

11: Rotation - axe fixe

I. Comment décrire la dynamique du roulement sans glissement ?

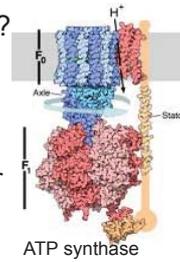
Rappel: 2^{ème} loi des rotations

II. Comment déterminer le moment d'inertie d'un solide ?

Théorème des axes parallèles (Steiner)

III. Comment peut-on décrire le roulement par une rotation autour du point de contact ?

IV. Quels moments d'inertie avec quels objets ?



Préparation au cours et aux exos

Chapitres du Giancoli à lire **avant le cours** (1.5 p):

10-5 Torque and rotational inertia

Exercices simples (4) à faire **avant la séance d'exos**:

Giancoli 10-32,41, 47a, 56

Giancoli chapitres 10-5 à 10-7; 10-9

Rappel: La dynamique du point matériel

La 2^{ème} loi de Newton jusqu'à maintenant

Linéaire (cours 4)

Rotation (cours 5)

$$\vec{F}_{net} = \sum \vec{F}_i = m\vec{a}$$

$$\sum \vec{\tau}_i = I\vec{\alpha} \quad (\vec{r} \times \vec{F})_{net} = mr^2\vec{\alpha}$$

Généralisation pour un objet indéformable

Dynamique **linéaire** du solide (leçon 10)

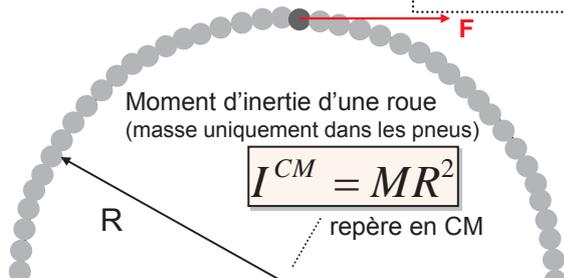
$$\sum \vec{F}_i^{ext} = M\vec{a}_{CM} \quad \vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

$$M = \int_{objet} dm$$

Dynamique des **rotations** d'une roue

$$\vec{r} \times \vec{F} = \underbrace{n}_{\sum \Delta m r^2} mr_{\perp}^2 \vec{\alpha} \quad r_{\perp}: \text{distance pr à l'axe de rotation}$$

$$I^{CM} = (\sum \Delta m) r^2 = \int_{objet} r^2 dm = R^2 \int_{objet} dm$$



I^{CM} indice de l'axe

11-1. Quelles conditions sont nécessaires pour qu'un objet accéléré roule sans glisser ?

Sans glissement: La vitesse de la roue au point de contact P v_P est nulle.

Translation de CM et rotation autour de CM :

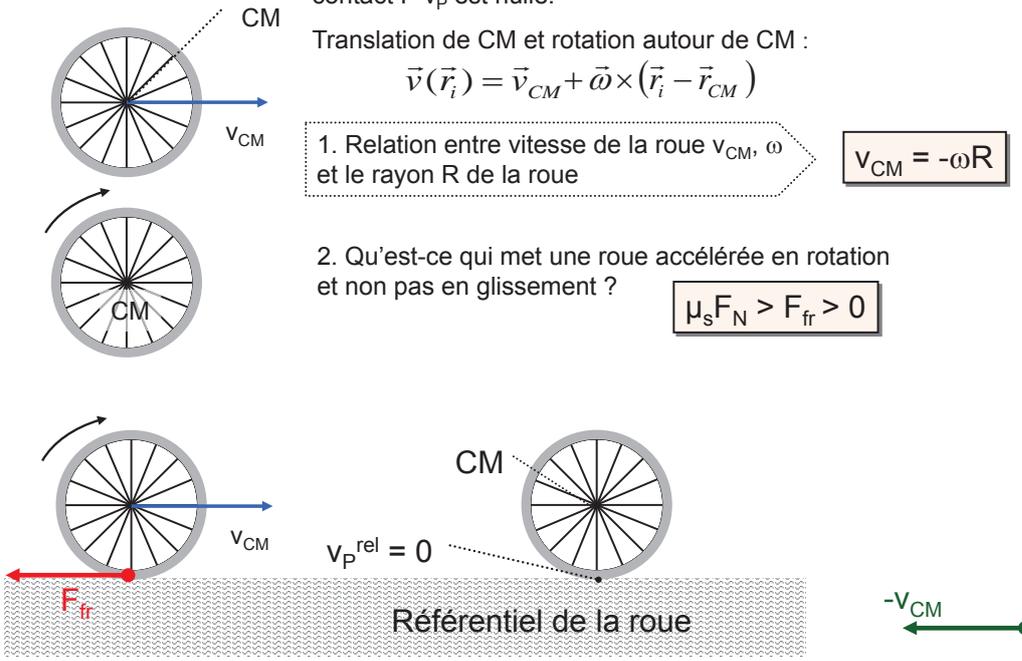
$$\vec{v}(\vec{r}_i) = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_{CM})$$

1. Relation entre vitesse de la roue v_{CM} , ω et le rayon R de la roue

$$v_{CM} = -\omega R$$

2. Qu'est-ce qui met une roue accélérée en rotation et non pas en glissement ?

$$\mu_s F_N > F_{fr} > 0$$



Comment déterminer l'accélération d'une roue ?

