Département de génie civil
Laboratoire de mécanique des sols

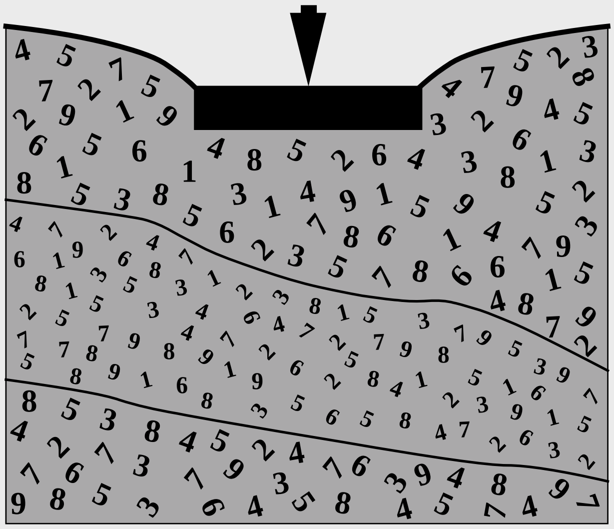
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Michel DYSLI

Cycle postgrade:
Géologie Appliquée à l'Ingénierie et à l'Environnement

D1-6: Modélisation en contraintes-déformations

Documents distribués



3ème édition, août 1997

Liste des documents

Cycle postgrade EPFL: Géologie appliquée à l'ingénierie et à l'environnement
Liste des documents du module D1-6: modélisation en contraintes - déformations

Buts du cours "Modélisation en contraintes-déformations" (18 heures y.c. exercices) :

- **Pouvoir utiliser des modèles numériques élaborés (sur ordinateur) en connaissant leur fonctionnement et leurs limites.**

- **Savoir préparer leurs données.**

- **Savoir interpréter leur résultats.**

Bibliographie

Souvent anciens mais toujours valables! Pour les livres, des éditions plus récentes existent probablement.

1. Ouvrages généraux de mécanique des sols

BISHOP A. W., HENKEL D. J. (1962). *The triaxial Test.*. Edward Arnold Ltd, London, second ed.

DYSLI M. (1991). *Le gel et son action sur les sols et les fondations*. Compléments au traité de génie civil. Presses polytechniques et universitaires romandes.

HANSBO S. (1994). *Foundation Engineering*. Dev. in Geot. Eng. Elsevier.

HOLTZ R. D., KOVACS W. D. (1991). *Introduction à la géotechnique.* Trad. J. Lafleur. Edition de l'Ecole Polytechnique de Montréal (existe aussi en anglais).

LAMBE T. W., WHITMAN R. V. (1979). *Soil mechanics*. John Wiley and Sons, Inc.

LANG H-J., HUDER J. (1982). *Bodenmechanik und Grundbau*. Springer Verlag.

LEONARDS G. A. (1968). *Les fondations*. Dunod, Paris.

RECORDON Ed. (1984). *Technologie des sols.* Cours polycopié EPFL.

RECORDON Ed. (1980). *Mécanique des sols.* Cours polycopié EPFL.

SCHLOSSER F. (1988). *Eléments de mécanique des sols.* Presses de l'Ecole nationale des Ponts et Chaussées, Paris.

TERZAGHI K., PECK R. (1957). *Mécanique des sols appliquée*, Dunod, Paris.

YONG R. N., WARKENTIN B. P. (1975). *Soil properties and behaviour*. Developments in geotechnical engineering 5, Elsevier.

2. Modélisation numérique et éléments finis

BATHE K.-J. (1995). *Finite element procedures.* Prentice-Hall.

BURGER B., RECORDON E., BOVET D., COTTON L., SAUGY B. (1985). *Thermique des nappes souterraines*. Presses Polytechniques Romandes, Lausanne.

DESAI C. S., SIRIWARDANE H. J. (1984). *Constitutive laws for engineering materials.* Prentice-Hall.

DHATT G., TOUZOT G. (1984). *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine SA Paris.

DYSLI M. (1985). *The practical use of coupled models in soil mechanics*. Computers & Structures, Vol 21, No 1/2.

KATCHANOV L. (1975). *Eléments de la théorie de la plasticité*. Ed. Mir, Moscou.

POULOS H.G., DAVIS E.H. (1974). *Elastic solution for soil and rock mechanics*. John Wiley and Sons, Inc.

PRAGER W. (1955). *Probleme der Plastizitätstheorie*. Birkäuser, Basel.

PRAT M. et al. (1995). *La modélisation des ouvrages*. Hermes.

REINER M. (1955). *Rhéologie théorique*. Dunod, Paris.

VALLIAPPAN S. (1981). *Continuum mechanics fundamentals*. Balkema, Rotterdam.

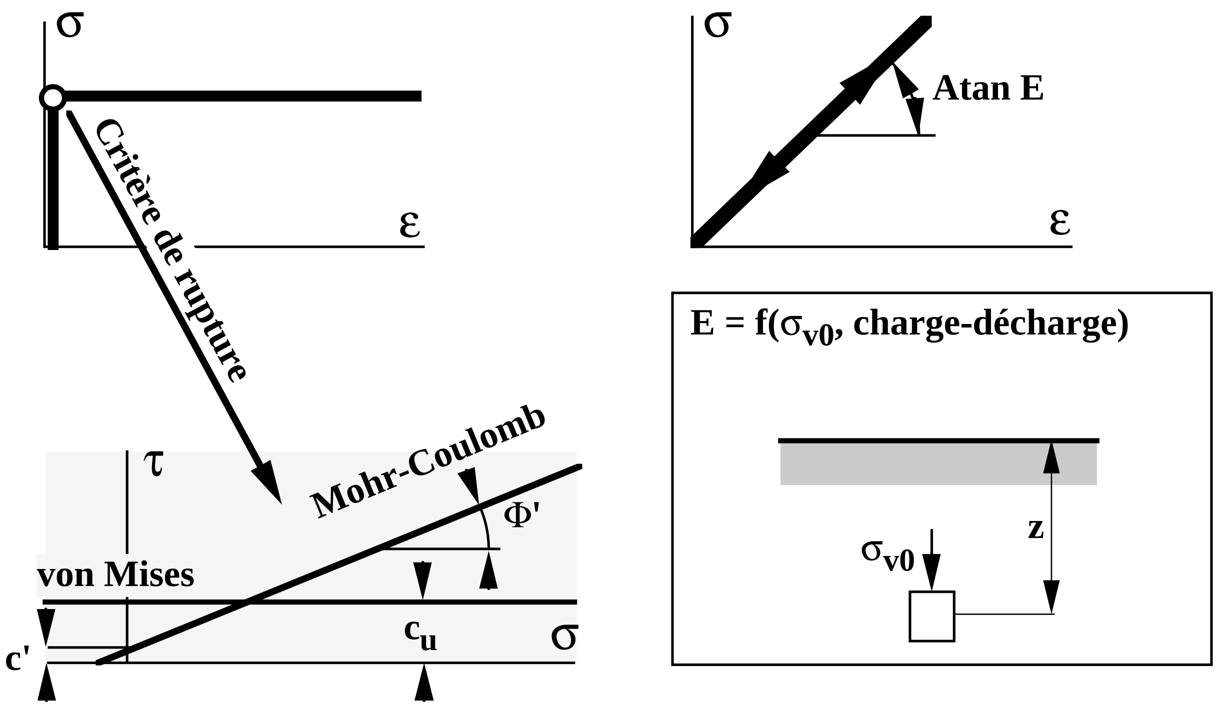
ZIENKIEWICZ O. C. (1979). *La méthode des éléments finis*. 3e éd., McGraw Hill.

ZIENKIEWICZ O. C. (1977). *The Finite Element Method*. 3rd ed., McGraw Hill.

Modèles classiques et réalité (module B2-2: mécanique des sols)

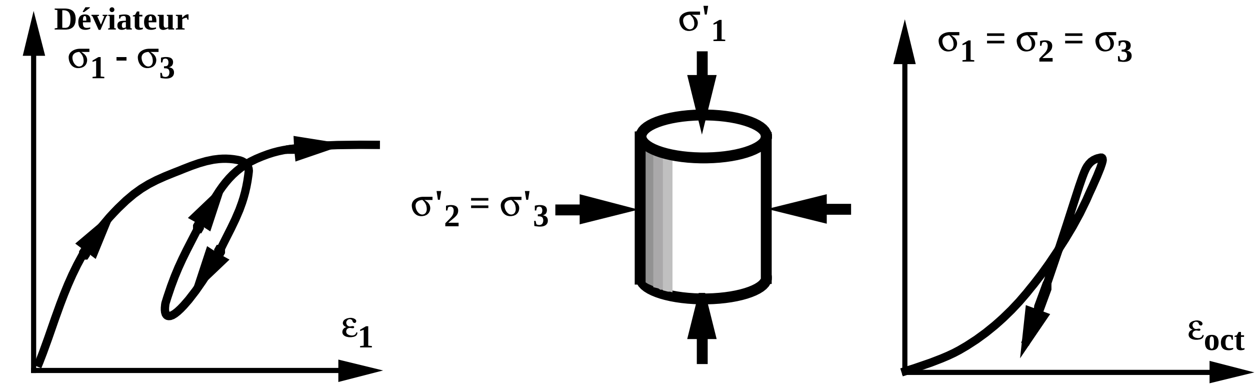
Lois de la mécanique des sols classique

Rupture **Déformation (tassement)**



Réalité

Tenseur de contraintes déviatorique **Tenseur de contraintes sphérique**



Le langage : scalaire, vecteur, tenseur

En physique, lorsqu'un simple nombre suffit à définir une grandeur (température, densité, module élastique, par ex.), ce nombre est un *scalaire*.

Si la grandeur a non seulement une dimension mais aussi une direction, on l'appellera alors *vecteur*. Une force, une accélération, un déplacement sont des vecteurs. Dans un système d'axes cartésien à 3 dimensions, il faut 3 composantes au moins pour définir un vecteur, soit par exemple deux angles et une intensité, ou 3 projections sur les axes du système choisi.
Une modification du système de référence induit une modification des 3 composantes définissant le vecteur. Il est cependant possible de dériver de ce vecteur une quantité scalaire qui est *indépendante de sa direction*. Par exemple, si l'on considère un vecteur déplacement de composantes d_1, d_2, d_3, la grandeur de ce vecteur: $d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}$ est indépendante de sa direction; c'est l'*invariant* du vecteur.

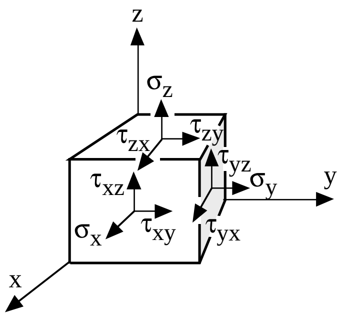
La notion de *tenseur* est plus abstraite. On pourrait lui donner la signification physique d'une représentation d'un champ: champ de vitesses, champ de contraintes par exemple. Dans la définition des composantes d'un tel champ, nous devons nous référer *deux fois* à des directions, par exemple, pour un champ de contrainte: premièrement à l'orientation du solide élémentaire et deuxièmement à l'orientation des contraintes proprement dites sur les faces de ce solide. Il faudrait donc $3 \cdot 3 = 9$ composantes pour définir un tel tenseur. Cependant un tenseur cartésien est symétrique et seules 6 composantes suffisent à le définir complètement.

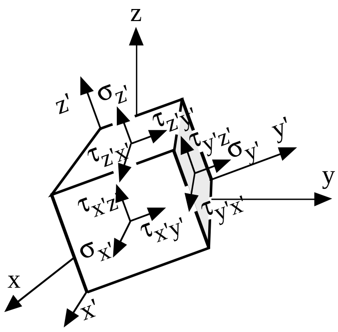
Si pour un vecteur il est possible de dériver *un* invariant, un tenseur donne *trois* invariants dans un système à 3 dimensions.

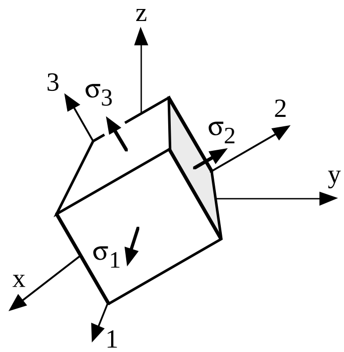
Type	Scalaire	Vecteur	Tenseur
Ordre de la matrice	0	1	2
Exemple	poids volumique	déplacement	contrainte
Notations	γ	$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$
Notations indicielles	γ	d_i	σ_{ij}
Nombre de composantes dans un système de coordonnées à 3 dimensions	3^0	$3^1 = 3$	$3^2 = 9$
Valeurs indépendantes	1	3	9 en général 6 avec symétrie: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$
Invariants	1	1	3

Le langage: Tenseur des contraintes

1, 2, 3 = axes des contraintes principales
$\tau = 0$ sur les faces







tenseur des contraintes :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

avec:
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$
$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$
$$\tau_{zy} = \tau_{yz}$$

tenseur des contraintes principales :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Invariants du tenseur des contraintes (sans démonstration)

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$
$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$
$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2$$

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$
$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$$
$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

$$\sigma' = \sigma - u$$

σ' = contrainte effective
σ = contrainte totale
u = pression interstitielle

$$\begin{bmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{zy} & \sigma'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix}$$

pression interstitielle =
tenseur sphérique

Le langage: Tenseur des contraintes (suite)

Tenseur sphérique : $\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tenseur déviatorique ou déviateur : $s\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ou $s\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ou $s\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Il est toujours possible de décomposer un tenseur de contraintes principales (diagonal) en un tenseur sphérique et, au maximum, 3 tenseurs déviatoriques :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = p\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + s_1\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + s_2\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + s_3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec :

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \text{contrainte moyenne} = \overline{\sigma} \qquad s_1 = \frac{1}{3}(\sigma_2 - \sigma_3) \qquad s_2 = \frac{1}{3}(\sigma_3 - \sigma_1) \qquad s_3 = \frac{1}{3}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

En aditionnant les trois déviateurs on obtient le *déviateur principal* :

$$\sigma_{o_i} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3} \end{bmatrix}$$

Dans un système d'axes cartésiens d'orientation quelconque x, y, z, le tenseur sphérique σ_m et le déviateur σ_o s'écrivent :

$$\sigma_{m_i} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \end{bmatrix} \qquad \sigma_{o_i} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z}{3} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \frac{2\sigma_y - \sigma_z - \sigma_x}{3} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \frac{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y}{3} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\sigma_{ij} = \sigma_{m_i} + \sigma_{o_i}}$$

Invariants sphériques :

$$I_1^m = I_1$$

$$I_2^m = \frac{I_1^2}{3}$$

$$I_3^m = \frac{I_2^3}{27}$$

Invariants déviatoriques :

$$I_1^o = I_1' = 0$$

$$I_2^o = I_2' = \frac{I_1^2}{3} - I_2$$

$I_i' =$ forme la plus courante

$$I_3^o = I_3' = I_3 - \frac{I_1 I_2}{3} + 2\frac{I_1^3}{27}$$

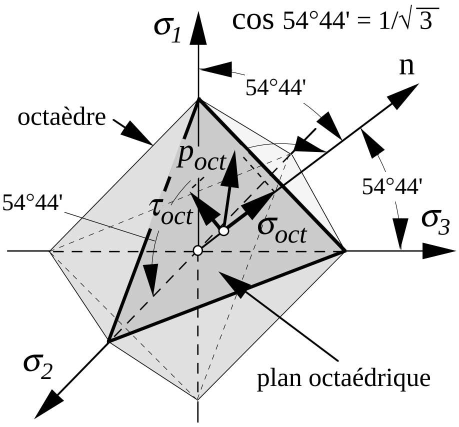
I_2' est souvent utilisé et peut prendre les formes plus pratiques suivantes :

Dans l'espace des contraintes principales: $I_2' = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]$

Dans un espace de contraintes quelconque x, y, z: $I_2' = \frac{1}{6}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2\right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2$

Le langage: Tenseur des contraintes (suite et fin)

