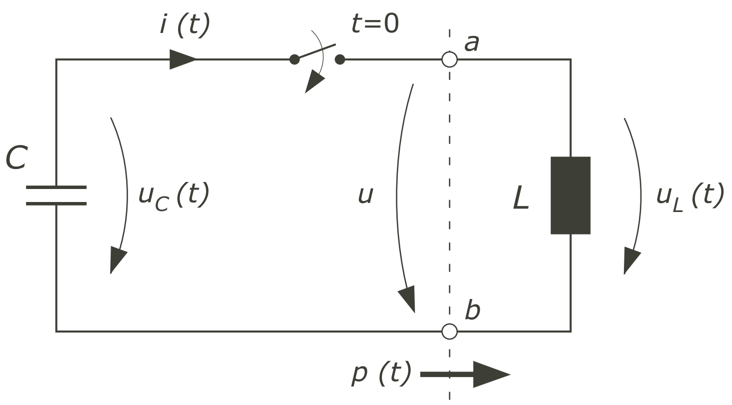

Figure 1

Equations des éléments simples pour $t > 0$:

- Capacité C :

$$u_C = U_0 - \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) \cdot dt \tag{3}$$

Le signe (-) provient du sens choisi pour le courant par rapport au sens de la tension u_C

- Inductance L :

$$u_L = L \frac{di(t)}{dt} \tag{4}$$

Equation de liaison pour $t > 0$:

$$u(t) = u_C(t) = u_L(t) \tag{5}$$

Avec (3) et (4) :

$$U_0 - \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) \cdot dt = L\frac{di(t)}{dt} \qquad (6)$$

Equation différentielle, résolution :

En dérivant (6) :

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = 0 \qquad t > 0 \qquad (7)$$

La solution de cette équation est une fonction sinusoïdale du temps :

$$i(t) = A\sin(B \cdot t + \beta) \qquad (8)$$

Constantes d'intégration :

- Remplacer (8) dans (7) :

$$-L\ A\ B^2 \sin(B \cdot t + \beta) + \frac{1}{C} A\sin(B \cdot t + \beta) = 0 \qquad (9)$$

d'où : $$B^2 = \frac{1}{LC} = \omega^2 \qquad (10)$$

avec ω étant la pulsation électrique propre du circuit.

- En $t = 0$, un <u>saut de courant dans l'inductance est impossible</u>, donc :

$\mapsto \quad i = 0$, d’où : $\beta = 0$

- En $t = 0$, un <u>saut de tension aux bornes du condensateur est impossible</u>, alors :

$$u_L\big|_{t=0} = U_0 = L\frac{di}{dt}\bigg|_{t=0} \qquad (11)$$

donc avec (8) et pour $t = 0$:

$$U_0 = L\ A\ \omega\ \cos(\omega t)\big|_{t=0} = L\ A\ \omega$$

d'où : $$A = \frac{U_0}{\omega L} \qquad (12)$$

Solution finale :

- Le courant *i* (*t*) par (8) et (10), (12) :

$$i(t) = 0 \qquad t \le 0 \qquad (12.1)$$

$$i(t) = \frac{U_0}{\omega L}\sin(\omega t) \qquad t > 0 \qquad (12.2)$$

où :

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

- la tension *u* (*t*) par (1) et (5), (4) (12.2) :

$$u(t) = U_0 \qquad t \le 0 \qquad (13.1)$$

$$u(t) = u_C = u_L = U_0\cos(\omega t) \qquad t > 0 \qquad (13.2)$$

Rem. : Calculons la puissance électrique instantanée traversant la section a-b (voir Fig. 1) :

$$p(t) = u(t)\cdot i(t)$$

avec les équations (12.1) à (13.2), on trouve :

$$p(t) = 0 \qquad t \le 0$$

$$p(t) = \frac{U_0^2}{\omega L}\sin(\omega t)\cdot\cos(\omega t) \qquad t > 0$$

$$p(t) = \frac{U_0^2}{2\omega L}\sin(2\omega t) \qquad t > 0$$

Il s'agit d'une fonction à valeur moyenne nulle; donc dans le circuit en question aucun transfert d'énergie active n'a lieu. On a :

$P(t) = 0$ puissance active

$Q(t) = p(t)$ puissance réactive

Dans un cas réel, un circuit électrique habituel présente une certaine résistance dissipant de l'énergie active.

La Figure 2 représente l'allure du courant ainsi que celles de la tension respectivement la puissance en fonction de ωt .

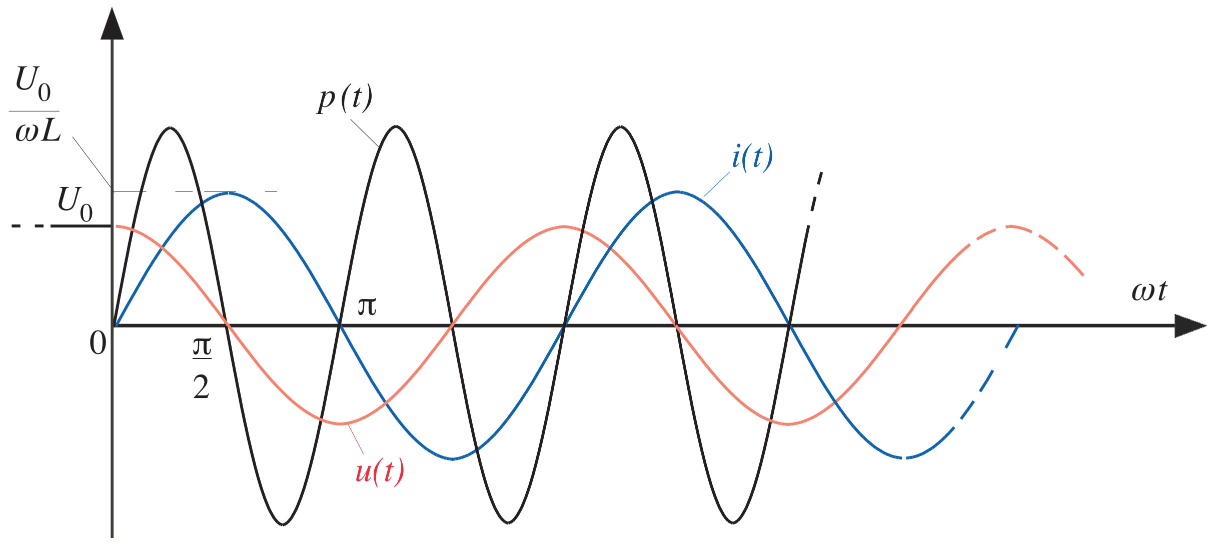

Figure 2