Méthode 1: translation + rotation autour du CM

Situation: Une force F appliquée au CM. Au point de contact P: Force de frottement $F_f \rightarrow$ couple $\tau_z^{CM} = RF_f$ ($F_f < 0$)

NB. F ne contribue pas au couple pr à l'axe passant par CM

(On ne s'occupe pas des forces verticales – 1D, selon x)

1) 2^{ème} loi Newton (translation): $F - F_f = Ma_{CM}$

2) 2^{ème} loi pour rotations:

$$\tau_z^{CM} = RF_f = \frac{d\omega_z}{dt} I_z^{CM} \rightarrow F_f = -\frac{a_{CM}}{R} I_z^{CM}$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = -\frac{dv_{CM}}{Rdt} = -\frac{a_{CM}}{R}$$

$$F = Ma_{CM} + \frac{a_{CM}}{R^2} I_z^{CM} = Ma_{CM} \left(1 + \frac{I_z^{CM}}{MR^2} \right)$$

$$a_{CM} = \frac{F}{M} \left(\frac{1}{1 + I_z^{CM} / MR^2} \right)$$

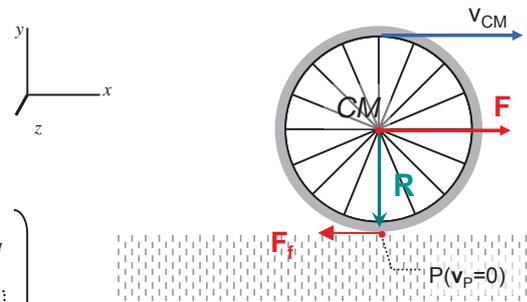
accélération linéaire du CM

Résistance à la rotation

Quelques conséquences de la répartition de la masse M de la roue:

1. dans le pneu: $I_z^{CM} = MR^2$ $a_{CM} = \frac{1}{2} \frac{F}{M}$

2. au centre (cylindre plein, rayon r): $I_z^{CM} = Mr^2/2$ $a_{CM} = \frac{F}{M} \left(\frac{1}{1 + r^2 / (2R^2)} \right) \approx \frac{F}{M}$

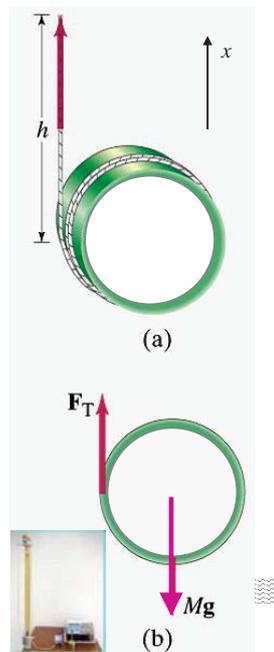


Démo et quiz: La tension du fil d'un yoyo

Situation: Le fil d'un yoyo, assimilé à un cylindre creux à paroi mince ($I=MR^2$), se déroule sous l'effet du poids du yoyo.

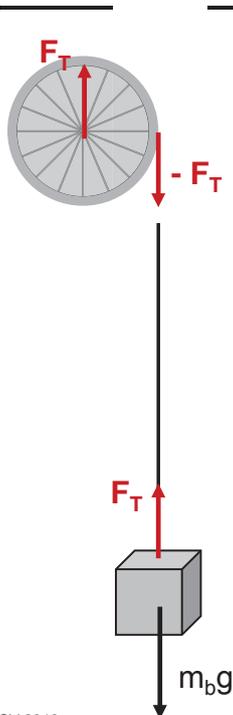
Question: Quelle est sa tension F_T ?

- a) $F_T = Mg$
- b) $F_T = Mg/2$
- c) $F_T = Mg/3$
- d) $F_T = 0$
- e) Pas assez d'informations



11-5

Exemple: Masse attachée à une poulie



Force au fil ?

Constats (dynamique linéaire):

- 1) Actio=Reactio : La force F_T est égale aux deux bouts du fil
- 2) Poulie ne bouge pas: La force au CM de la poulie due à la boîte est F_T
- 3) L'accélération a de la boîte est égale à

(NB Le fil est considéré indéformable: accélération est la même partout)

$$m_b a = m_b g - F_T \longrightarrow a = g - \frac{F_T}{m_b}$$

Dynamique des rotations: Le moment de force net sur le CM de la bobine est

$$\tau^{CM} = F_T R = I \alpha = \frac{I}{\omega=v/R} a \longrightarrow a = \frac{F_T R^2}{I}$$

$$F_T m_b R^2 = m_b I g - I F_T$$

$$F_T = m_b g \left(\frac{I}{I + m_b R^2} \right)$$

Accélération de la boîte ? $a = g \left(\frac{1}{I / m_b R^2 + 1} \right)$

11-6

11-2. Quelle est la proportionnalité entre τ et α ?