Octaèdre et espace des contraintes principales



Grand intérêt des plans octaédriques

$$\sigma_{oct} = D \,.\, \sigma_i \,.\, D^{T}$$

D = vecteur des cosinus directeur = {(n,1); (n,2); (n,3)} = {1/√3; 1/√3; 1/√3}

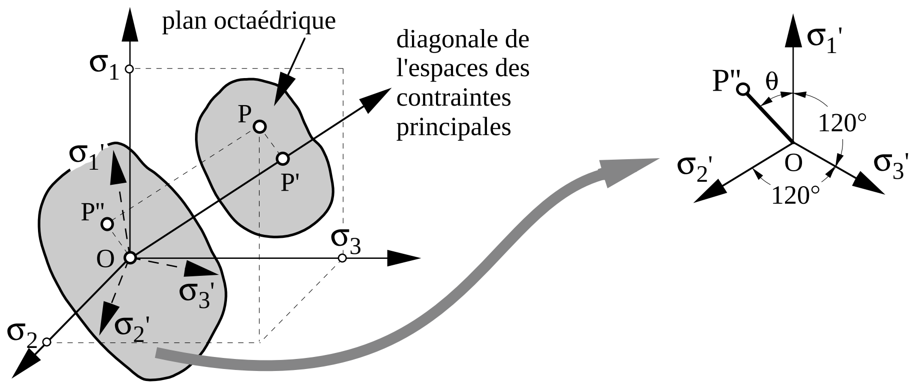
$$\sigma_{oct} = \left\{1/\sqrt{3};\ 1/\sqrt{3};\ 1/\sqrt{3}\right\}\begin{bmatrix}\sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{Bmatrix} = \frac{1}{3}\left(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3\right) = \frac{I_1}{3}$$

$$\tau_{oct} = \sqrt{\left(p_{oct}^2 - \sigma_{oct}^2\right)} \quad \text{et}$$

$$p_{oct}^2 = p_{oct1}^2 + p_{oct2}^2 + p_{oct3}^2 = \left(\sigma_1\cdot(n,1)\right)^2 + \left(\sigma_2\cdot(n,2)\right)^2 + \left(\sigma_3\cdot(n,3)\right)^2$$

ainsi: $\tau_{oct} = \sqrt{\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\left(-I_2'\right)^{1/2}$

et si symétrie de révolution ($\sigma_1 = \sigma_2$) : $\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\sigma_1 - \sigma_3\right)$



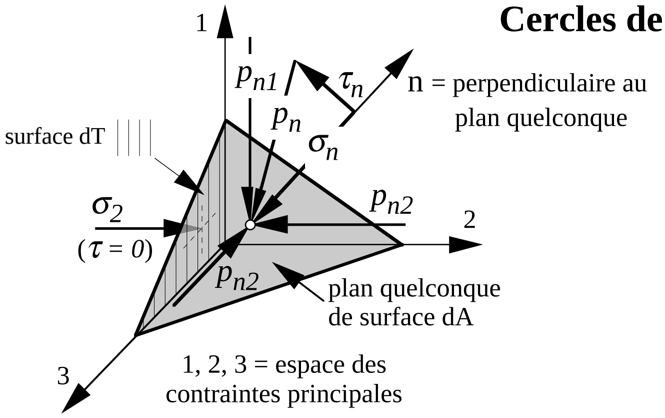
projection sur plan parallèle au plan octaédrique et passant par l'origine

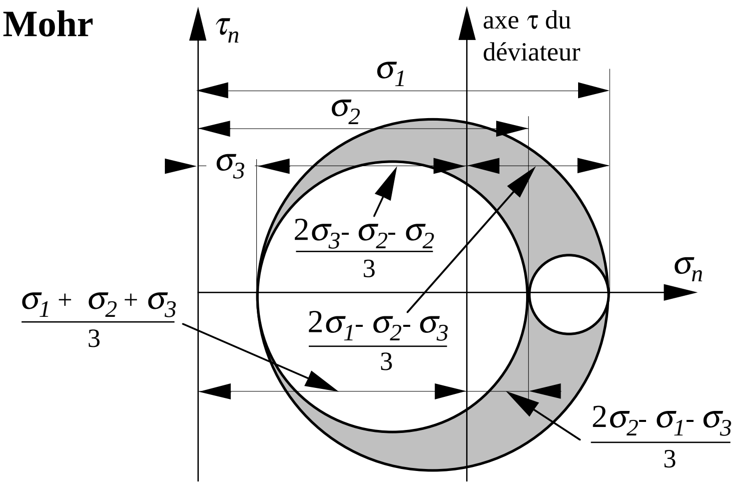
OP' = $\sqrt{3}\,\sigma_{oct} = (\sqrt{3}/3)\, I_1$

OP" = PP'= $\sqrt{3}\,\tau_{oct} = \sqrt{2}\,(-I'_2)^{1/2}$

$$\theta = \operatorname{atan}\left(\sqrt{3}\cdot\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3}\right)$$

Cercles de Mohr





$p_{n1} = \sigma_1 \cos(n,1)$
$p_{n2} = \sigma_2 \cos(n,2)$ rapport de surfaces: dT = dA cos (n,2) par ex.
$p_{n3} = \sigma_3 \cos(n,3)$
et $p_n^2 = p_{n1}^2 + p_{n2}^2 + p_{n3}^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2$

ainsi nous obtenons le système d'équations:

$\sigma_1^2 \cos^2(n,1) + \sigma_2^2 \cos^2(n,2) + \sigma_3^2 \cos^2(n,3) = \sigma_n^2 + \tau_n^2$

$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2(n,1) + \sigma_2 \cos^2(n,2) + \sigma_3 \cos^2(n,3)$ $\left(\sigma_n = D\cdot\sigma_i\cdot D^T,\ i=1,2,3\right)$ vecteur des cosinus directeurs

$\cos^2(n,1) + \cos^2(n,2) + \cos^2(n,3) = 1$

en admettant enfin que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ et en résolvant le système d'équations en utilisant la loi de Cramer ($|\sigma_i - \sigma_n \cdot I| = 0$, I = matrice unité) on obtient

$$\tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2$$

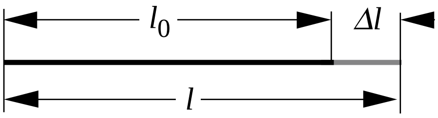
$$\tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)^2$$

$$\tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2$$

qui sont les équations des trois cercles de Mohr. Un couple de contraintes τ, σ doit se trouver dans la zone ombrée

Le langage: Tenseur des déformations

Les moyens de représentation et les règles régissant les contraintes peuvent être transposés par analogie aux déformations.
Il existe cependant diverses déformations. Considérons le barre ci-dessous, avant et après déformation:



La déformation peut être exprimée comme une fonction des coordonnées *avant* déformation, à savoir les *coordonnées de Lagrange*, la déformation est alors la *déformation de Cauchy*:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$ qui est la plus utilisée.

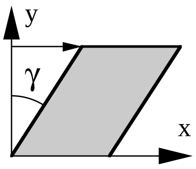
Si la déformation est très grande, il est souvent nécessaire de l'exprimer comme une fonction des coordonnées *après* déformation, à savoir les *coordonnées d'Euler*. Par exemple:

Déformation de Swainger: $\varepsilon = \dfrac{l - l_0}{l} = \dfrac{\Delta l}{l}$ Déformation d'Almansi: $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\Delta l}{l}\right)^2$

tenseur des déformations :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

sans démonstration:
$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$



avec: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$

tenseur des déformations principales :

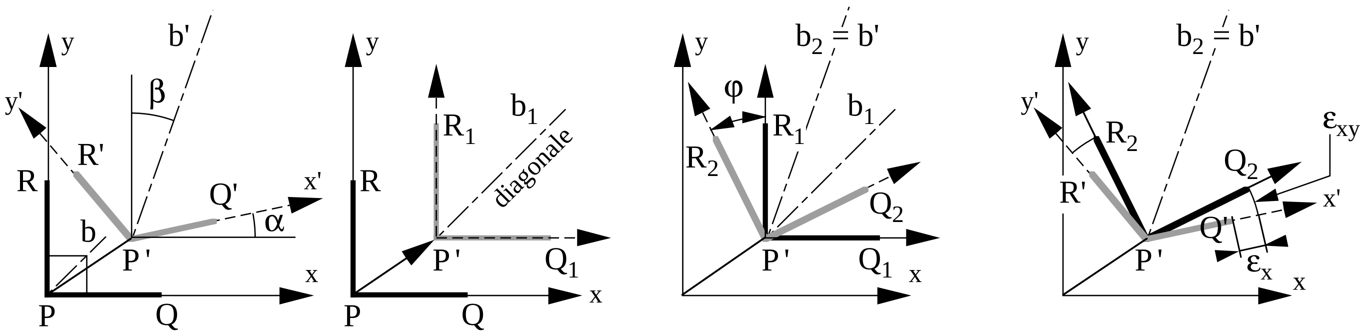
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Invariants du tenseur des déformations (sans démonstration)

$$J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$
$$J_2 = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 - \gamma_{yz}^2 - \gamma_{zx}^2)$$
$$J_3 = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} - \frac{1}{4}(\varepsilon_x \gamma_{yz}^2 - \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 - \varepsilon_z \gamma_{xy}^2)$$

$$J_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$
$$J_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1$$
$$J_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$$

Pour montrer à quoi correspond chaque élément de ces tenseurs, considérons 2 fibres, de longueur unitaire, PQ et PR liées aux axes x et y (2 dimensions):



Déplacement total = **translation** + **rotation** + **distorsion**

$\varphi = (\alpha + \beta) / 2$

combinaison de:
- déformations axiales ε_x et ε_y
- rotations relatives $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = (\beta - \alpha) / 2$

Le langage: Tenseur des déformations (suite et fin)

Octaèdre des déformations

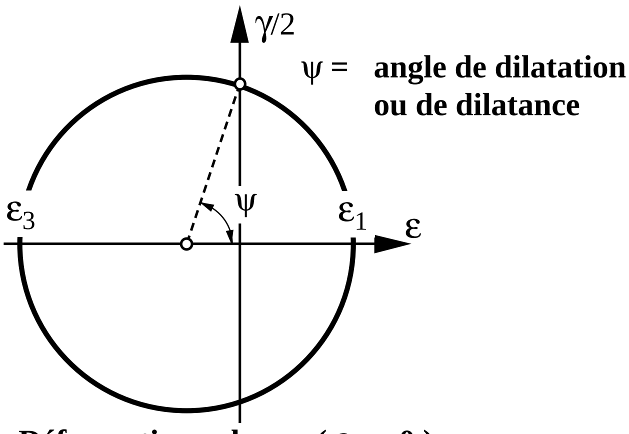
$$\varepsilon_{oct} = \frac{1}{3}\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\right) = \frac{\varepsilon_v}{3} = \frac{J_1}{3}$$

ε_v = déformation volumétrique

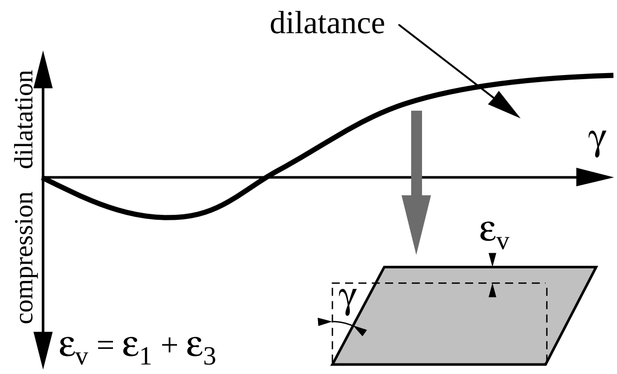
$$\gamma_{oct} = \frac{2}{3}\sqrt{\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)^2 + \left(\varepsilon_2 - \varepsilon_3\right)^2 + \left(\varepsilon_3 - \varepsilon_1\right)^2} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left(-J_2'\right)^{1/2}$$

et si symétrie de révolution : $\gamma_{oct} = 2\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_3\right)$

Cercle de Mohr des déformations

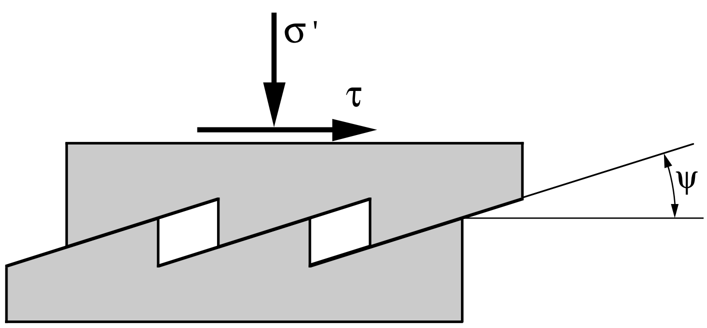


Déformations planes ($\varepsilon_2 = 0$)



Rigoureusement, les déformations γ et ε sont des incréments de déformation

$$\sin\psi = \frac{-(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}$$



Avec : $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\varepsilon}_1$, $\dot{\varepsilon}_3$ et $\dot{\gamma}/2$
=> cercle de Mohr des vitesses

Le langage: Formes vectorielles et incréments de contraintes et de déformations

Formes vectorielles

Il est souvent pratique de représenter les tenseurs de contraintes ou de déformations sous forme de vecteurs :

$$\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} \qquad \varepsilon_{ij} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix}$$

Incréments de contraintes et de déformations

On appelle une petite modification ∂x d'une quantité x un incrément et on le note par $\dot{x}$

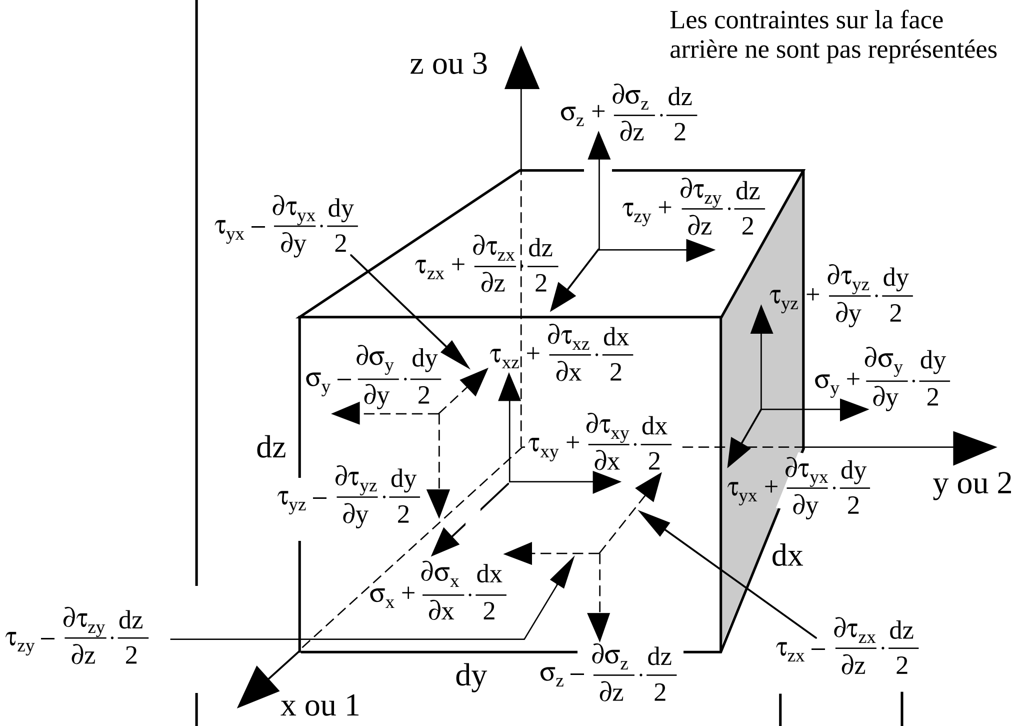
Incrément de contraintes : $\dot{\sigma}_{ij}$

Incrément de déformations : $\dot{\varepsilon}_{ij}$

Ces incréments peuvent se rapporter au *temps réel*, mais aussi à un *temps fictif*. C'est le cas, par exemple, dans la théorie de la plasticité.

