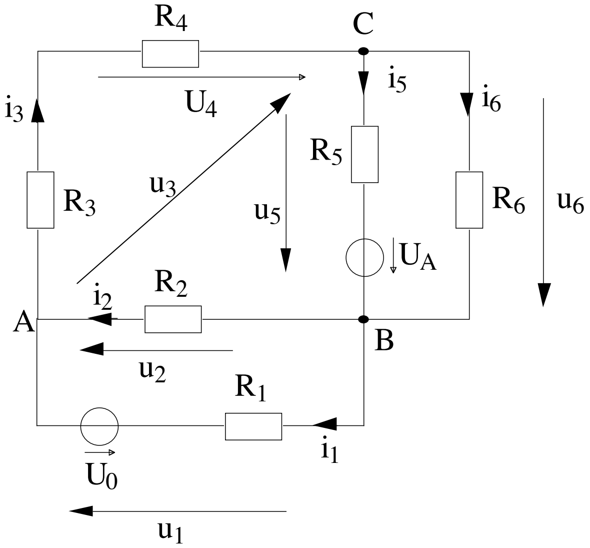
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Kirchhoff - Corrigé Exercice 3

Méthode de Kirchhoff

Pour étudier ce circuit, on applique la loi de Kirchhoff pour les tensions.



Equations de mailles

maille ABA	:	$u_1 - u_2 = 0$	(1)
maille CBC	:	$u_5 - u_6 = 0$	(2)
maille BACB	:	$u_2 + u_3 + u_5 = 0$	(3)

Or :

$u_1 \quad = R_1\, i_1 - U_0$ (4)

$u_2 \quad = R_2\, i_2$ (5)

$u_3 \quad = (R_3 + R_4)\, i_3$ (6)

$u_5 \quad = R_5\, i_5 + U_A$ (7)

$u_6 \quad = R_6\, i_6$ (8)

Equations de noeuds :

noeud A : $i_1 + i_2 - i_3 = 0$ (9)

noeud C : $i_3 - i_5 - i_6 = 0$ (10)

Pour calculer la tension U_4 à l'aide de ce système d'équations, il faut calculer i_3 pour ensuite déterminer $U_4 = R_4\, i_3$.

Pour résoudre le système d'équations (1) à (10), remplaçons les équations u_1 à u_6 par leurs expressions (4) à (8) dans (1) à (3). Il vient :

$R_1\, i_1 - U_0 - R_2\, i_2 = 0$ (11)
$R_5\, i_5 + U_A - R_6\, i_6 = 0$ (12)
$R_2\, i_2 + (R_3 + R_4)\, i_3 + R_5\, i_5 + U_A = 0$ (13)

On obtient un système de 5 équations (9) à (13) à 5 inconnues i_1, i_2, i_3, i_5 et i_6.

En tirant i_1 et i_6 de (9) et (10) et en remplaçant dans (11) à (13), il vient :

$i_1 = - i_2 + i_3$ (14)
$i_6 = i_3 - i_5$ (15)

(11) —> $- (R_1 + R_2)\, i_2 + R_1\, i_3 - U_0 = 0$ (16)

(12) —> $- R_6\, i_3 + U_A + (R_5 + R_6)\, i_5 = 0$ (17)

En passant aux valeurs numériques, il vient :

(13) —> $10\, i_2 + 25\, i_3 + 10\, i_5 + 20 = 0$

$$\boxed{2\, i_2 + 5\, i_3 + 2\, i_5 + 4 = 0} \quad (18)$$

(16) —> $- 15\, i_2 + 5\, i_3 - 10 = 0$

$$\boxed{- 3\, i_2 + i_3 - 2 = 0} \quad (19)$$

(17) —> $- 10\, i_3 + 20 + 20\, i_5 = 0$

$$\boxed{- i_3 + 2\, i_5 + 2 = 0} \quad (20)$$

A partir de (19), on a :

$$\boxed{i_2 = (i3-2)/3} \quad (21)$$

A partir de (20), on a :

$$\boxed{i_5 = (i3-2)/2} \quad (22)$$

En remplaçant i_2 et i_5 par leurs expressions (21) et (22) dans l'équation (18), on a :