Le moment d'inertie I et la « 2ème loi » des rotations

La 2ème loi des rotations:

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = I^{axe} \vec{\alpha} \quad I^{axe} = \sum \Delta m_i r_i^2$$

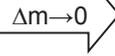
inertie de rotation

(résistance au changement de la vitesse angulaire)

NB. Equivalent au 2ème loi de Newton ($\sum F=ma$), si l'axe de rotation est constante et passe par CM

I = Moment d'inertie

Unité: [kgm²]



$$I^{axe} \equiv \int r^2 dm$$

autour axe de rotation

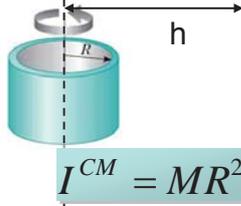
r = distance pr axe de rotation

Théorème des axes parallèles (Steiner)

Rotation autour d'un axe à une distance h à celui passant par le CM est décrit par un moment d'inertie de I^{axe}

$$I^{axe} = I^{CM} + mh^2$$

Exemple: I du cylindre creux, le roi des moments d'inertie



$$I^{axe} = MR^2 + Mh^2$$

11-7

Démo: Variation d'un moment d'inertie

deux règles utiles et importantes

Loi de Steiner: $I^{axe} = I^{CM} + Mh^2$

À grande distance h on peut négliger les I^{CM}

$$h \gg R \Rightarrow I^{axe} = Mh^2$$

Pour deux objets 1 et 2 en rotation autour du même axe, les moments d'inertie s'ajoutent (Pourquoi?):

$$I_{tot}^{axe} = I_1^{axe} + I_2^{axe} \quad I_{tot}^{axe} = \sum_k I_k^{axe}$$

négligeable

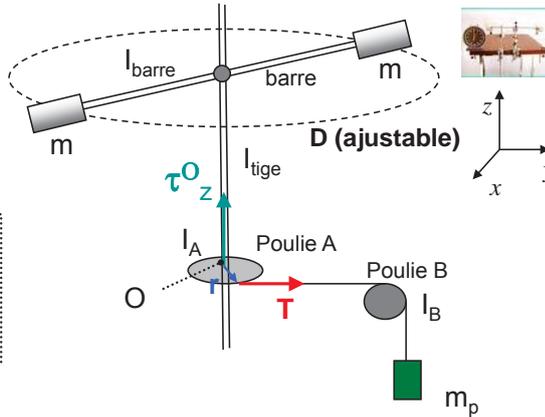
$$I_z^o = 2mD^2 + I_{barre}^o + I_A^o + I_{tige}^o \cong 2mD^2$$

On néglige aussi I_B , la situation est celle de la poulie (voir diapos précédentes et à la fin):

$$m_p a = T - m_p g$$

$$a = \alpha r$$

$$rT = I^{axe} \alpha$$



$$\alpha = \frac{g}{r \left(1 + \frac{I^o}{m_p r^2} \right)} \approx \frac{g}{r \left(1 + \frac{2mD^2}{m_p r^2} \right)}$$

On constate que α est d'autant plus élevé que mD^2 est petit et que m_p , donc τ_z est plus élevé.

11-8

11-3. Peut-on analyser la rotation (sans glissement) autour du point de contact P ?

Introduction: Comment résoudre les problèmes de dynamique des rotations (axe fixe) ?

- 1.) Pour le mouvement net linéaire du CM:
2^{ème} loi de Newton $\vec{F}_{net} = m\vec{a}_{CM}$
- 2.) Rotations: 2^{ème} loi $\vec{\tau}_{net}^{axe} = I^{axe} \vec{\alpha}$

3.) Combiner 1 et 2 → solution

NB. Un bon choix de l'axe de rotation peut simplifier énormément l'analyse!

Exemple: Roulement sans glisser

Force de frottement F_f au point de contact P apparaît dès que F est appliquée au CM

A tout temps, au point de contact P

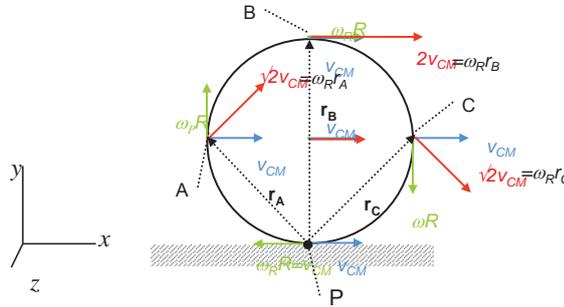
$v_P = \text{vitesse du sol} (=0)$

Translation par v_{CM}

+

Rotation autour CM par $\omega_R = -v/R$

=
Rotation autour P (point de contact)



$$\rightarrow \mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega}_R \times \mathbf{r}_i \quad \Leftrightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}_R \times \vec{r}$$

NB. F_f ne contribue pas au moment de force pr à l'axe passant par P

$$\rightarrow \tau_z^P = -RF$$

11-9

Démo: bobines tirées par un fil

Question: Quand on tire sur le fil, dans quel sens la bobine roule-t-elle?