Les équations des contraintes et déformations

Notation indicielle (d'Einstein)	Notation xyz	Nbre équations	Inconnues
1. Equations d'équilibre $\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} + F_j = 0$ i = 1,2,3 = direction des normales aux faces; j = 1,2,3 = direction des axes $\sigma = \sigma' + u$ u = pression interstitielle F_j = force par unité de volume En général, F_x (ou F_1) = F_y (ou F_2) = 0 sauf si forces d'inertie (séisme par ex.) F_z (ou F_3) = $-\rho \cdot g$ car sol = milieu pesant	$\frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} + F_x = 0$ qui s'écrit habituellement : $\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} + F_x = 0$ $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} + F_y = 0$ $\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} + F_z = 0$	3	6 3 σ 3 τ $\tau_{ij} = \tau_{ji}$



2. Relations déformation-déplacement (équations géométriques)			
$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ i = 1,2,3; j = 1,2,3 $u_{i,j}$ = vecteur des déplacements Formulation de Lagrange : la position d'un point est décrite en fonction de ses coordonnées initiales (avant déformation). Par opposition à la formulation d'Euler où la position d'un point est décrite en fonction de ses coordonnées après déformation.	$\varepsilon_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$ voir document 7 $u_x = u$; $u_y = v$; $u_z = w$ $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ $\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$ $\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$ $\gamma_{yz} = \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$ $\gamma_{zx} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$	6	9 u, v, w ε_x, ε_y, ε_z γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}
	Total intermédiaire	9	15
	il manque 6 équations		

Suite sur document No 7b

Les équations des contraintes et déformations (suite et fin)

Notation indicielle (d'Einstein)	Notation xyz	Nbre équations	Incon-nues
	report	9	15

il manque 6 équations

3. Relations contrainte-déformation

(lois constitutives, équations d'état, équations de déformabilité)

$R(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}) = 0$ ou $\varepsilon_{ij} = f(\sigma_{ij}) = s_{ij} \cdot \sigma_{ij}$

i = direction des σ, τ
j = direction des ε

s_{ij} = cte => loi linéaire
$s_{ij} = f(\sigma, \varepsilon, t, T)$ => loi non linéaire

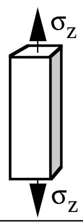
s_{ij} est la *matrice du matériau* et son inverse s_{ij}^{-1} la *matrice d'élasticité*. s_{ij} est symétrique, elle a donc, pour le cas le plus général d'un matériau anisotrope : 36 - 15 = 21 termes.

Exemples (élastiques linéaires) :

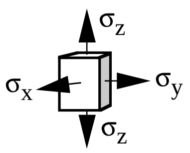
$$\varepsilon_{ij} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} \qquad \sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix}$$

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{21} & & \text{etc.} & & & \\ s_{31} & & & & & \\ s_{41} & & & & & \\ s_{51} & & & & & \\ s_{61} & & & & \text{symétrique} & \end{bmatrix}$$

$\sigma_x \longleftarrow$ fil $\longrightarrow \sigma_x$ $\quad \varepsilon_x = s_{11}\,\sigma_x = 1/E\,\sigma_x$



$\varepsilon_x = s_{31}\,\sigma_z = -\nu/E\,\sigma_z$
$\varepsilon_y = s_{32}\,\sigma_z = -\nu/E\,\sigma_z$
$\varepsilon_z = s_{33}\,\sigma_z = 1/E\,\sigma_z$



Cas général à 3 dimensions
Voir document No 8b

Dans le cas de la mécanique des sols, les σ des exemples seraient négatifs (compression = +)

	Nbre équations	Inconnues
3. Relations contrainte-déformation	6	0
Total final	15	15

Remarque importante :
La déformation d'un milieu élastique homogène et isotrope ne peut être déterminée, sur la base des contraintes, que si *deux modules de déformation* sont connus, par exemple le module de Young *E* et le coefficient de Poisson *ν*. On parle alors d'un *couple de modules*. Si le milieu est anisotrope, c'est deux ou trois couples de modules qui sont nécessaires.
Un module unique ne peut définir la déformation d'un milieu continu que si la géométrie et la rigidité du dispositif de chargement sont parfaitement déterminés ou si des conditions de déformation sont fixées, par exemple: pas de déformation horizontale. C'est le cas du coefficient de réaction qui doit toujours être associé à la dimension et à la forme de la plaque de charge considérée comme infiniment rigide.

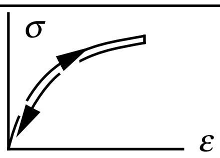
Les relations entre les modules de déformation font l'objet du document No 10

Matrices d'élasticité

Forme générale de la relation σ - ε pour un corps élastique:

Première solution: décomposition du tenseur des contraintes en en tenseur sphérique σ_m et en un tenseur déviatorique σ_o. Les tenseurs correspondant des déformations sont ε_m et ε_o.
L'indice o de σ et ε est la lettre o et non pas le chiffre 0.

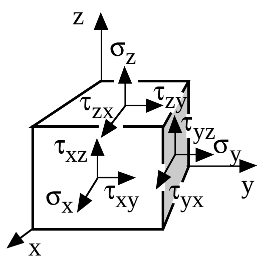
élasticité linéaire:	élasticité non linéaire :
$\sigma_m = 3K \cdot \varepsilon_m$	$\dot{\sigma}_m = 3K \cdot \dot{\varepsilon}_m$
$\sigma_o = 2G \,.\, \varepsilon_o$	$\dot{\sigma}_o = 2G \,.\, \dot{\varepsilon}_o$



avec :
K = coefficient de compressibilité [kPa par ex.]
G = module de glissement ou de cisaillement [kPa[

Deuxième solution: usage de vecteurs de contraintes et de déformations

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx}\end{Bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16}\\ s_{21} & & & & & \\ s_{31} & & & \text{etc.} & & \\ s_{41} & & & & & \\ s_{51} & & & & & \\ s_{61} & & & & & \end{bmatrix}$$



$\varepsilon_{ij} = s_{ij} \cdot \sigma_{ij}$ et $\sigma_{ij} = s_{ij}^{-1} \cdot \varepsilon_{ij}$ forme la plus utilisée

s_{ij}^{-1} est l'inverse de la matrice s_{ij}

Rappel: $\sigma_{xy} = \tau_{xy}$
$2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}$

Contraintes planes ($\sigma_z = 0$)

$$\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} \quad \varepsilon_{ij} = \begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \quad \sigma_{ij} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2}\end{bmatrix} \varepsilon_{ij} = [D] \cdot \varepsilon_{ij}$$

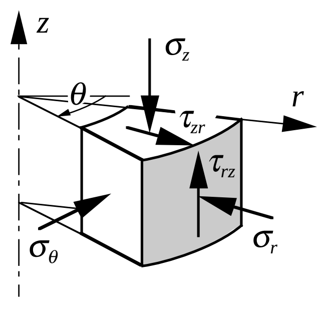
D = *matrice d'élasticité*

Déformations planes ($\varepsilon_z = 0$)

$$\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} \quad \varepsilon_{ij} = \begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \quad \sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix} \varepsilon_{ij} = [D] \cdot \varepsilon_{ij}$$

Symétrie de révolution

$$\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix}\sigma_z\\ \sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \tau_{rz}\end{Bmatrix} \quad \varepsilon_{ij} = \begin{Bmatrix}\varepsilon_z\\ \varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \gamma_{rz}\end{Bmatrix} \quad \sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0\\ 0 & 1-\nu & \nu & 0\\ 0 & 0 & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix} \varepsilon_{ij}$$



Matrices d'élasticité (suite et fin)

3D

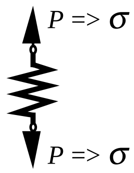
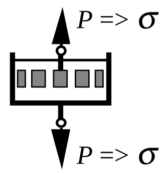
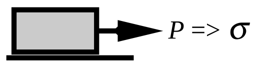
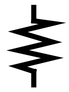
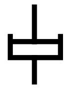
$$\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} \qquad \varepsilon_{ij} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \qquad \boxed{\sigma_{ij} = D \cdot \varepsilon_{ij}}$$

γ, pas ε $\quad \varepsilon_{ij} = \gamma_{ij} / 2$, $i \neq j$

$$D = \frac{E\,(1-\nu)}{(1+\nu)\,(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & \text{symétrique} & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Autres équations d'état $R(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}) = 0$

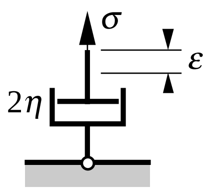
Modèles élémentaires :

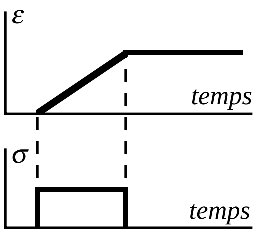
	Ressort élastique	Piston perforé	Elément de friction
Composant	Solide de Hooke. Voir documents No 11 et No 12. 		
Schéma			

Principe

Décomposition du tenseur des contraintes en en tenseur sphérique σ_m et en un tenseur déviatorique σ_o.
Les tenseurs correspondant des déformations sont ε_m et ε_o.

Liquide de Newton



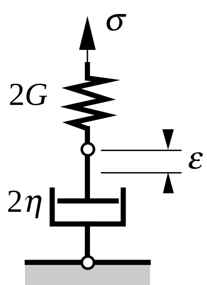


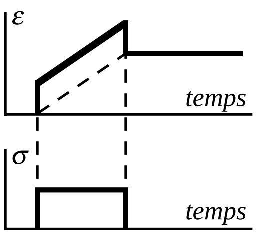
$$\sigma_m = 3K \cdot \varepsilon_m$$

$$\sigma_o = 2\eta \cdot \dot{\varepsilon}_o \qquad \dot{\varepsilon}_o \text{ par rapport au temps } = \frac{\Delta\varepsilon_o}{\Delta t}$$

avec : K = coefficient de compressibilité [kPa par ex.]
G = module de glissement ou de cisaillement [kPa]
η = viscosité dynamique (absolue) [kPa · s]

Liquide de Maxwell





$\bullet$ = par rapport au temps

$$\dot{\varepsilon}_o = \frac{\dot{\sigma}_o}{2G} + \frac{\sigma_o}{2\eta}$$

Cisaillement simple :

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{\tau}{\eta}$$

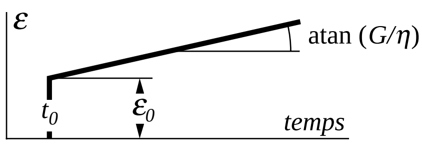
$\dot{\gamma}$, $\dot{\tau}$, τ = scalaires

Effort normal simple :

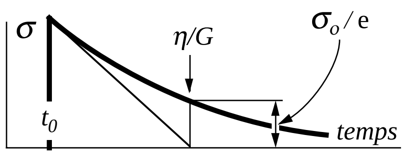
$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{3\eta}$$

$\dot{\varepsilon}$, $\dot{\sigma}$, σ = scalaires

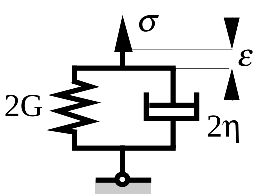
Fluage: σ_o appliqué instantanément et maintenu constant

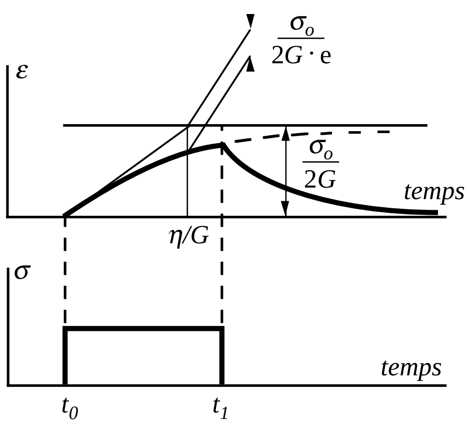


Relaxation: déformation maintenue constante



Solide de Kelvin





$\bullet$ = par rapport au temps

$$\sigma_o = 2G\,\varepsilon_o + 2\,\eta\,\dot{\varepsilon}_o$$

Cisaillement simple :

$$\tau = \gamma G + \eta\,\dot{\gamma}$$

τ, γ, $\dot{\gamma}$ = scalaires

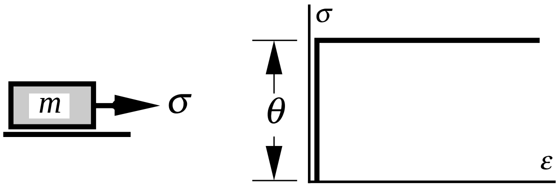
Effort normal simple :

$$\sigma = E\varepsilon + 3\eta\,\dot{\varepsilon}$$

σ, ε, $\dot{\varepsilon}$ = scalaires

Autres équations d'état $R(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}) = 0$ (suite et fin)

Solide de St Venant



$\sigma_o = \theta$

En mécanique des sols : $\tau_{limite} = \theta = c + \sigma \mathrm{tg}\Phi$

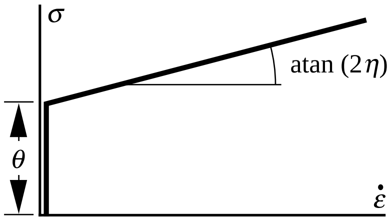
avec : θ = rigidité statique

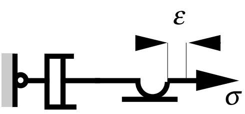
c = cohésion

Φ = angle de frottement

Ce modèle est à la base de la théorie de la plasticité

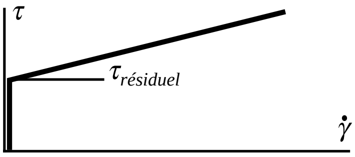
Corps de Bingham





$\sigma_o = \theta + 2\eta \, . \, \dot{\varepsilon}_o$

application aux sols :



Remarque

Lorsque nous avons présenté les différents corps élémentaires, nous n'avons décrit leur comportement que par leurs déviateurs (σ_o, ε_o). Qu'en est-il de leurs tenseurs sphériques? Il est bien entendu possible de leur faire suivre la même loi que les déviateurs. Il est souvent admis, pour ces corps, qu'une pression hydrostatique (tenseur sphérique) ne peut provoquer d'écoulement plastique visqueux ou non.
Ce n'est cependant pas le cas pour la mécanique des sols où, lors du phénomène de la consolidation, le tenseur sphérique des contraintes produit des déformations plastiques.

Enfin: (il aurait fallu commencer par eux!)

Solide euclidien

$\varepsilon \equiv 0$

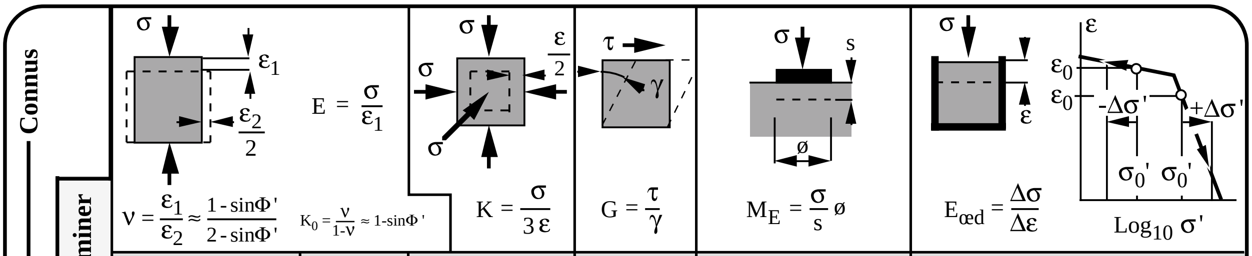
Euclidien, car toute la géométrie d'Euclide est basée sur lui.

Liquide de Pascal

$\sigma \equiv 0$ et $\varepsilon_v = 0$

Relations entre les modules de déformation

Attention, les schémas du haut du tableau sont des représentations à deux dimensions, alors que la théorie de l'élasticité est basée sur des corps à trois dimensions. Les relations données sont, par contre, générales et valables dans tous les cas.

