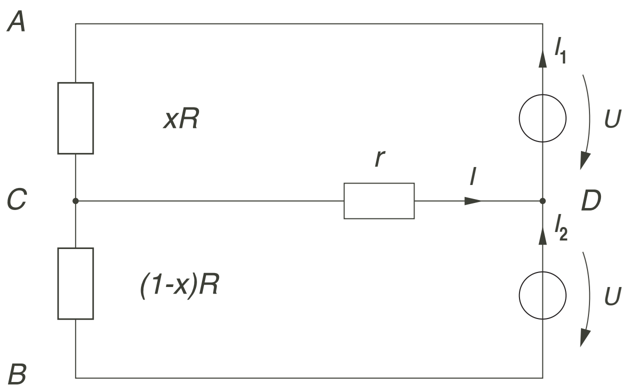
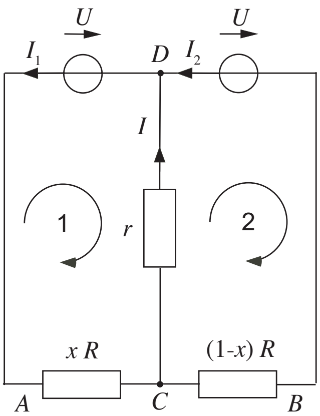
Théorèmes de Thévenin et de Norton – Corrigé Exercice 3

1) Le montage de la donnée, où l'on retrouve un curseur mobile C permettant de fractionner la résistance R, n'est autre que le montage ci-dessous :



ou :

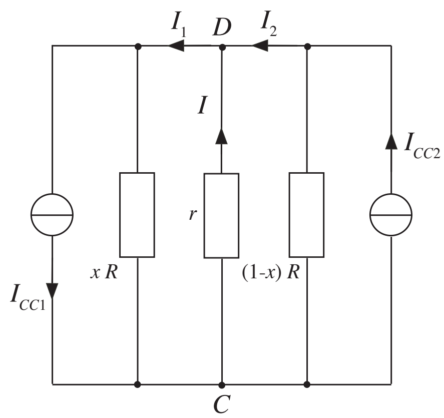


A l'aide des théorèmes de Thévenin et de Norton, il est possible de simplifier le schéma ci-dessus afin de déterminer la valeur du courant I. Les différentes étapes sont décrites ci-dessous :

Transformation (Thévenin ↦ Norton) des dipoles CAD et CBD :

$$I_{CC1} = \frac{U}{x\ R}$$

$$I_{CC2} = \frac{U}{(1-x)R}$$

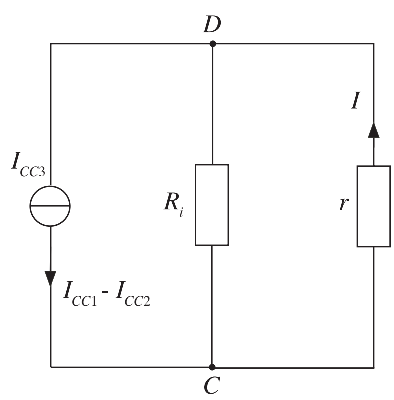


Addition des 2 sources de courant :

$$I_{CC3} = I_{CC1} - I_{CC2} = \frac{U(1-2x)}{x\ R(1-x)}$$

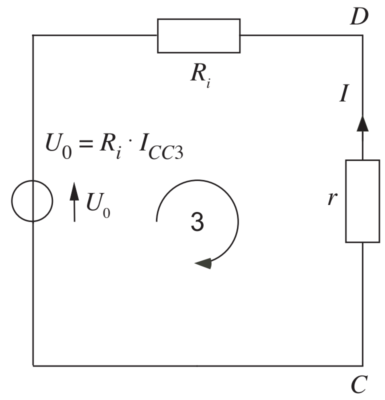
Mise en parallèle des 2 résistances $x\ R$ et $(1\text{-}x)\ R$:

$$R_i = \frac{x\ R(1-x)R}{x\ R + (1-x)R} = x(1-x)R$$



Transformation (Norton $\mapsto$ Thévenin) de la source de courant réelle composée de R_i et de I_{CC3} :

$$U_0 = R_i I_{CC3} = x(1-x)R\frac{U(1-2x)}{x\,R(1-x)} = U(1-2x)$$



A partir de là, il est facile de déterminer la valeur du courant *I*. En effet, d'après le théorème de Kirchhoff et en considérant la maille 3, il vient :

$U_0 - R_i I - r\,I = 0$ et donc : $I = \dfrac{U_0}{r + R_i} = \dfrac{U\,(1-2x)}{r + x\,(1-x)\,R}$

De la même manière, d'après la maille 1, il vient :

$U - r\,I - x\,R\,I_1 = 0$ et donc : $I_1 = \dfrac{U - r\,I}{x\,R} = U\dfrac{R\,(1-x) + 2r}{R\left[r + x(1-x)R\right]}$

Et la maille 2 donne :

$U + r\,I - (1-x)R\,I_2 = 0$ et donc : $I_2 = \dfrac{U + r\,I}{(1-x)R} = U\dfrac{R\,x + 2r}{R\left[r + x(1-x)R\right]}$

La symétrie du montage montre que I_2 se déduit de I_1 en remplaçant x par $(1\text{-}x)$.