Situation 1: Fil enroulé sur le petit cylindre, roulement (sans glisser) sur le gros.

$$\tau_z^P = (R-r)F$$

Situation 2: Fil sur le gros cylindre en haut, roulement (sans glisser) sur le petit.

$$\tau_z^P = (R+r)F$$

Situation 3: Fil sur le gros cylindre en bas, roulement (sans glisser) sur le petit.

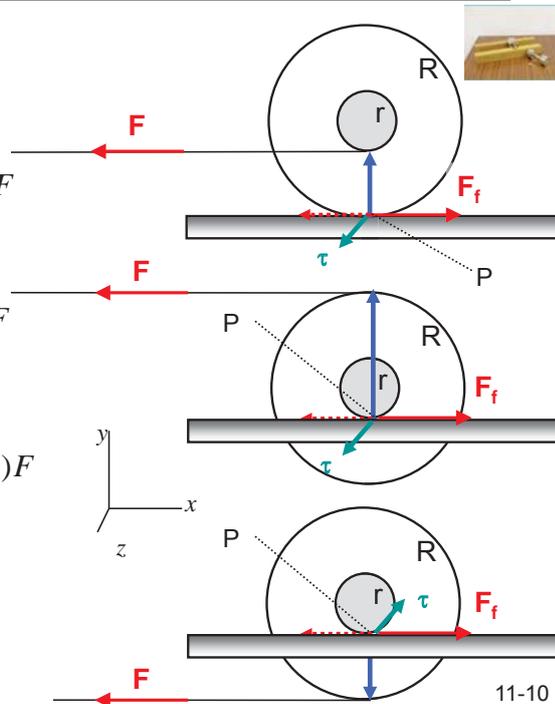
$$\tau_z^P = -(R-r)F$$

Moment d'inertie:

$$I^{CM} = \frac{mr^2}{2} + \frac{MR^2}{2} \quad (\text{voir ci-après})$$

$$I^P = I^{CM} + (m+M)R^2$$

$$I^P = I^{CM} + (m+M)r^2$$



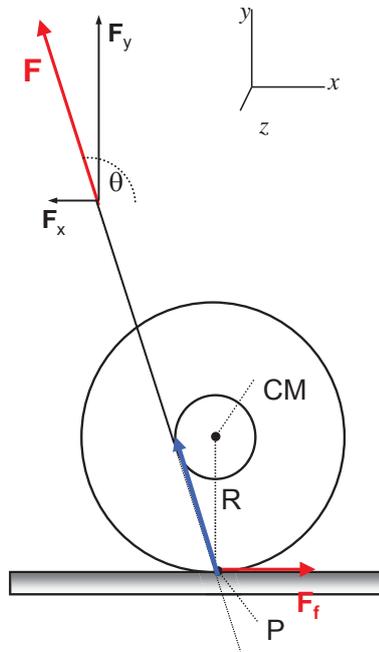
11-10

Quiz et Démo : bobine et fil

Situation : Fil enroulé sur le petit cylindre, roulement sans glisser sur le gros.

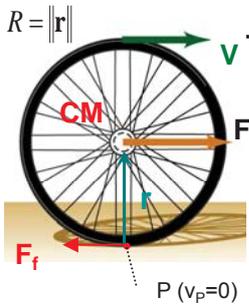
Question: Pour la géométrie illustrée, dans quel sens la bobine roule-t-elle ?

- a) vers la droite →
- b) vers la gauche ←
- c) reste en repos



Comment déterminer l'accélération d'une roue ?

Méthode 2: rotation autour du point P



Situation: Une force F appliquée au CM

→ moment de force $\tau_z^P = -RF$
(On ne s'occupe pas des forces verticales: 1D, selon x)

2^{ème} loi (rotation)

$$\left. \begin{aligned} \tau_z^P = -RF = I_z^P \alpha \\ \alpha = -\frac{a_{CM}}{R} \end{aligned} \right\} a_{CM} = \frac{R^2}{I_z^P} F$$

(Théorème de Steiner)

$$I_z^P = MR^2(1 + I_z^{CM} / MR^2)$$

C'est plus simple alors ...

$$a_{CM} = \frac{F}{M} \left(\frac{1}{1 + I_z^{CM} / MR^2} \right)$$

accélération linéaire du CM

Résistance à la rotation

NB. Force de frottement F_f ne contribue pas au couple pr à l'axe passant par P

Approximation de la roue par anneau mince ($I=MR^2$)

$$\Rightarrow a_{CM} = \frac{F}{2M}$$

$$F_f = -\frac{F}{2}$$

Force de frottement ?

2^{ème} loi linéaire: $F - F_f = Ma_{CM}$

Quiz: Course des Cylindres

(rayons égaux)

Situation: On lance en même temps quelques objets sur un plan incliné.

Question I: Quel cylindre (masses égales) arrive le premier en bas?