2 (i3-2)/3 + 5 i_3 + (i_3 - 2) + 4 = 0

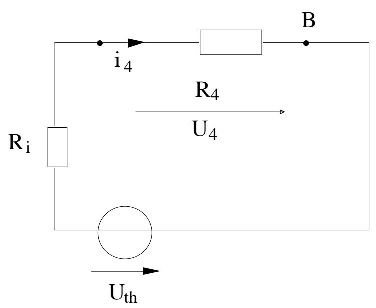
ce qui donne :

i_3 = - 2/20 = - 0,1 [A]

$U_4 = R_4\, i_3 = 5 \cdot (- 0,1) = - 0,5$ [V]

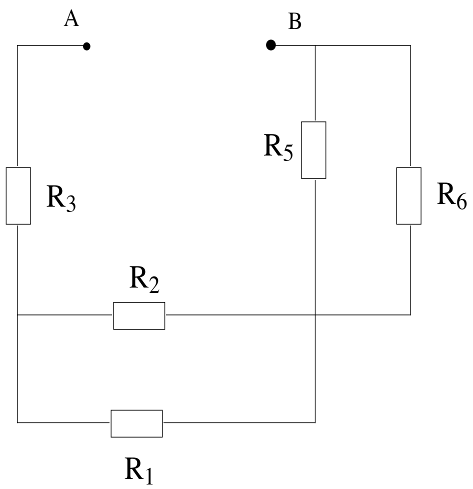
méthode de Thévenin

Pour calculer la tension u_4 il faut ramener le schéma du circuit au schéma suivant:



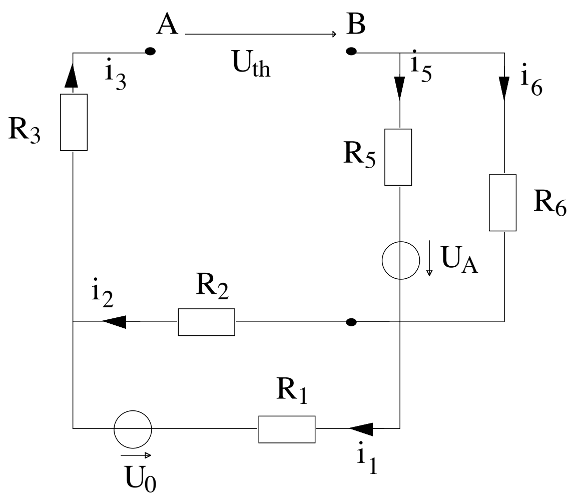
Calcul de la résistance interne R_i :

C'est la résistance vue des bornes A et B, lorsque les sources de tension sont court-circuitées



$$R_i = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} = \frac{85}{3}[\Omega]$$

Calcul de u_{th}:



On a : $i_3 = 0$

$i_1 + i_2 = 0 \qquad i_1 = - i_2$

$i_5 + i_6 = 0 \qquad i_5 = - i_6$

D'autre part:

$U_0 - R_1 i_1 + R_2 i_2 = 0$

$U_0 = R_1 i_1 - R_2 i_2 = (R_1 + R_2)\, i_1$

$$i_1 = \frac{U_0}{R_1 + R_2} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}\ [A]$$

$$i_2 = -\frac{2}{3}\ [A]$$

et

$U_A + R_5 i_5 - R_6 i_6 = 0$

$U_A = - R_5 i_5 + R_6 i_6 = - (R_5 + R_6)\, i_5$

$$i_5 = -\frac{U_A}{R_5 + R_6} = \frac{-20}{20} = -1\ [A]$$

La tension U_{th} vaut:

$$U_{th} = - R_3\, i_3 - R_2\, i_2 - U_A - R_5\, i_5 = - \frac{10}{3}[V]$$

En considérant le schéma simplifié de Thévenin, on a:

$$i_4 = \frac{U_{th}}{R_i + R_4}$$

et $U_4 = R_4\, i_4 = \dfrac{R_4}{R_i + R_4}\; U_{th}$

$$U_4 = \frac{5}{(85/3)+5}\left(-\frac{10}{3}\right) = -0,5\ [V]$$

On retrouve la valeur calculée par les équations de mailles du circuit.