2) Afin de déterminer les valeurs minimales des courants I_1 et I_2, il suffit de dériver leurs expressions par rapport à x et de chercher les zéros de la fonction dérivée :

I_1 minimal $\mapsto \dfrac{dI_1}{dx} = 0$ ce qui donne : $\dfrac{-R(r + x\,R - x^2R) - (R - 2x\,R)(R - x\,R + 2r)}{\left[r + x(1-x)R\right]^2} = 0$

Il suffit alors d'annuler le numérateur :

$$-R(r + x\,R - x^2R) - (R - 2x\,R)(R - x\,R + 2r) = 0$$

$$-3r\,R + 4x\,r\,R - R^2 + 2x\,R^2 - x^2R^2 = 0$$

$$x^2R - x(4r + 2R) + 3r + R = 0 \qquad (1)$$

Pour trouver I_2 minimal, il suffit de remplacer x par (1-x) dans la relation (1). Il vient :

$$I_2 \text{ minimal} \mapsto \frac{dI_2}{dx} = 0 \qquad \text{ce qui donne : } x^2 R + 4x\,r - r = 0 \tag{2}$$

La résolution de l'équation (2) donne : $x_{1,2} = \dfrac{-2r \pm \sqrt{4r^2 + r\,R}}{R}$ pour $0 < x < 1$ (3)

La résolution de l'équation (1) donne : $x_{1,2} = \dfrac{R + 2r \pm \sqrt{4r^2 + r\,R}}{R}$ pour $0 < x < 1$ (4)

Les valeurs minimales de I_1 et I_2 sont donc données par les relations (4) et (3) respectivement. Comme la valeur de x doit se situer entre 0 et 1, il est évident que l'on doit retenir le signe positif dans la relation (3), sans quoi on aurait une valeur négative pour x, et le signe négatif dans la relation (4), sans quoi on aurait une valeur supérieure à 1 pour x.

On a donc pour les valeurs minimales, les valeurs suivantes :

I_2 est minimal pour :

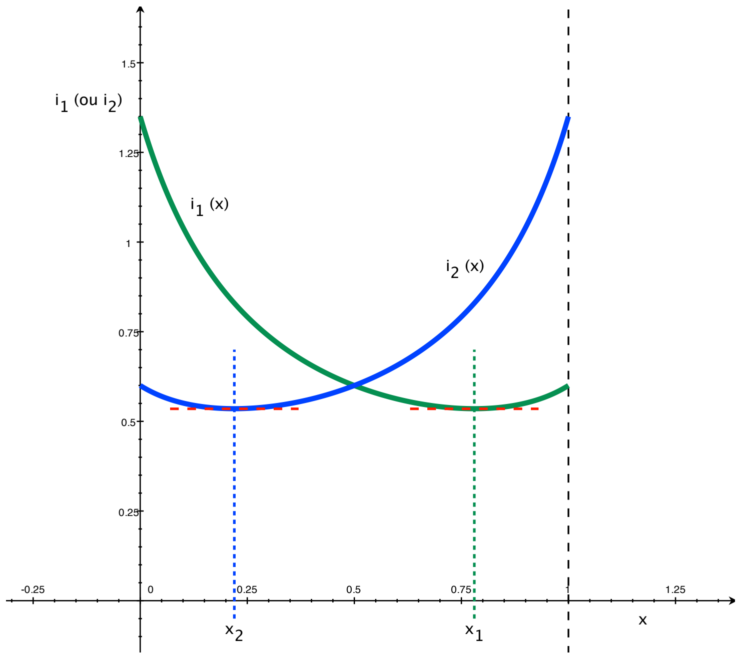
$$x = x_2 = \frac{-2r + \sqrt{4r^2 + r\,R}}{R}$$

A. N. : $x_2 = 0.22$

I_1 est minimal pour :

$$x = x_1 = \frac{R + 2r - \sqrt{4r^2 + r\,R}}{R}$$

A. N. : $x_1 = 0.78$



3) Calcul des rapports de puissances :

$$\frac{P_{AC}}{P_{CB}} = \frac{x\,R\,I_1^{\,2}}{(1-x)R\,I_2^{\,2}} = \frac{x}{1-x}\left(\frac{R(1-x)+2r}{R\,x+2r}\right)^2$$

I_1 est minimal pour $x = x_1 = 0.78$ Il vient donc : $\dfrac{P_{AC}}{P_{CB}} = 1.48$