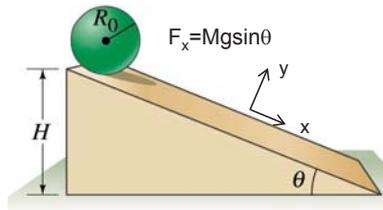
creux

en même temps



plein

pas assez d'information



Question II: lequel de ces cylindres plein arrive en premier ?



métal

en même temps



plastique

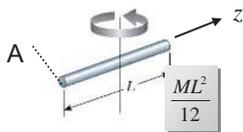
pas assez d'information



11-4. Quel est le moment d'inertie du CM pr à un axe ?

exemples pour quelques objets homogènes de base

Tige mince autour de son centre:

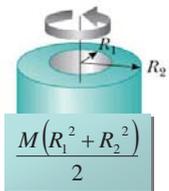


$$dm = \rho A dz$$

$$I = \int z^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} \rho A z^2 dz = \rho A \left(\frac{L^3}{24} + \frac{L^3}{24} \right) = \rho A L \frac{2L^2}{24}$$

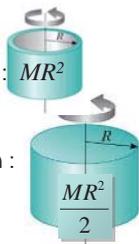
$M = \rho A L$

Cylindre vide autour de son axe:

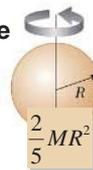


$(R_1 = R_2 = R) \Rightarrow$ **Cylindre creux** : MR^2

$(R_1 = 0, R_2 = R) \Rightarrow$ **Cylindre plein** :



Sphère pleine



Sphère creuse



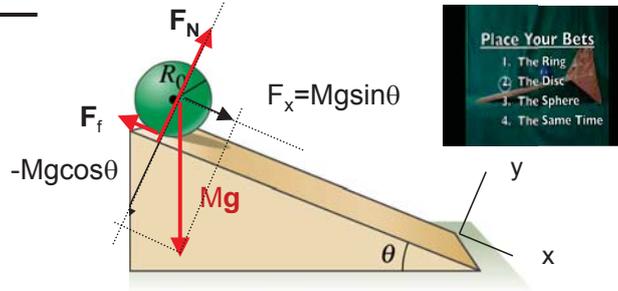
voir aussi: Giancoli, fig 10-21

Course des cylindres: par forces

$$a_{CM} = \frac{F_x}{M} \left(\frac{1}{1 + I_z^{CM} / MR^2} \right)$$

(accélération de la roue, voir précédent)

$$g' = \frac{g}{\frac{I_z^{CM}}{MR^2} + 1}$$

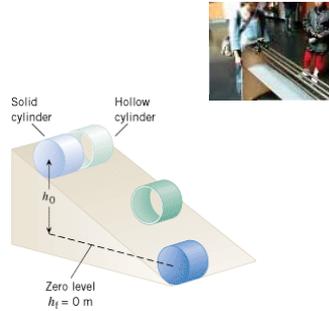


Alors, qui arrive le premier en bas?

- Cylindre creux $I/MR^2=1$
- Cylindre plein: $I/MR^2=0.5$
- Cylindre plein en métal : $I/MR^2=0.5$
- Cylindre plein en plastique : $I/MR^2=0.5$

$$g'/g=0.5$$

$$g'/g=0.67$$

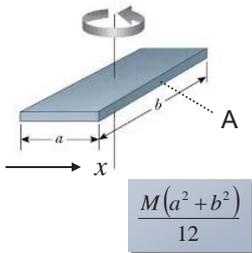


Plus $I_z^{CM} / (MR^2)$ est grand plus a_{CM} est faible

11-15

Encore plus de moments d'inertie

Parallélépipède rectangle



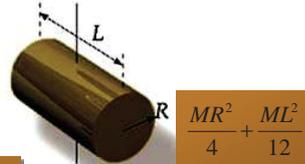
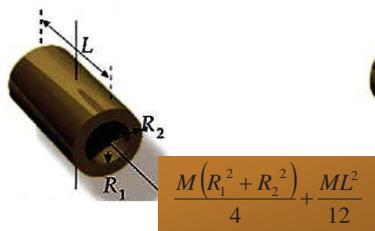
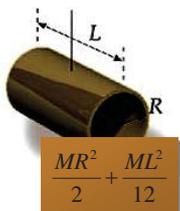
Supposons que cet objet soit construit par des tiges minces m_i selon b .

$$I^{CM} = \underbrace{\sum \frac{m_i b^2}{12}}_M + \underbrace{\sum m_i x^2}_{\rho A \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx} \quad (\text{Loi de Steiner})$$

$$\frac{Ma^2}{12}$$

Formellement identique à l'expression de la tige mince (voir diapo 11-14)

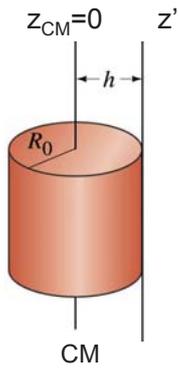
Cylindre creux, rotation \perp son axe



11-16

Preuve: Théorème des axes parallèles

(théorème de Steiner)



Situation: Admettons que le moment d'inertie passant par le CM par un axe z quelconque soit connu:

$$I^{CM} \equiv \sum \Delta m_i r_i^2$$

L'axe de rotation, sans changer de direction est déplacé par h, indiqué par z'.