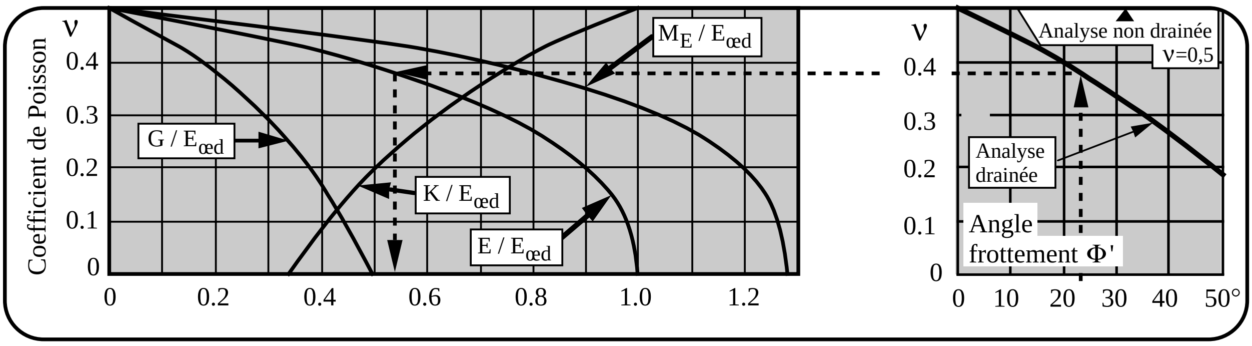


$\nu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \approx \frac{1-\sin\Phi'}{2-\sin\Phi'}$ $\quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_1}$ $\quad K_0 = \frac{\nu}{1-\nu} \approx 1-\sin\Phi'$ $\quad K = \frac{\sigma}{3\varepsilon}$ $\quad G = \frac{\tau}{\gamma}$ $\quad M_E = \frac{\sigma}{s}ø$ $\quad E_{œd} = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon}$

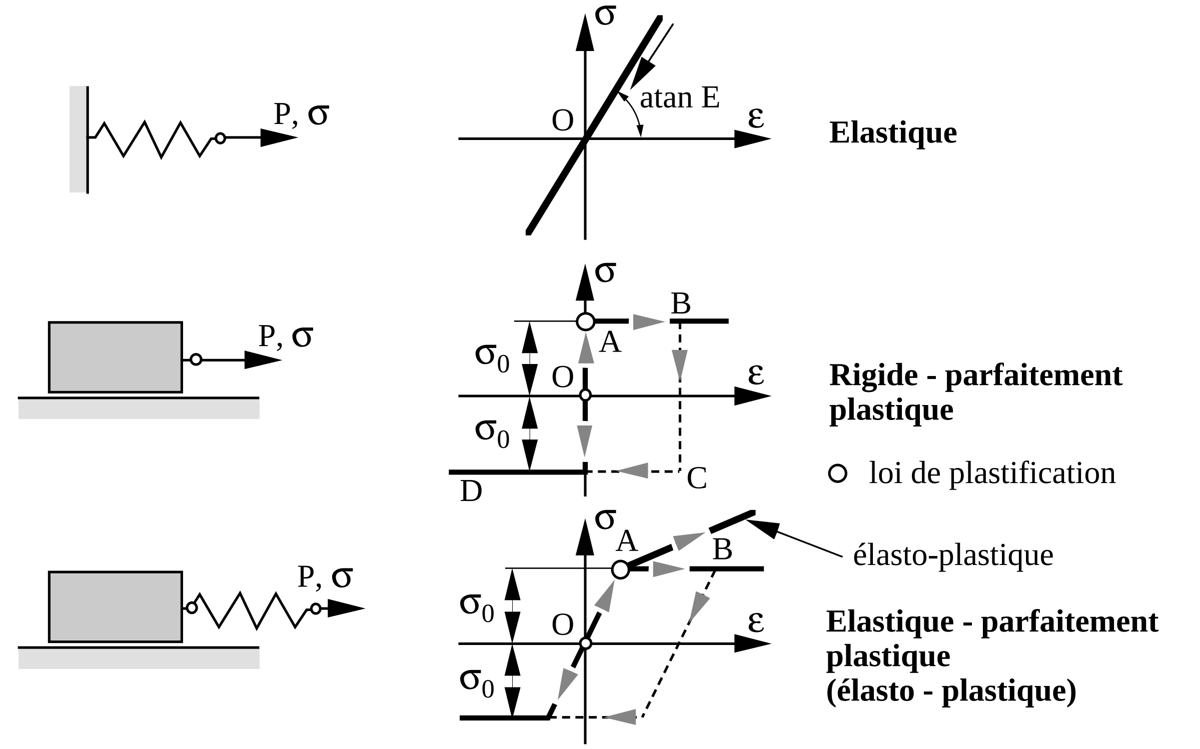
Connus ↓ / A déterminer →	**E** $= \sim E_M$ si $\nu = 0.33$	ν	**K**	**G**	$\mathbf{M_E}$	$\mathbf{E_{œd}} = 1/\mathbf{m_v} = \frac{1+\varepsilon_0}{C_c \text{ ou } C_s} \cdot \frac{\Delta\sigma'}{\log_{10}\left(\frac{\sigma_0' \pm \Delta\sigma'}{\sigma_0'}\right)}$
G, E	E	$\frac{E-2G}{2G}$	$\frac{G\,E}{3(3G-E)}$	G	$\frac{16G^2}{\pi(4G-E)}$	$\frac{G(4G-E)}{3G-E}$
G, ν	$2G(1+\nu)$	ν	$\frac{3G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	G	$\frac{8G}{\pi(1-\nu)}$	$\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}$
G, K	$\frac{9KG}{3K+G}$	$\frac{3K-2G}{6K+2G}$	K	G	$\frac{8G(6K+2G)}{\pi(3K+4G)}$	$\frac{3K+4G}{3}$
E, ν	E	ν	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$\frac{4E}{\pi(1-\nu^2)}$	$\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
E, K	E	$\frac{3K-E}{6K}$	K	$\frac{3KE}{9K-E}$	$\frac{144K^2}{\pi\left(\frac{27K^2}{E}-E+6K\right)}$	$\frac{3K(3K+E)}{9K-E}$
ν**, K**	$3K(1-2\nu)$	ν	K	$\frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	$\frac{12K(1-2\nu)}{\pi(1-\nu^2)}$	$\frac{3K(1-\nu)}{1+\nu}$
$\mathbf{M_E}$, ν	$\frac{\pi(1-\nu^2)M_E}{4}$	ν	$\frac{\pi(1-\nu^2)M_E}{12(1-2\nu)}$	$\frac{\pi(1-\nu)M_E}{8}$	M_E	$\frac{\pi(1-\nu)^2 M_E}{4(1-2\nu)}$
$\mathbf{E_{œd}}$, ν	$\frac{(1+\nu)(1-2\nu)E_{œd}}{(1-\nu)}$	ν	$\frac{(1+\nu)E_{œd}}{3(1-\nu)}$	$\frac{(1-2\nu)E_{œd}}{2(1-\nu)}$	$\frac{4(1-2\nu)E_{œd}}{\pi(1-\nu)^2}$	$E_{œd}$

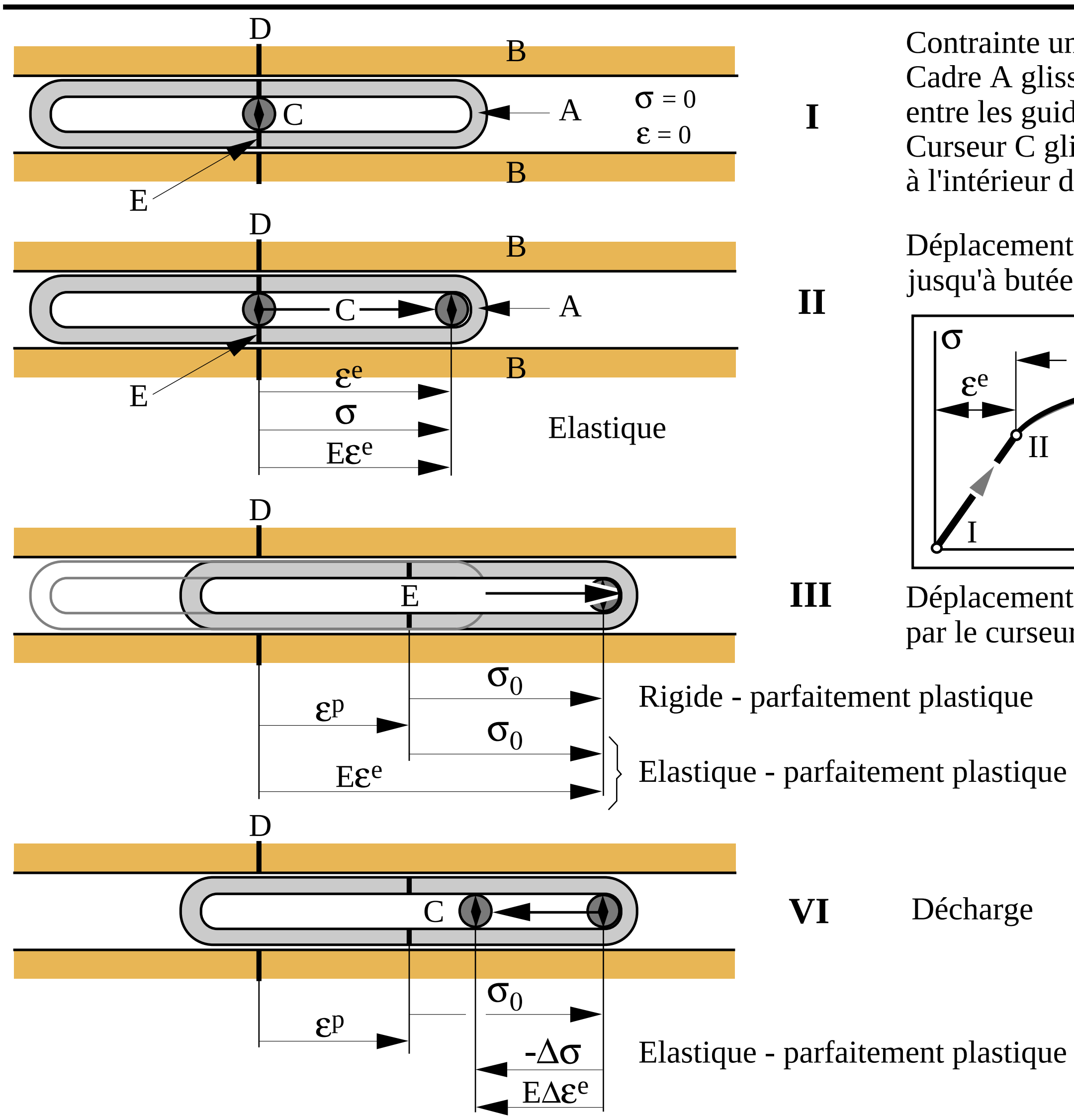
E = module de Young
ν = coefficient de Poisson
M_E = module M_E = module de déformation à la plaque
$E_{œd}$ = module œdométrique
K = module de déformation volumétrique
G = module de glissement ou de cisaillement
E_M = module pressiométrique

C_c = indice de compression
C_s = indice de gonflement
ε_0 = indice de vide correspondant à la contrainte effective verticale initiale en place
m_v = coefficient de compressibilité



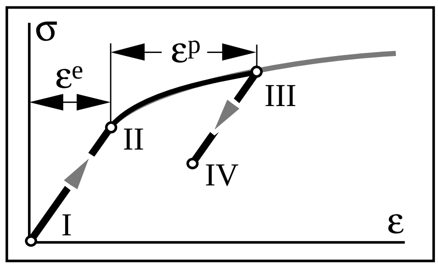
Très bref aperçu de la théorie de la plasticité





Contrainte uniaxiale
Cadre A glissant sans frottement entre les guides B.
Curseur C glissant sans frottement à l'intérieur du cadre A.

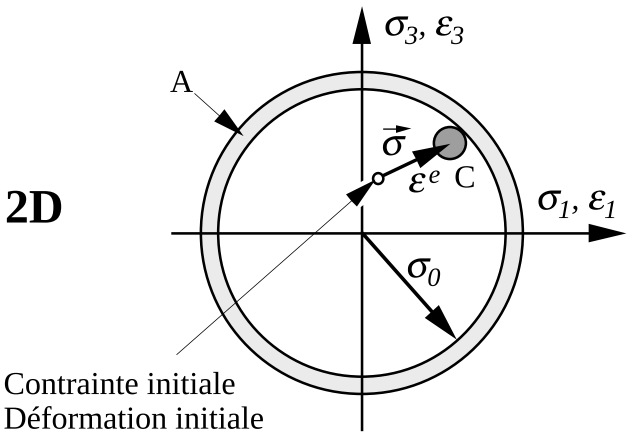
Déplacement du curseur C jusqu'à butée contre le cadre A.

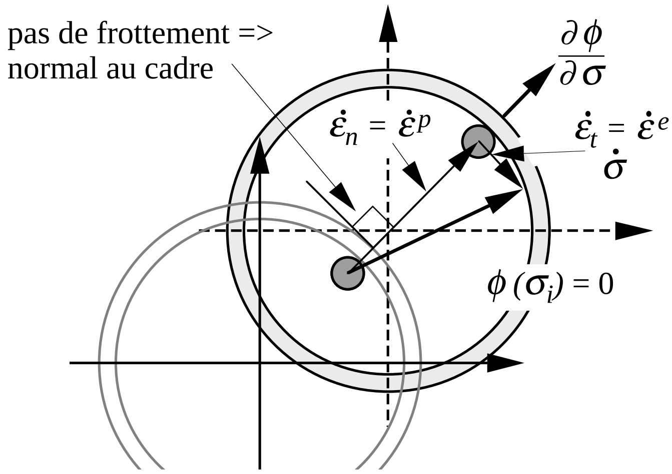


Déplacement du cadre A par le curseur C.

Très bref aperçu de la théorie de la plasticité (suite)

2D





Déplacement du curseur C à l'intérieur du cadre A, jusqu'à butée contre ce dernier.

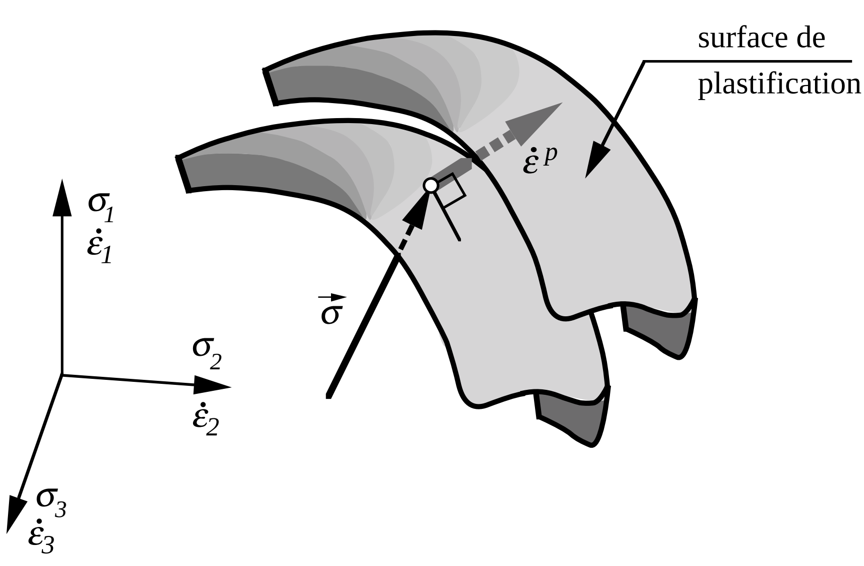
Déplacement du cadre A par le curseur C.

- L'incrément de contrainte $\dot{\sigma}$ ne fournit aucun travail sur l'incrément de déformation plastique $\dot{\varepsilon}^p$ puisqu'ils sont perpendiculaires = *premier principe* de la théorie de la plasticité.
- La *surface de plastification* $\phi(\sigma_i)$ est toujours convexe = *deuxième principe* de la théorie de la plasticité.
- L'incrément de déformation plastique $\dot{\varepsilon}^p$ est perpendiculaire à la surface de plastification $\phi(\sigma_i)$ et est donc parallèle et proportionnel à $\partial \phi / \partial \sigma$, ce qui détermine une *loi d'écoulement* de la forme :

$$\dot{\varepsilon}_i^p = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_i}$$

On dit alors que la loi d'écoulement est associée (à la surface de rupture).

