Corrigés 3 : La théorie des groupes

Exercice 3.1

Démontrez que la multiplication des nombre réels strictement positifs forme un groupe et que celle des nombres réels positifs ou nul n'en forme pas un.

Avec $\{n_1, n_2, n_3\} \in \mathbb{R}^{+*}$ (positifs non-nuls).
- Chaque combinaison de deux éléments d'un groupe est aussi un élément du groupe.
  $n_1 \cdot n_2 = (n_1 \cdot n_2)$ et $(n_1 \cdot n_2) \in \mathbb{R}^{+*}$
- L'élément neutre existe, c'est un : $1 \cdot n_1 = n_1$
- La multiplication est associative : $(n_1 \cdot n_2) \cdot n_3 = n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3)$.
- L'élément inverse fait aussi partie du groupe : $n_1 \cdot n_2 = 1$ si $n_1 = \frac{1}{n_2}$, et $\frac{1}{n_2} \in \mathbb{R}^{+*}$.

Si on inclut le zéro, alors l'ensemble $\mathbb{R}^{+}$ des réels positifs n'est plus un groupe, car l'inverse de zéro n'existe pas.

Exercice 3.2

Quel est l'ordre le plus élevé pour la rotation pure (i.e. rotation propre) des groupes suivants ?

C_{6h} : 6	T_d : 3
D_{2d} : 2	O_h : 4
C_{5v} : 5	I_h : 5

Exercice 3.3

Démontrez que pour un groupe Abélien (qui obéit à la loi commutative), chaque élément constitue une classe à part entière.
Partez de la formule suivante : XAX^{-1}=...
Qu'en est-il d'un groupe non-Abélien (par exemple C_{3v}) ?

En utilisant la commutativité : $XAX^{-1} = AXX^{-1} = AE = A$ donc A est une classe.
Un groupe non-Abélien n'obéit pas à la loi commutative. $XAX^{-1} \neq AXX^{-1}$, donc A n'est pas forcément une classe.

Exercice 3.4

Pour les groupes ponctuels C_4, D_{2h} et C_{4v} (cf. ci-dessous pour des exemples et les éléments de symétrie)

a) Donnez l'ordre du groupe

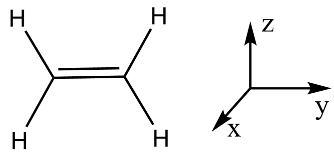
b) Etablissez la table de multiplication du groupe

c) Donnez le nombre de sous-groupes et de classes

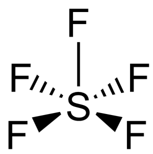
d) Quels sont les (sous-)groupes Abéliens ? Et cycliques ?

Note : Un groupe cyclique peut être entièrement généré à partir d'un seul élément (ex : C_4).

C_4 $\{E\,;C_4\,;C_2\,;C_4^3\}$



D_{2h} $\{E\,;C_2(z)\,;C_2(y)\,;C_2(x)\,;i\,;\sigma(xy)\,;\sigma(xz)\,;\sigma(yz)\}$



C_{4v} $\{E\,;C_4\,;C_4^3\,;C_2\,;2\sigma_v\,;2\sigma_d\}$

Note : Choisissez les plans verticaux le long des liaisons S-F. Les plans dièdres forment un angle de 45° avec les plans verticaux.

$\mathbf{C_4}$ est un groupe d'ordre 4, Abélien et cyclique.
C_4 a 2 sous-groupes : {E} ; {E, C_2} qui sont Abéliens et cycliques ; et 4 classes : {E} ; {C_4} ; {C_2} ; {C_4^3}
La table de multiplication du groupe est :

C_4	E	C_4	C_2	C_4^3
E	E	C_4	C_2	C_4^3
C_4	C_4	C_2	C_4^3	E
C_2	C_2	C_4^3	E	C_4
C_4^3	C_4^3	E	C_4	C_2

$\mathbf{D_{2h}}$ est un groupe d'ordre 8, Abélien et non-cyclique.
D_{2h} contient 6 sous-groupes : {E} ; {E, i} ; {E, σ(xy)} ; {E, σ(xz)} ; {E, σ(yz)} et {E, C_2(z), C_2(y), C_2(x)} qui sont tous Abéliens. Ils sont tous cycliques, sauf le dernier.
D_{2h} possède 8 classes : chaque élément forme sa propre classe.