Question: Quelle est la relation entre les deux moments d'inertie ?

$$I' = \sum \Delta m_i (r_i + h)^2 = \underbrace{\sum \Delta m_i r_i^2}_{I^{CM}} + 2h \underbrace{\sum \Delta m_i r_i}_{M z_{CM}} + \underbrace{\sum \Delta m_i h^2}_M$$

Rotation autour d'un axe || à celui passant par le CM est décrit par un moment d'inertie de l'

$$I' = I^{CM} + Mh^2$$

Utile à savoir: Dès que $h \gg R_0 \rightarrow I' \approx Mh^2$

\Rightarrow À grande distance on peut négliger les I^{CM}

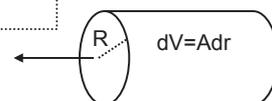
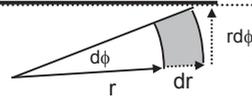
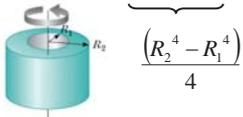
Complément: Dérivation du moment d'inertie d'un cylindre

Du cylindre creux avec rayon r_i : $I_i = m_i r_i^2$ il s'en suit : $I = \sum m_i r_i^2$

La masse du cylindre creux: $V_i = 2\pi r_i h dr \rightarrow m_i = 2\pi \rho h r_i dr$

$$I = 2\pi \rho h \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = 2\pi \rho h \frac{1}{4} (R_2^4 - R_1^4) = \frac{\pi h}{2} \frac{(R_2^2 - R_1^2)(R_1^2 + R_2^2)}{\pi h (R_2^2 - R_1^2)} M$$

$$V = \pi h (R_2^2 - R_1^2)$$



Supposons une décomposition en tiges minces: $m_i h^2$ (Théorème Steiner)

$$I_i = \frac{m_i L^2}{12} + m_i R^2 \sin^2 \theta$$

$$m_i = \rho L R dR d\theta \rightarrow \rho L R^3 \sin^2 \theta d\theta$$

$$\sum I_i = \frac{L^2}{12} \sum m_i + R^2 \rho L R dR \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta$$

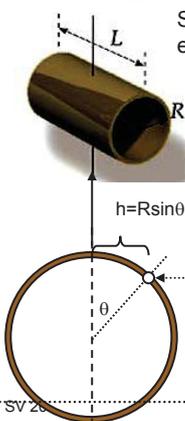
$$M = 2\pi \rho L R dR \rightarrow \frac{R^2 M}{2}$$

$$\int_0^{2\pi} (\sin^2 x + \cos^2 x) dx = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx + \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$$

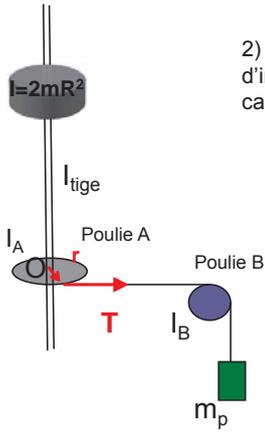
$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{\sin x \cos x + x}{2}$$

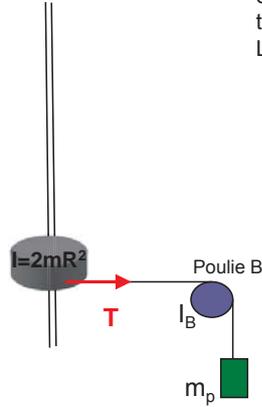


Complément: Les simplifications de la démo variation d'un moment d'inertie

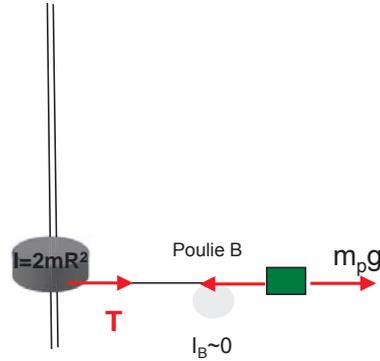
1) On néglige I_{barre} , car sa masse est petite, qui correspond au suivant:



2) On néglige le moment d'inertie de la poulie A et la tige car ses masses sont petites:



3) On néglige le moment d'inertie de la poulie B car sa masse est petite. La force du fil est transmise (fil ne s'étend pas). La situation correspond :



⇒ Et ceci est équivalent à la masse attachée à une poulie

11-19

Phys I SV 2013

Rappel: Cinématique position, vitesse, accélération

	linéaire (voir leçons 1, 2 & 10)	rotation Autour d'un axe (voir leçons 3, 5)
Une dimension	x $v = \frac{dx}{dt}$ $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	θ $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
3D	\vec{r}_{CM} $\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt}$ $\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_{CM}}{dt^2}$	$\vec{\theta}$ $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$ $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2}$