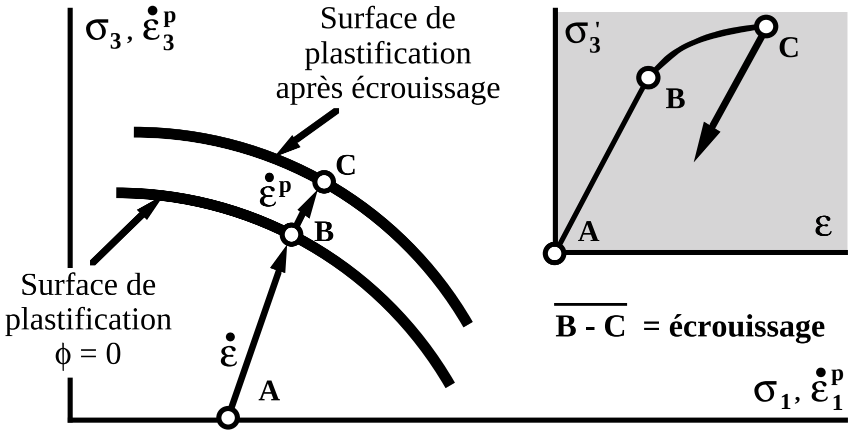
3D



Très bref aperçu de la théorie de la plasticité (suite)

Ecrouissage

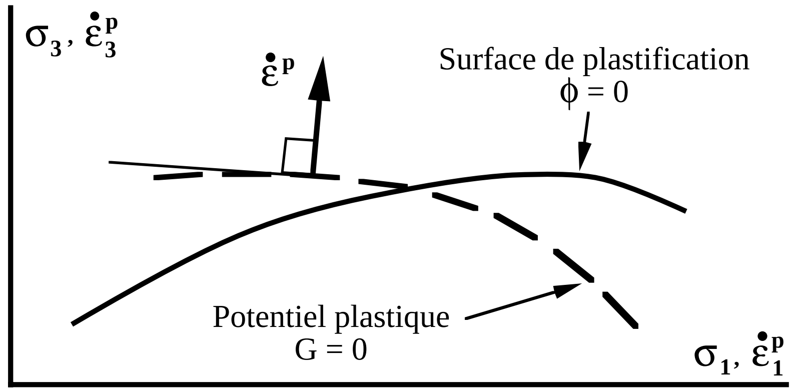
La consolidation et la résistance d'un sol sont intimement liées et ne devraient pas être dissociées car un sol fin est un matériau écrouissable. Si le terme *écrouissage* provient de la métallurgie et dénote un accroissement de la résistance lors de la plastification d'un matériau, il s'applique en fait beaucoup mieux aux sols qu'aux aciers. Le sol fin n'est même qu'écrouissage!



Le déplacement de la surface de plastification engendre une augmentation de la résistance.

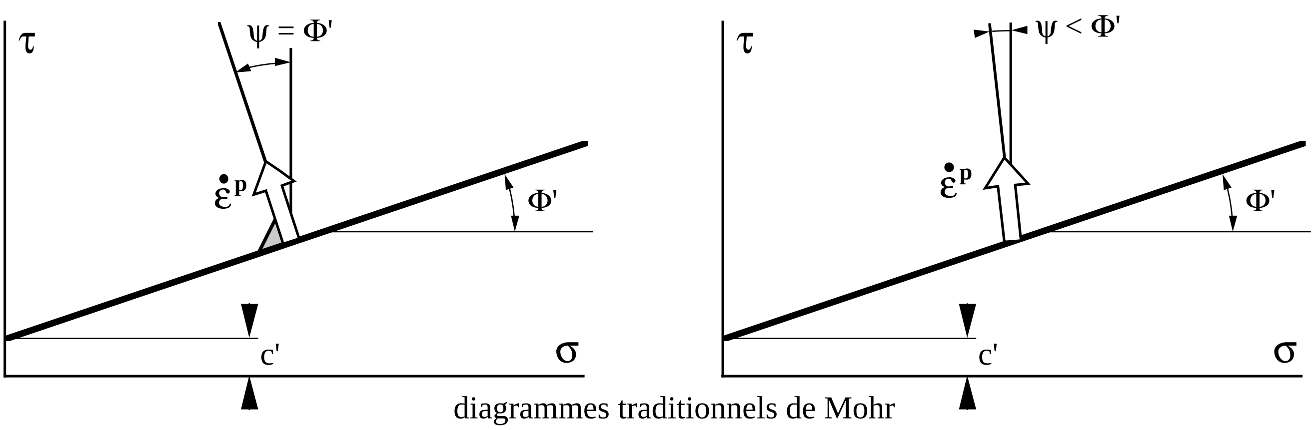
Loi de plastification non associée

Une loi d'écoulement associée peut conduire, dans les modèles numériques, à des difficultés. Pour cette raison, on utilise souvent des lois d'écoulement qui ne sont pas associées à la surface de plastification mais à une autre surface que l'on dénomme *potentiel plastique* sur laquelle l'incrément de déformation plastique est perpendiculaire; on dit alors que l'on utilise une *loi d'écoulement non associée*. Cette astuce permet de ne pas violer la théorie de la plasticité.



Loi associée $\psi = \Phi'$ **Loi non associée $\psi < \Phi'$**

ψ = angle de dilatation (voir document No 5b)

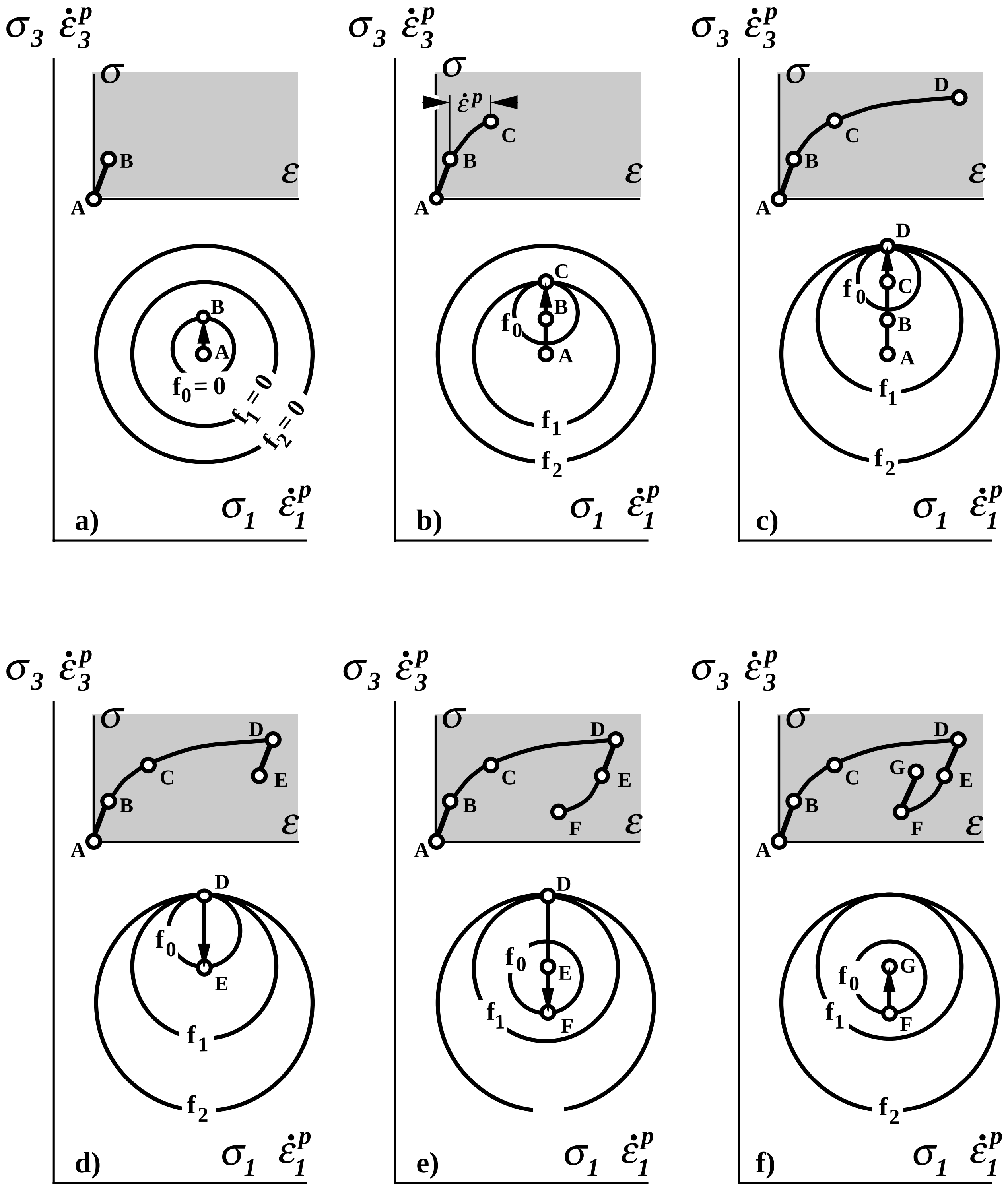


diagrammes traditionnels de Mohr

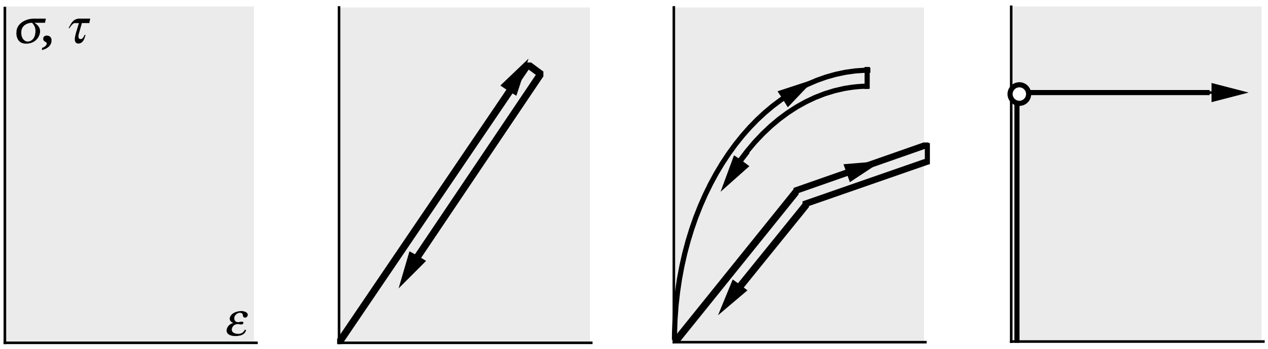
Très bref aperçu de la théorie de la plasticité (suite et fin)

Surfaces de plastification multiples

A l'intérieur du volume délimité par la surface de plastification, si la loi constitutive est élasto-plastique, toutes les déformations se font selon une loi constitutive élastique. Dans ce volume on peut aussi admettre que chaque incrément de déformation, en charge et décharge, crée une nouvelle surface de plastification et, éventuellement, un nouveau potentiel plastique; on aura ainsi des *surfaces de plastifications multiples* qui permettront, notamment, de simuler correctement les phénomènes cycliques avec hystérésis.



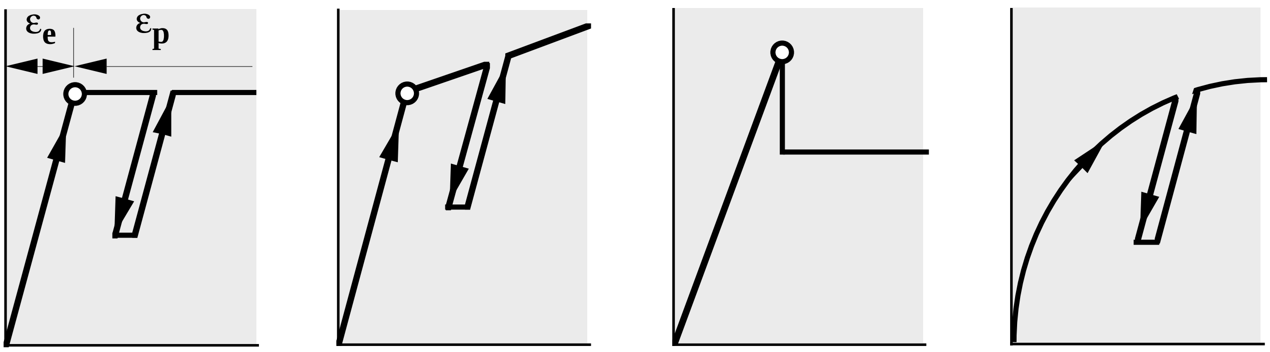
Principales lois constitutives = lois des matériaux = relations σ, ε



élastique-linéaire

élastique-non linéaire

rigide-parfaitement plastique



élasto-plastique sans écrouissage

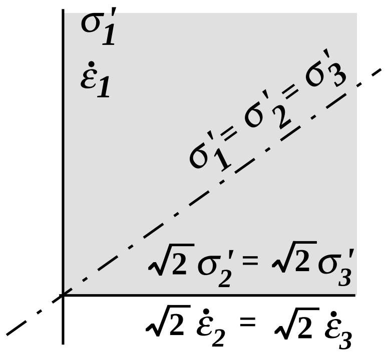
élasto-plastique avec écrouissage

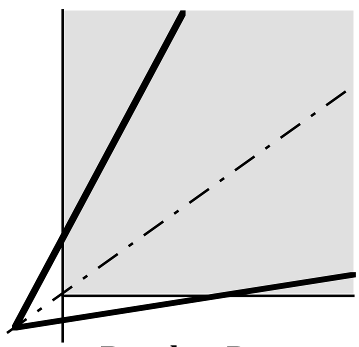
élasto-plastique fragile

hyperbolique (Kondner-Duncan)

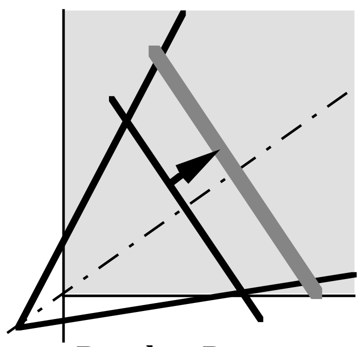
○ Critère de rupture = loi de plastification
(par ex. : Mohr-Coulomb, Drucker-Prager, von Mises)