D_{2h}	E	$C_2(z)$	$C_2(y)$	$C_2(x)$	i	$\sigma(xy)$	$\sigma(xz)$	$\sigma(yz)$
E	E	$C_2(z)$	$C_2(y)$	$C_2(x)$	i	$\sigma(xy)$	$\sigma(xz)$	$\sigma(yz)$
$C_2(z)$	$C_2(z)$	E	$C_2(x)$	$C_2(y)$	$\sigma(xy)$	i	$\sigma(yz)$	$\sigma(xz)$
$C_2(y)$	$C_2(y)$	$C_2(x)$	E	$C_2(z)$	$\sigma(xz)$	$\sigma(yz)$	i	$\sigma(xy)$
$C_2(x)$	$C_2(x)$	$C_2(y)$	$C_2(z)$	E	$\sigma(yz)$	$\sigma(xz)$	$\sigma(xy)$	i
i	i	$\sigma(xy)$	$\sigma(xz)$	$\sigma(yz)$	E	$C_2(z)$	$C_2(y)$	$C_2(x)$
$\sigma(xy)$	$\sigma(xy)$	i	$\sigma(yz)$	$\sigma(xz)$	$C_2(z)$	E	$C_2(x)$	$C_2(y)$
$\sigma(xz)$	$\sigma(xz)$	$\sigma(yz)$	i	$\sigma(xy)$	$C_2(y)$	$C_2(x)$	E	$C_2(z)$
$\sigma(yz)$	$\sigma(yz)$	$\sigma(xz)$	$\sigma(xy)$	i	$C_2(x)$	$C_2(y)$	$C_2(z)$	E

$\mathbf{C_{4v}}$ est un groupe d'ordre 8, non-Abélien et non-cyclique.
C_{4v} est formé de 6 sous-groupes : {E} ; {E, σ_v} ; {E, $\sigma_{v'}$} ; {E, σ_d} ; {E, $\sigma_{d'}$} et {E, C_4, C_2, C_4^3} qui sont tous Abéliens et cycliques.
Les 4 classes dans C_{4v} sont : {E} ; {C_4, C_4^3} ; {σ_v, $\sigma_{v'}$} ; {σ_d, $\sigma_{d'}$}

C_{4v}	E	C_4	C_4^3	C_2	σ_v	$\sigma_{v'}$	σ_d	$\sigma_{d'}$
E	E	C_4	C_4^3	C_2	σ_v	$\sigma_{v'}$	σ_d	$\sigma_{d'}$
C_4	C_4	C_2	E	C_4^3	$\sigma_{d'}$	σ_d	σ_v	$\sigma_{v'}$
C_4^3	C_4^3	E	C_2	C_4	σ_d	$\sigma_{d'}$	$\sigma_{v'}$	σ_v
C_2	C_2	C_4^3	C_4	E	$\sigma_{v'}$	σ_v	$\sigma_{d'}$	σ_d
σ_v	σ_v	σ_d	$\sigma_{d'}$	$\sigma_{v'}$	E	C_2	C_4	C_4^3
$\sigma_{v'}$	$\sigma_{v'}$	$\sigma_{d'}$	σ_d	σ_v	C_2	E	C_4^3	C_4
σ_d	σ_d	$\sigma_{v'}$	σ_v	$\sigma_{d'}$	C_4^3	C_4	E	C_2
$\sigma_{d'}$	$\sigma_{d'}$	σ_v	$\sigma_{v'}$	σ_d	C_4	C_4^3	C_2	E