Phys I SV 2013

11-20

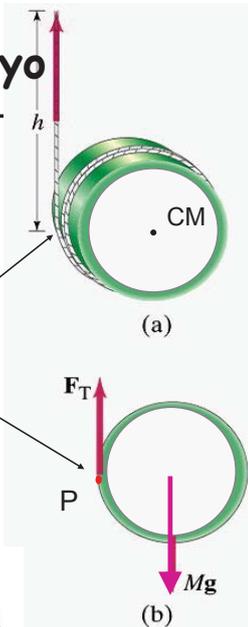
Preuve: tension F_T du fil de yoyo

Même situation que la roue en roulement (voir précédent)

tirée avec une force à son CM de Mg . La force de tension F_T est alors égale à celle du frottement de la roue F_f , pour laquelle nous avons montré que

$$F_f = -\frac{I_z^{CM}}{R^2} a_{CM} = F_T \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{en P on a } v=0 \\ F_T = -F I_z^{CM} \left(\frac{1}{MR^2 + MR^2 I_z^{CM} / MR^2} \right) \\ F = -Mg \\ F_T = Mg \left(\frac{1}{MR^2 / I_z^{CM} + 1} \right) \end{array} \right.$$

Avec $I_z^{CM} = MR^2$ il s'ensuit $F_T = Mg \left(\frac{1}{MR^2 / MR^2 + 1} \right)$
 $F_T = F/2 = Mg/2$



10-5 Rotational Dynamics; Torque and Rotational Inertia

We discussed in Section 10-4 that the angular acceleration α of a rotating object is proportional to the net torque τ applied to it:

$$\alpha \propto \Sigma \tau,$$

where we write $\Sigma \tau$ to remind us that it is the *net* torque (sum of all torques acting on the object) that is proportional to α . This corresponds to Newton's second law for translational motion, $a \propto \Sigma F$, but here torque has taken the place of force, and, correspondingly, the angular acceleration α takes the place of the linear acceleration a . In the linear case, the acceleration is not only proportional to the net force, but it is also inversely proportional to the inertia of the object, which we call its mass, m . Thus we could write $a = \Sigma F/m$. But what plays the role of mass for the rotational case? That is what we now set out to determine. At the same time, we will see that the relation $\alpha \propto \Sigma \tau$ follows directly from Newton's second law, $\Sigma F = ma$.

We first consider a very simple case: a particle of mass m rotating in a circle of radius R at the end of a string or rod whose mass we can ignore compared to m (Fig. 10-17), and we assume that a single force F acts on m tangent to the circle as shown. The torque that gives rise to the angular acceleration is $\tau = RF$. If we use Newton's second law for linear quantities, $\Sigma F = ma$, and Eq. 10-5 relating the angular acceleration to the tangential linear acceleration, $a_{\text{tan}} = R\alpha$, then we have

$$F = ma \\ = mR\alpha,$$

where α is given in rad/s^2 . When we multiply both sides of this equation by R , we find that the torque $\tau = RF = R(mR\alpha)$, or

$$\tau = mR^2\alpha. \quad \text{[single particle] (10-11)}$$

Here at last we have a direct relation between the angular acceleration and the applied torque τ . The quantity mR^2 represents the *rotational inertia* of the particle and is called its *moment of inertia*.

Now let us consider a rotating rigid object, such as a wheel rotating about a fixed axis through its center, such as an axle. We can think of the wheel as consisting of many particles located at various distances from the axis of rotation. We can apply Eq. 10-11 to each particle of the object; that is, we write $\tau_i = m_i R_i^2 \alpha$ for the i^{th} particle of the object. Then we sum over all the particles. The sum of the various torques is just the total torque, $\Sigma \tau$, so we obtain:

$$\Sigma \tau_i = (\Sigma m_i R_i^2) \alpha \quad \text{[axis fixed] (10-12)}$$

where we factored out the α since it is the same for all the particles of a rigid object. The resultant torque, $\Sigma \tau$, represents the sum of all internal torques that each particle exerts on another, plus all external torques applied from the outside: $\Sigma \tau = \Sigma \tau_{\text{ext}} + \Sigma \tau_{\text{int}}$. The sum of the internal torques is zero from Newton's third law. Hence $\Sigma \tau$ represents the resultant *external* torque.

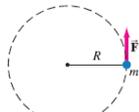


FIGURE 10-17 A mass m rotating in a circle of radius R about a fixed point.

NEWTON'S SECOND LAW FOR ROTATION

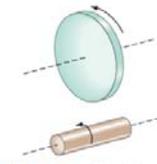


FIGURE 10-18 A large-diameter cylinder has greater rotational inertia than one of equal mass but smaller diameter.