Principales lois de plastification

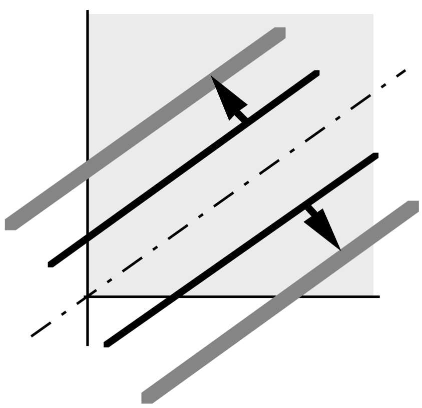




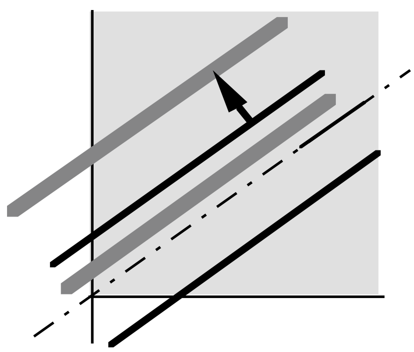
Drucker-Prager sans chapeau



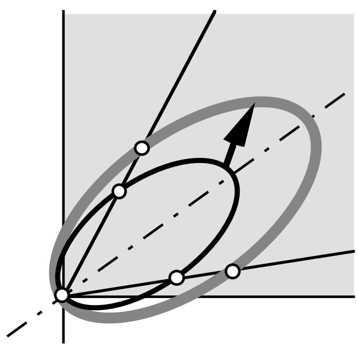
Drucker-Prager avec plan d'écrouissage



von Mises écrouissage orthotropique



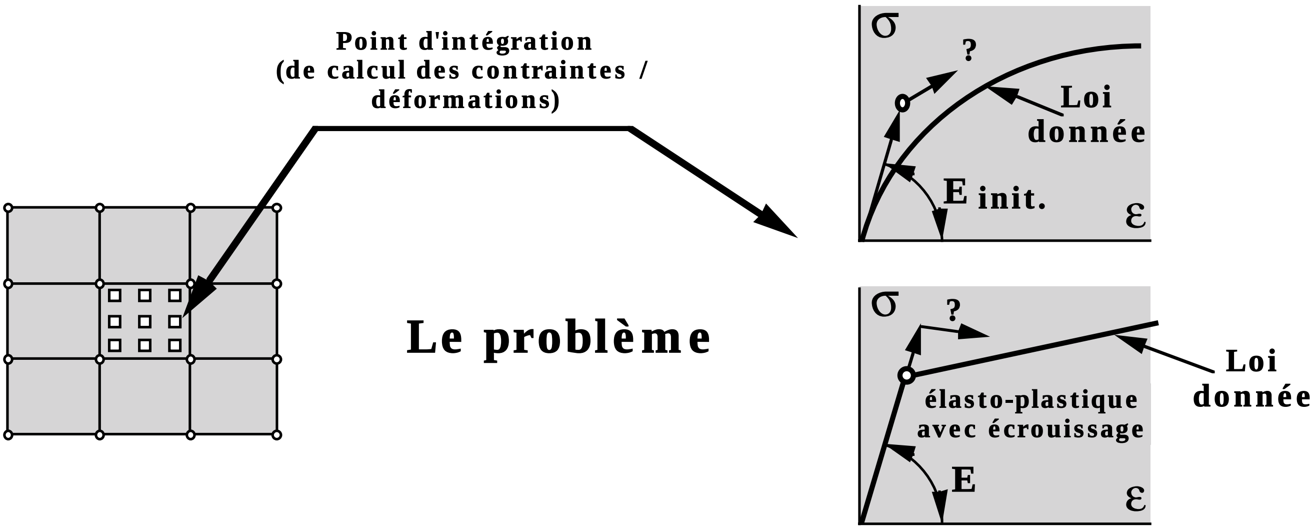
von Mises écrouissage cinématique



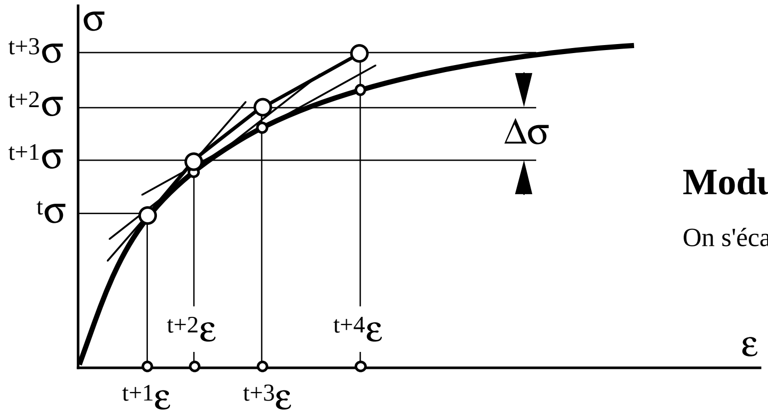
Cam - Clay

Principe du traitement des lois constitutives non linéaires

Le problème

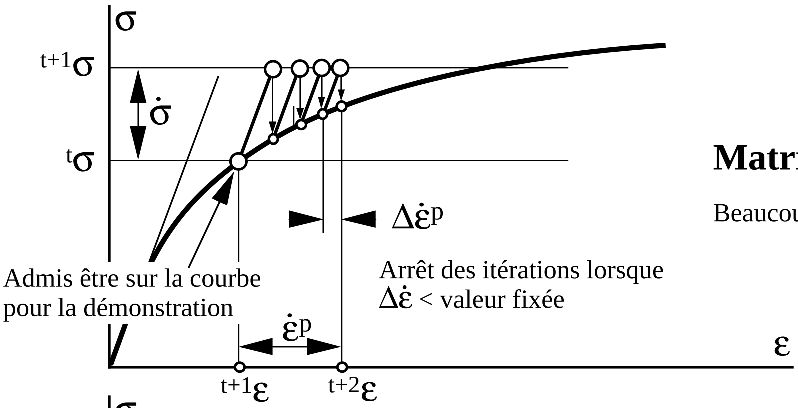


Diverses techniques :



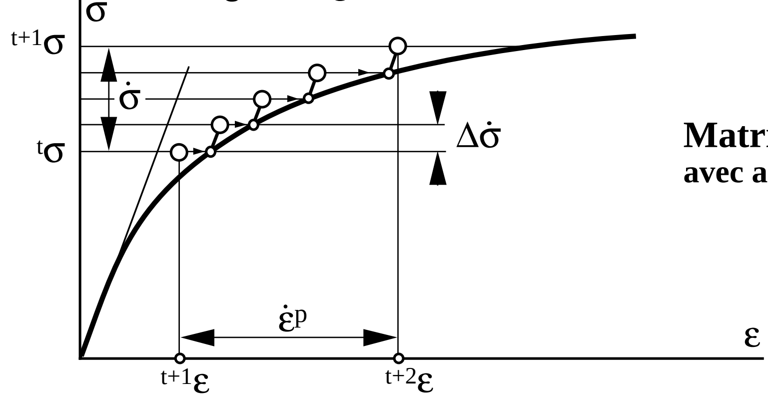
Module tangent

On s'écarte petit à petit de la solution exacte



Matrice de rigidité constante (élastique)

Beaucoup d'itérations mais bonne convergence



Matrice de rigidité constante (élastique)
avec autre technique

Principe du traitement des lois constitutives non linéaires (suite et fin)

Une solution : élasto-plastique avec écrouissage (von Mises)

Donnés (mémoire de la routine) :	**DEFO =**	**déformation totale au temps t + Δt (calculée par solution de l'équation d'équilibre des déplacements**
	SIG =	**contrainte au temps t**
	EPS =	**déformation totale au temps t**
	IP	**.EQ.0 => élastique au temps t, .GT.0 => plastique**

TAU est le nouvel état de contrainte qui détermine la valeur de la loi d'écoulement

DELEPS = DEFO - EPS
DELSIG = $D^E \cdot$ DELEPS
TAU = SIG + DELSIG

D^E = matrice élastique

f = loi de plastification
von Mises 2D (σ_3 = 0, contrainte plane) :

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\,\sigma_1\sigma_2 - \sigma_y^2 = 0$$

avec $\sigma_y = 2\,c_u$

f (TAU) **≤0 => élastique, STRESS = TAU, Return**

>0

IP **.GT. 1**

transition élastique => plastique **.EQ. 0**

à STRESS_PL la loi de plastification est égale à 0 et l'écoulement plastique commence

STRESS_PL = SIG + RATIO · DELSIG
f (STRESS_PL) = 0 => RATIO

RATIO = part de la déformation incrémentale prise élastiquement

TAU = SIG + RATIO · DELSIG
DEPS = (1 - RATIO) · DELEPS

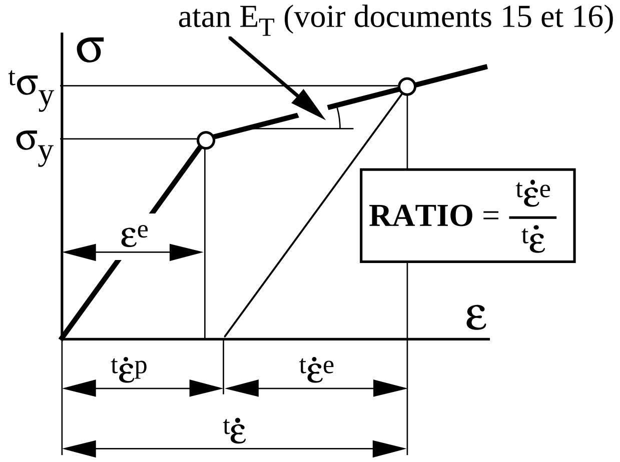
n fois

TAU = TAU + $D^{EP} \cdot$ DDEPS

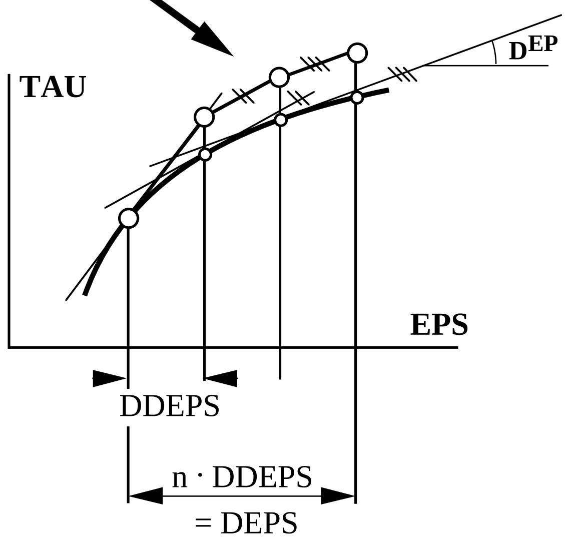
DDEPS = DEPS / n car D^{EP} est fonction de SIG

D^{EP} = matrice élasto-plastique
(documents 15 et 16)

Return



${}^t\dot\varepsilon^e > \varepsilon^e$ à cause de la part élastique de la déformation après plastification (voir document 11b)



Matrice élasto-plastique

L'écrouissage peut être introduit, dans la loi de plastification, par une variable d'état ***R*** qui détermine la position de la surface de plastification à un certain moment et aussi, le travail dissipé par l'incrément de déformation plastique.

Loi de plastification: $F(\sigma_{ij}\,;\,\boldsymbol{R}) = 0$ (1)

Incrément de déformation plastique: $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \lambda \dfrac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$ (document 11b) (2)

Comme sur la surface de plastification F = 0 et que la loi est associée, on peut écrire:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^{p}} \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = 0 \qquad (3)$$

Par commodité posons: $q_{ij} = \dfrac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$ et $p_{ij} = \dfrac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^{p}}$

Nous savons déjà que: $\dot{\sigma}_{ij} = D^{E} \cdot \left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{p}\right)$ (4)

avec D^E = matrice d'élasticité (voir documents 8a).

En combinant (2), (3) et (4) on peut calculer: $\lambda = \dfrac{q_{ij}^{T} \cdot D^{E} \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}}{p_{ij}^{T} \cdot q_{ij} + q_{ij}^{T} \cdot D^{E} \cdot q_{ij}}$ (5)

En remplaçant λ dans (2) et (4): $\dot{\sigma}_{ij} = D^{EP} \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}$ (6)

avec: $D^{EP} = D^{E} - \dfrac{D^{E} \cdot q_{ij} \cdot \left(D^{E} \cdot q_{ij}\right)^{T}}{p_{ij}^{T} \cdot q_{ij} + q_{ij}^{T} \cdot D^{E} \cdot q_{ij}}$

D^{EP} est la *matrice élasto-plastique* dont un exemple figure sur le document 16.

Dans le cas de la loi de plastification de von Mises qui peut s'écrire: $F = \dfrac{1}{2}\sigma_{oct}^{2} - \boldsymbol{R} = 0$, avec ***R*** = variable d'état = $\dfrac{2}{3}c_u^2$ (voir figure du document 16) et c_u = cohésion apparente (non drainée), on peut montrer que (sans démonstration):

$$q_{ij} = \sigma_{oct} \quad \text{et} \quad p_{ij} = H \cdot \sigma_{ij} \quad \text{avec} \quad H = \frac{2}{3}\left(\frac{E \cdot E_T}{E - E_T}\right)$$

E est le module de Young, E_T le *module d'écrouissage* (définit graphiquement sur le document 16) et on peut appeler *H*: *paramètre d'écrouissage*. En plasticité parfaite, *H* = 0.

Matrice élasto-plastique von Mises 3D

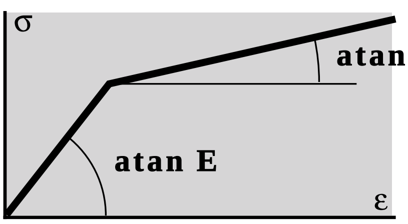
au temps fictif **t**; déformations calculées précédemment par la solution de l'équation d'équilibre des déplacements (document No 14b)

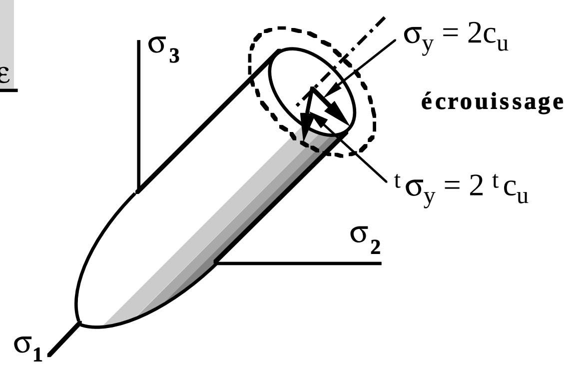
au temps fictif **t+1**

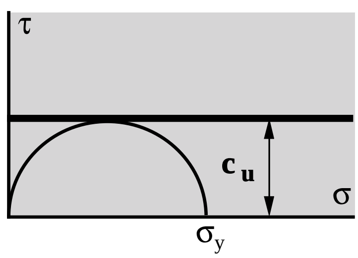
$$^{t+1}\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \tau_{12}\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\end{Bmatrix} = {}^{t}\mathbf{D}^{EP} \; {}^{t}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31}\end{Bmatrix} \qquad \varepsilon_{12} = \frac{\gamma_{12}}{2}\ \text{, etc.} \qquad \mathbf{D}^{EP} = \mathbf{f}\,(\sigma)$$

$$^{t}\mathbf{D}^{EP} = \frac{E}{1+\nu}\begin{bmatrix}
\frac{1-\nu}{1-2\nu} - \beta\,{}^t\sigma_1^2 & \frac{\nu}{1-2\nu} - \beta\,{}^t\sigma_1\,{}^t\sigma_2 & \frac{\nu}{1-2\nu} - \beta\,{}^t\sigma_1\,{}^t\sigma_3 & -\beta\,{}^t\sigma_1\,{}^t\sigma_{12} & -\beta\,{}^t\sigma_1\,{}^t\sigma_{23} & -\beta\,{}^t\sigma_1\,{}^t\sigma_{31}\\
 & \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \beta\,{}^t\sigma_2^2 & \frac{\nu}{1-2\nu} - \beta\,{}^t\sigma_2\,{}^t\sigma_3 & -\beta\,{}^t\sigma_2\,{}^t\sigma_{12} & -\beta\,{}^t\sigma_2\,{}^t\sigma_{23} & -\beta\,{}^t\sigma_2\,{}^t\sigma_{31}\\
 & & \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \beta\,{}^t\sigma_3^2 & -\beta\,{}^t\sigma_3\,{}^t\sigma_{12} & -\beta\,{}^t\sigma_3\,{}^t\sigma_{23} & -\beta\,{}^t\sigma_3\,{}^t\sigma_{31}\\
 & & & \frac{1}{2} - \beta\,{}^t\sigma_{12}^2 & -\beta\,{}^t\sigma_{12}\,{}^t\sigma_{23} & -\beta\,{}^t\sigma_{12}\,{}^t\sigma_{31}\\
 & \text{symétrique} & & & \frac{1}{2} - \beta\,{}^t\sigma_{23}^2 & -\beta\,{}^t\sigma_{23}\,{}^t\sigma_{31}\\
 & & & & & \frac{1}{2} - \beta\,{}^t\sigma_{31}^2
\end{bmatrix}$$