The sum $\Sigma m_i R_i^2$ in Eq. 10-12 represents the sum of the masses of each particle in the object multiplied by the square of the distance of that particle from the axis of rotation. If we give each particle a number (1, 2, 3, ...), then

$$\Sigma m_i R_i^2 = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + m_3 R_3^2 + \dots$$

This summation is called the **moment of inertia** (or *rotational inertia*) I of the object:

$$I = \Sigma m_i R_i^2 = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + \dots \quad (10-13)$$

Combining Eqs. 10-12 and 10-13, we can write

$$\Sigma \tau = I\alpha. \quad \left[\begin{array}{l} \text{axis fixed in} \\ \text{inertial reference frame} \end{array} \right] \quad (10-14)$$

This is the rotational equivalent of Newton's second law. It is valid for the rotation of a rigid object about a fixed axis.¹ It can be shown (see Chapter 11) that Eq. 10-14 is valid even when the object is translating with acceleration, as long as I and α are calculated about the center of mass of the object, and the rotation axis through the CM doesn't change direction. (A ball rolling down a ramp is an example.) Then

$$(\Sigma \tau)_{\text{CM}} = I_{\text{CM}} \alpha_{\text{CM}}, \quad \left[\begin{array}{l} \text{axis fixed in direction,} \\ \text{but may accelerate} \end{array} \right] \quad (10-15)$$

where the subscript CM means "calculated about the center of mass."

We see that the moment of inertia, I , which is a measure of the rotational inertia of an object, plays the same role for rotational motion that mass does for translational motion. As can be seen from Eq. 10-13, the rotational inertia of an object depends not only on its mass, but also on how that mass is distributed with respect to the axis. For example, a large-diameter cylinder will have greater rotational inertia than one of equal mass but smaller diameter (and therefore greater length), Fig. 10-18. The former will be harder to start rotating, and harder to stop. When the mass is concentrated farther from the axis of rotation, the rotational inertia is greater. For rotational motion, the mass of an object *cannot* be considered as concentrated at its center of mass.

¹That is, the axis is fixed relative to the object and is fixed in an inertial reference frame. This includes an axis moving at uniform velocity in an inertial frame, since the axis can be considered fixed in a second inertial frame that moves with respect to the first.

For most ordinary objects, the mass is distributed continuously, and the calculation of the moment of inertia, $\sum mR^2$, can be difficult. Expressions can, however, be worked out (using calculus) for the moments of inertia of regularly shaped objects in terms of the dimensions of the objects, as we will discuss in Section 10-7. Figure 10-20 gives these expressions for a number of solids rotated about the axes specified. The only one for which the result is obvious is that for the thin hoop or ring rotated about an axis passing through its center perpendicular to the plane of the hoop (Fig. 10-20a). For this hoop, all the mass is concentrated at the same distance from the axis, R_0 . Thus $\sum mR^2 = (\sum m)R_0^2 = MR_0^2$, where M is the total mass of the hoop.

When calculation is difficult, I can be determined experimentally by measuring the angular acceleration α about a fixed axis due to a known net torque, $\sum \tau$, and applying Newton's second law, $I = \sum \tau / \alpha$, Eq. 10-14.

Object	Location of axis	Moment of inertia
(a) Thin hoop, radius R_0	Through center	MR_0^2
(b) Thin hoop, radius R_0 , width w	Through central diameter	$\frac{1}{2}MR_0^2 + \frac{1}{12}Mw^2$
(c) Solid cylinder, radius R_0	Through center	$\frac{1}{2}MR_0^2$
(d) Hollow cylinder, inner radius R_1 , outer radius R_2	Through center	$\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
(e) Uniform sphere, radius r_0	Through center	$\frac{2}{5}Mr_0^2$
(f) Long uniform rod, length ℓ	Through center	$\frac{1}{12}M\ell^2$
(g) Long uniform rod, length ℓ	Through end	$\frac{1}{3}M\ell^2$
(h) Rectangular thin plate, length ℓ , width w	Through center	$\frac{1}{12}M(\ell^2 + w^2)$

FIGURE 10-20 Moments of inertia for various objects of uniform composition. [We use R for radial distance from an axis, and r for distance from a point (only in e, the sphere), as discussed in Fig. 10-2.]

32. (I) Estimate the moment of inertia of a bicycle wheel 67 cm in diameter. The rim and tire have a combined mass of 1.1 kg. The mass of the hub can be ignored (why?).
41. (II) A merry-go-round accelerates from rest to 0.68 rad/s in 24 s. Assuming the merry-go-round is a uniform disk of radius 7.0 m and mass 31,000 kg, calculate the net torque required to accelerate it.
47. (II) A helicopter rotor blade can be considered a long thin rod, as shown in Fig. 10-55. (a) If each of the three rotor helicopter blades is 3.75 m long and has a mass of 135 kg, calculate the moment of inertia of the three rotor blades about the axis of rotation. (b) How much torque must the motor apply to bring the blades from rest up to a speed of 5.0 rev/s in 8.0 s?

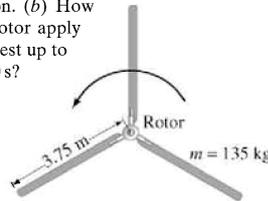


FIGURE 10-55 Problem 47.

56. (II) Determine the moment of inertia of a 19-kg door that is 2.5 m high and 1.0 m wide and is hinged along one side. Ignore the thickness of the door.