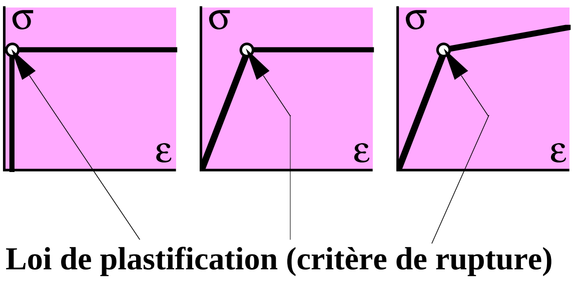
$$\beta = \frac{3}{2}\,\frac{1}{2\,{}^tc_u^2}\left(\frac{1}{1+\underbrace{\boxed{\frac{2}{3}\,\frac{E\,E_T}{E-E_T}}}_{=\,H}\,\frac{1+\nu}{E}}\right)$$







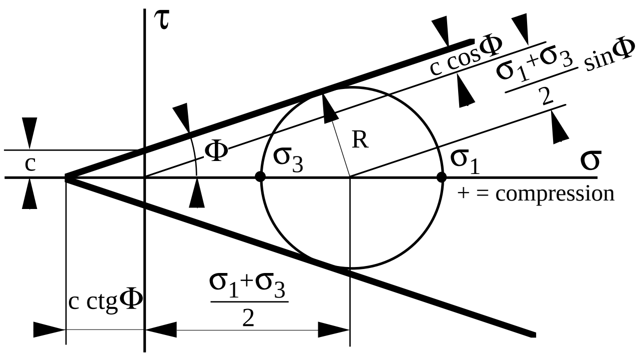
Lois de plastification classiques : von Mises, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager



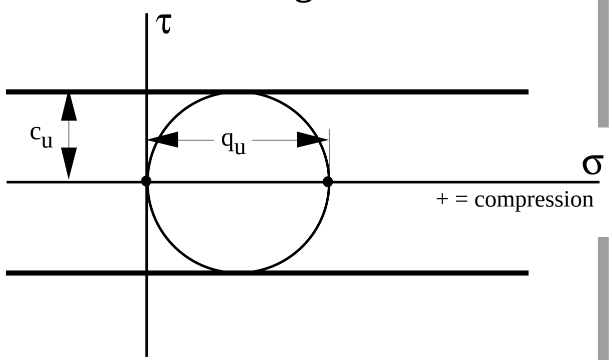
En mécanique des sols, usage surtout de deux lois de plastification :

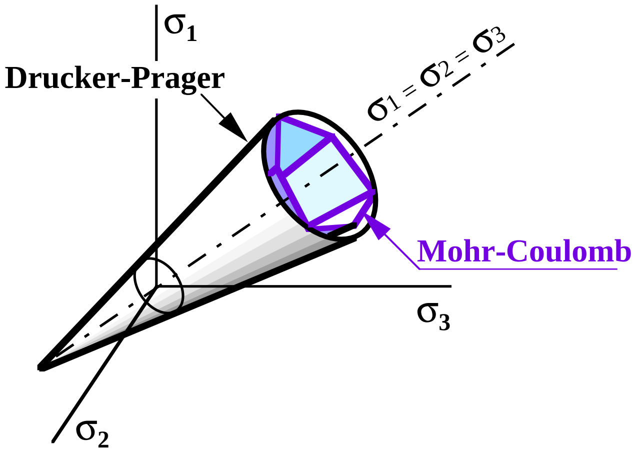
Loi	Etat du sol	Analyse
Mohr-Coulomb	drainé	c, Φ
von Mises	non drainé	c, Φ=0

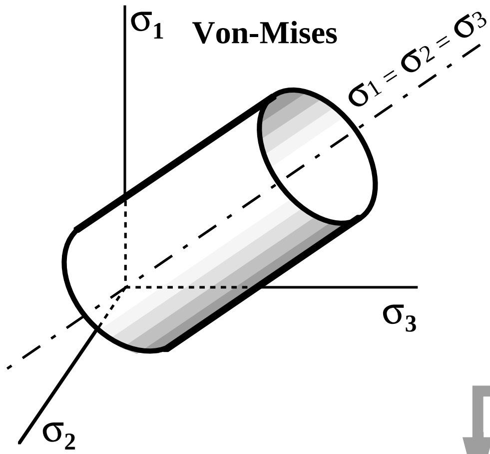
Mohr-Coulomb dans diagramme τ–σ



von Mises dans diagramme τ–σ

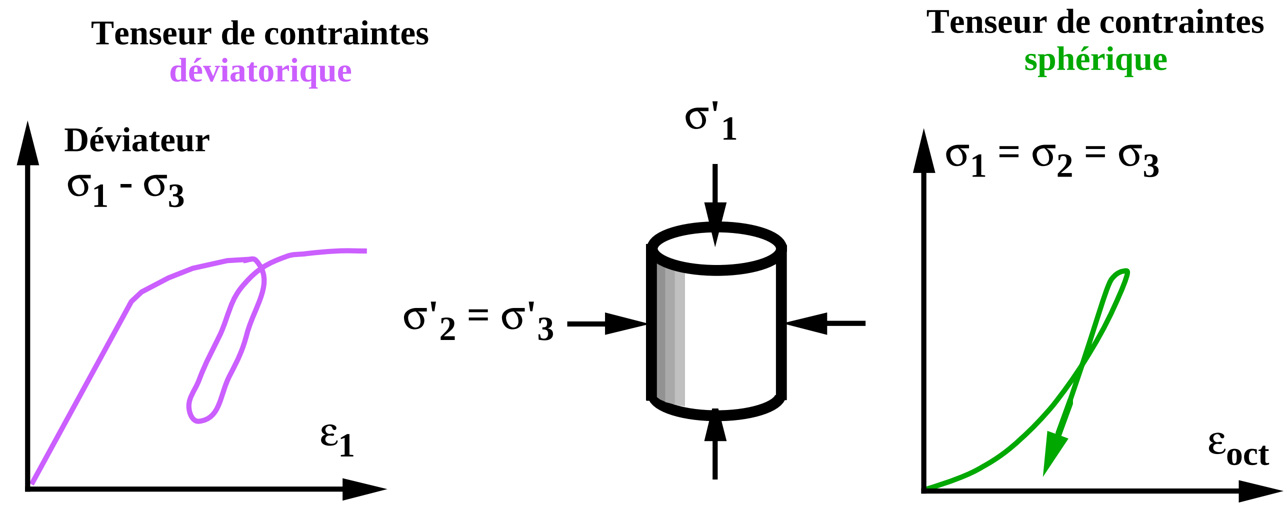


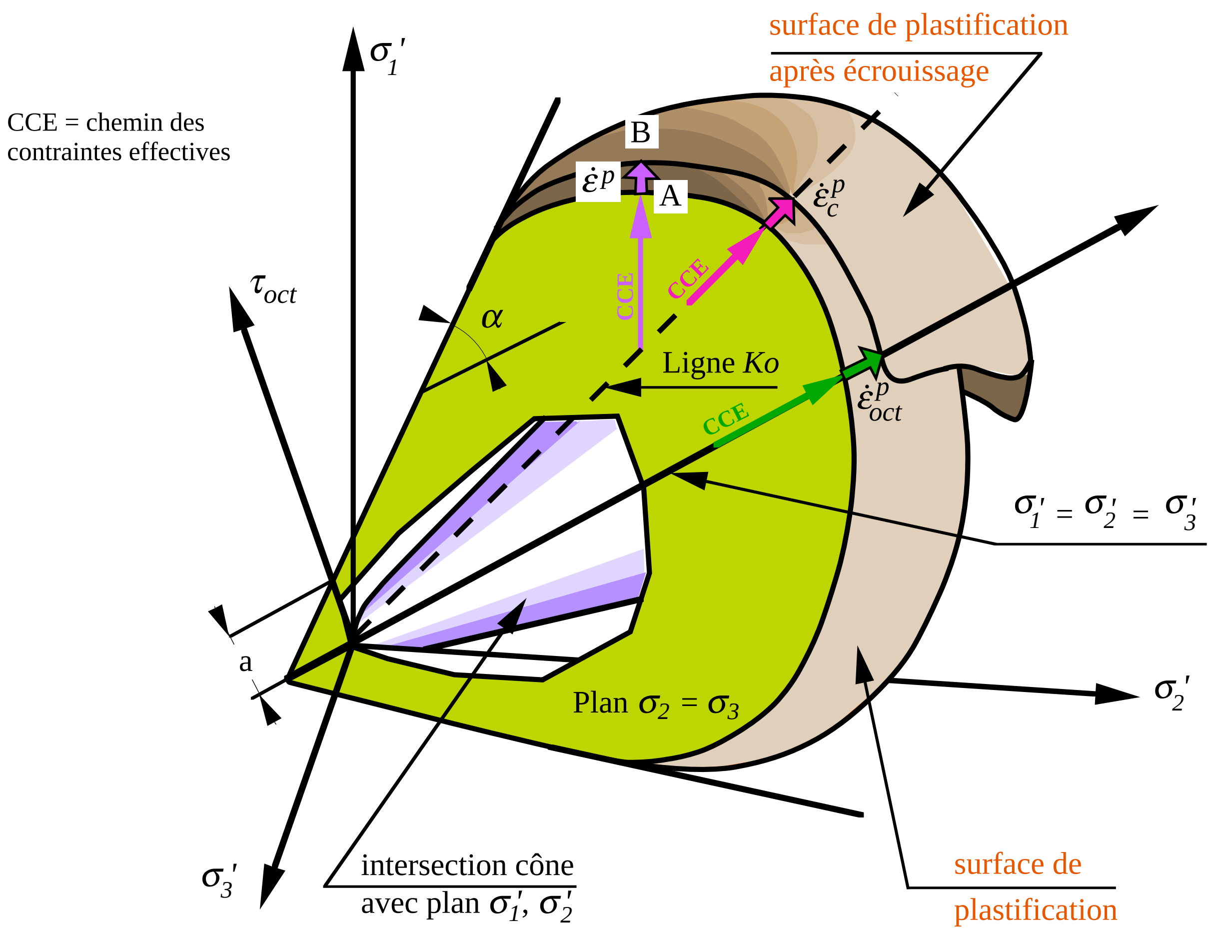




	Sols normalement consolidés		Sols fins surconsolidé
	Sols grossiers	Sols fins	
Stabilité à court terme	Δu = env. 0 Analyse c', Φ'	$\Delta u \neq 0$ Analyse c, Φ = 0 usage de c_u	Selon le degré de surconsolidation (OCR) et la sollicitation: • Analyse c, Φ = 0 avec usage de cu ($\Delta u \neq 0$) • Analyse c', Φ' avec usage des valeurs de pic (Δu = env. 0)
Stabilité à long terme	Δu = 0 Analyse c', Φ'	Δu = env. 0 Analyse c', Φ'	Δu = 0 Analyse c', Φ' avec usage des valeurs résiduelles Φ_R (c_R admis à 0)

Ecrouissage et plastification d'un sol limono-argileux dans l'espace des contraintes principales





Explications du document No 18a

Le cône de la figure axé sur la diagonale principale des contraintes effectives (σ'_{oct}) est l'équivalent de la loi constitutive de Mohr-Coulomb. Pas tout à fait cependant car, dans l'espace des contraintes principales, cette loi est un cône hexagonal fort mal pratique à modéliser. Pour cette raison, dans les modèles numériques actuels, on lui préfère la loi de Drucker-Prager qui définit le cône et qui est pratiquement équivalente à la loi de Mohr-Coulomb :

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \tau_{oct} + \alpha \cdot 3 \cdot \sigma_{oct} - a = 0$$

avec : $\sigma_{oct} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$

$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$

α et a = paramètres de la loi

Les paramètres de la loi de Drucker-Prager sont liés à ceux de la loi de Mohr-Coulomb par les relations suivantes, valables pour la symétrie de révolution qui est la géométrie de l'essai triaxial.

$$\alpha = \frac{2 \sin \Phi'}{\sqrt{3}(3 - \sin \Phi')} \qquad a = \frac{2c' \cos \Phi'}{\sqrt{3}(3 - \sin \Phi')}$$

Pour satisfaire aux lois de la *théorie de la plasticité* (et à la nature!) la surface de plastification doit être fermée; le cône est ainsi fermé par une portion d'ellipsoïde tangente à sa surface, en quelque sorte, un chapeau.

Lors d'une consolidation isotropique du sol ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) le vecteur des contraintes est confondu avec la diagonale de l'espace des contraintes. Ce chemin de contraintes conduit au diagramme contrainte-déformation du haut à droite de la figure et il produit un incrément de déformation plastique $\dot{\varepsilon}^p_{oct}$.

Cet incrément déplace la surface de plastification comme le montre la figure. C'est un écrouissage typique. Si la consolidation se fait sous le poids propre du sol, le vecteur des contraintes résultantes suivra la droite K_0, K_0 étant le *coefficient de pression des terres au repos* :

$$K_0 = \frac{\sigma_{horizontal}}{\sigma_{vertical}} = \frac{\nu}{1 - \nu} \approx 1 - \sin \Phi'$$

et l'incrément de déformation plastique correspondant est $\dot{\varepsilon}^p_c$.

On remarquera sur la figure que la surface de plastification fermant le cône a pour axe la droite K_0 et non pas la diagonale principale des contraintes car c'est ce qui se passe dans un sol consolidé sous son propre poids.

Avec le déviateur de contraintes aboutissant au point A de la figure, le diagramme contrainte-déformation résultant est celui du haut à gauche de la figure; l'incrément de déformation plastique produit aussi un écrouissage en déplaçant la surface de plastification de A à B.

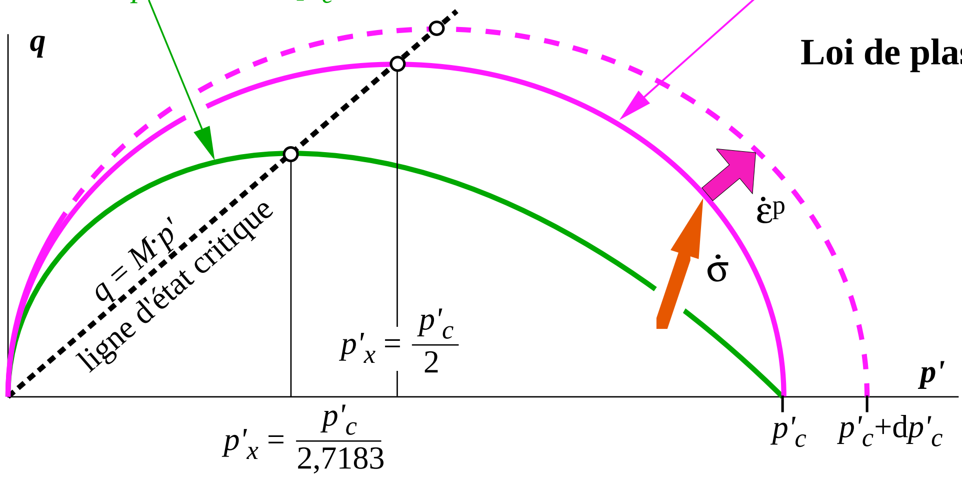
A l'*intérieur du volume délimité par le cône et son chapeau*, si la loi constitutive est élasto-plastique, toutes les déformations se font selon une *loi élastique*. Dans ce volume on peut aussi admettre que chaque incrément de déformation, en charge et décharge, crée une nouvelle surface de plastification et, éventuellement, un nouveau potentiel plastique; on aura ainsi des *surfaces de plastifications multiples* qui permettront, notamment, de simuler correctement les phénomènes cycliques avec hystérésis (voir document No 11d).

Une loi de plastification convenant bien aux sols : Cam-Clay

Cam-Clay : $F = \frac{q}{M \cdot p'} + \ln\left(\frac{2.7183\, p'}{p'_c}\right) - 1 = 0$

Cam-Clay modifiée : $F = q^2 - M^2 p' p'_c + M^2 p'^2 = 0$

Loi de plastification

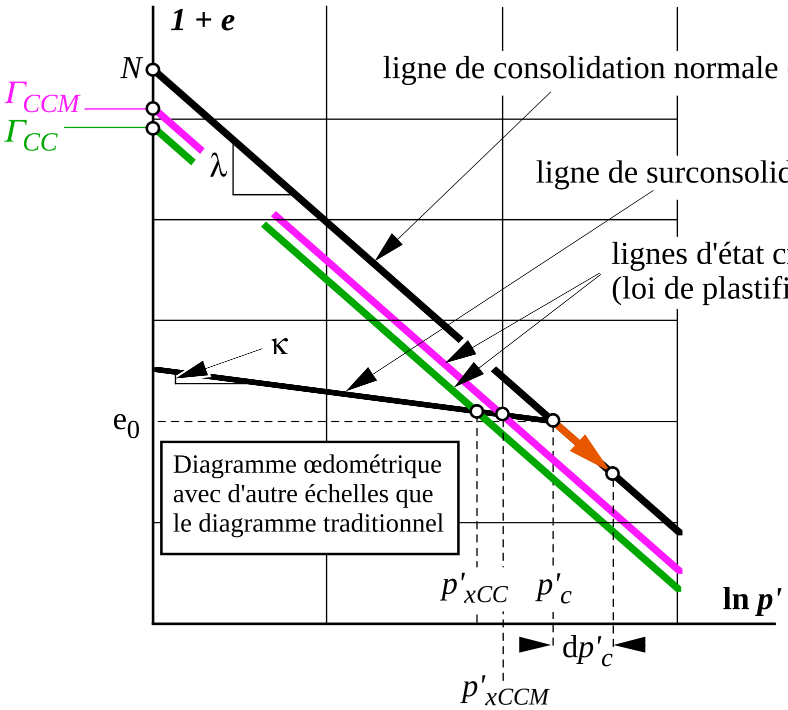


$$p' = \frac{I_1}{3} = \frac{\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3'}{3} = \frac{\sigma_1' + 2\sigma_3'}{3} \quad \text{si } \sigma_2' = \sigma_3'$$

$$q = \sqrt{3 I_2'} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad \text{si } \sigma_2' = \sigma_3'$$

Attention, p' est définit différemment que dans le diagramme p', q traditionnel

Loi de consolidation



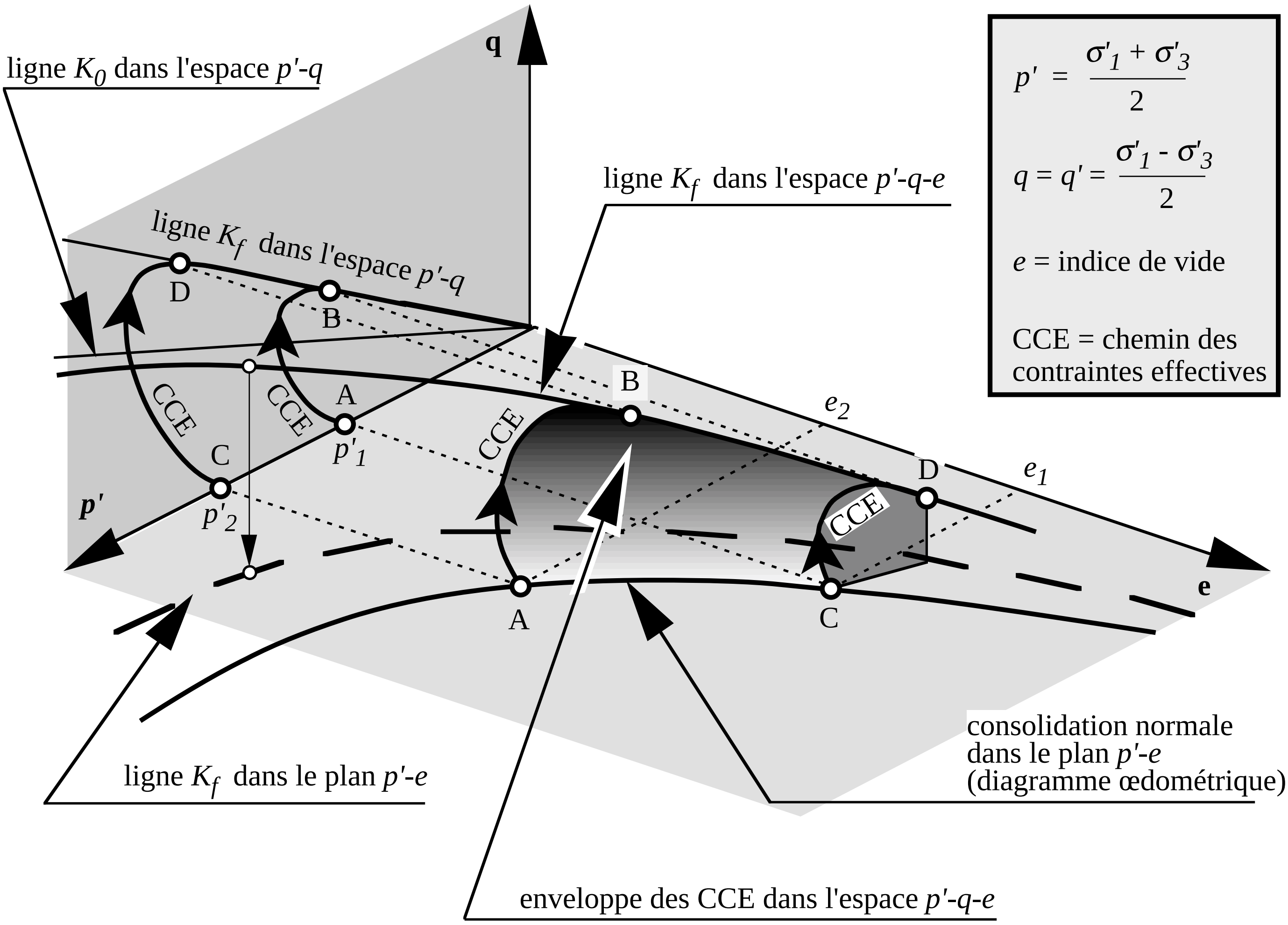
$\lambda = C_c / 2.303$

$\kappa = C_s / 2.303$

Cam-Clay mod. : $\Gamma_{CCM} = N - (\lambda + \kappa)\ln 2$

Cam-Clay : $\Gamma_{CC} = N - \lambda + \kappa$

Chemins de contraintes dans diagramme *p'-q-e*



$$p' = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2}$$

$$q = q' = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2}$$

e = indice de vide

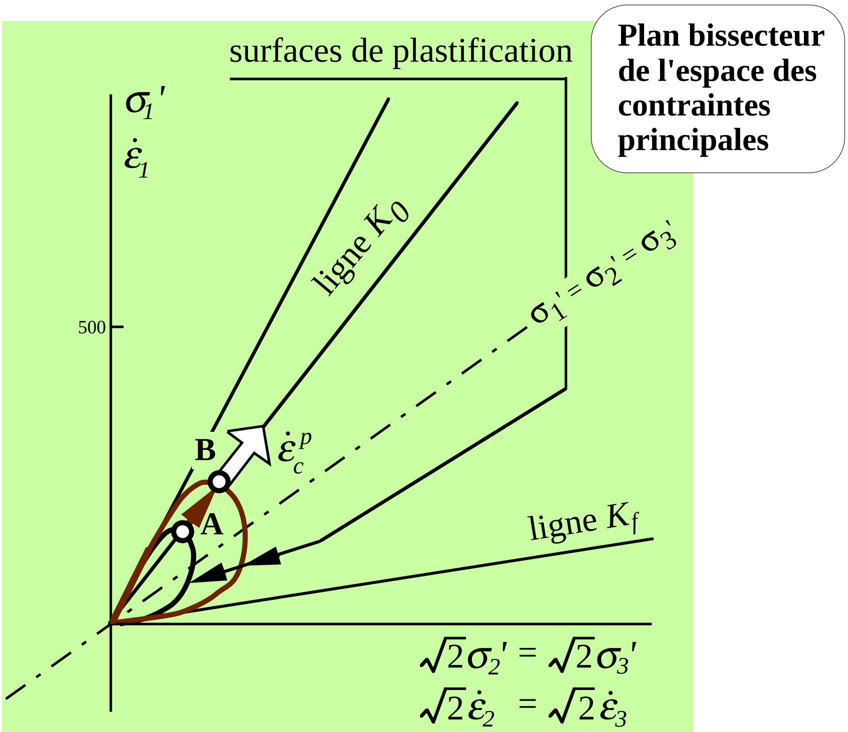
CCE = chemin des contraintes effectives

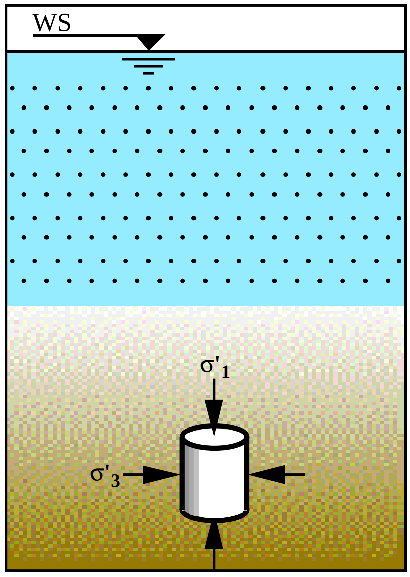
Dans l'espace *p'-q-e*, les CCE pourraient s'appeler CCED: chemin des contraintes effectives - déformations

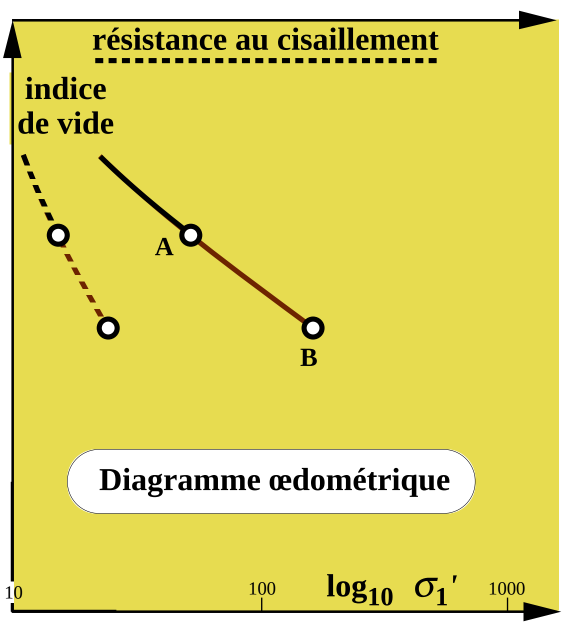
Un très bon diagramme pour comprendre les interactions entre les contraintes (*p'-q*) et les déformations (*e* = indice de vide)

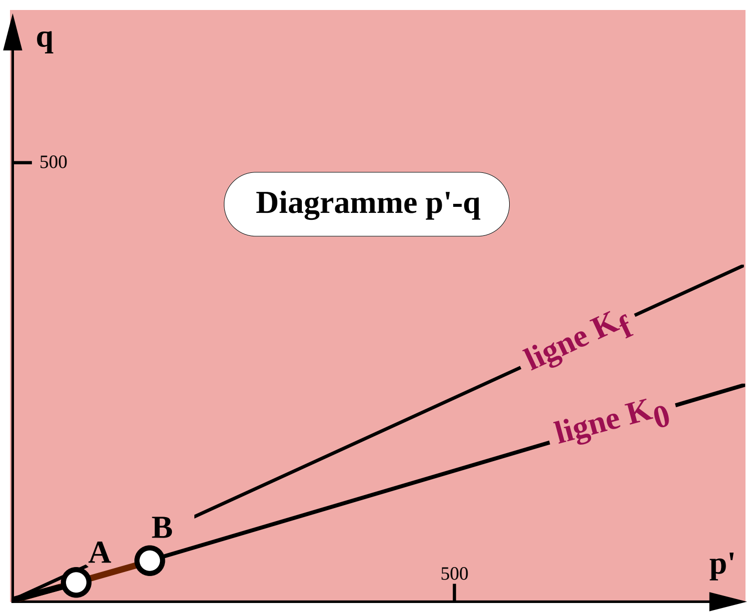
Etapes de l'écrouissage et de la plastification d'un sol limono-argileux (un cas parmi beaucoup d'autres)

1. Formation du sol par sédimentation : A – B



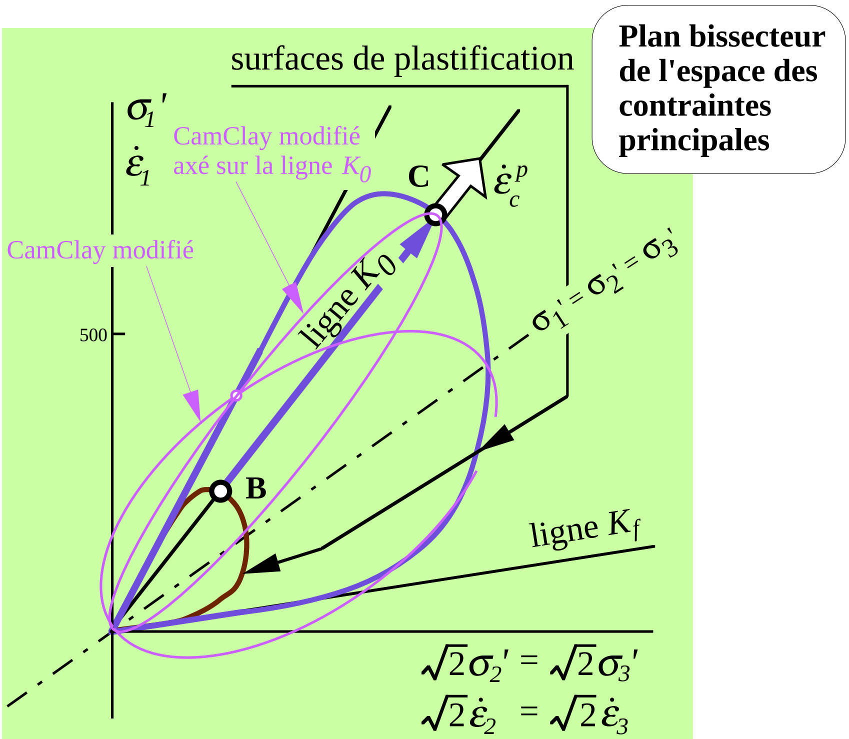


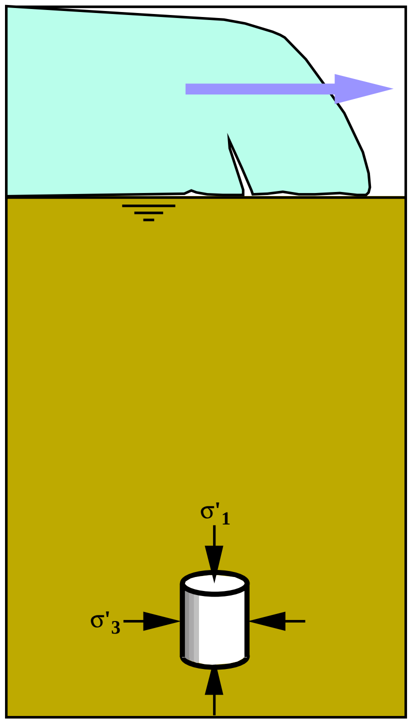


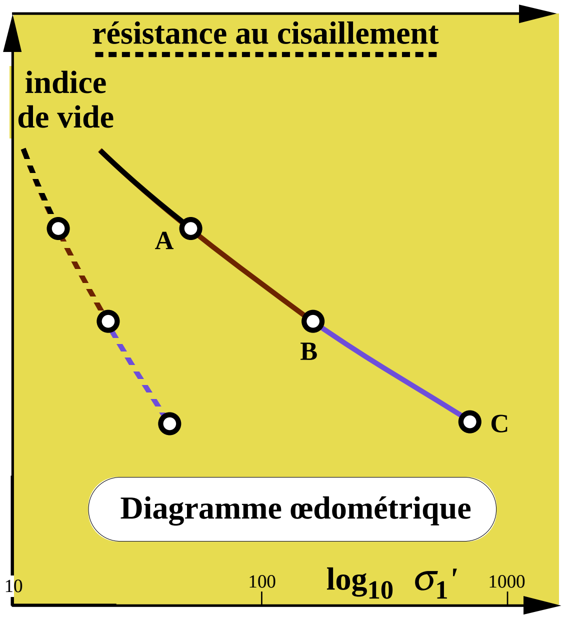


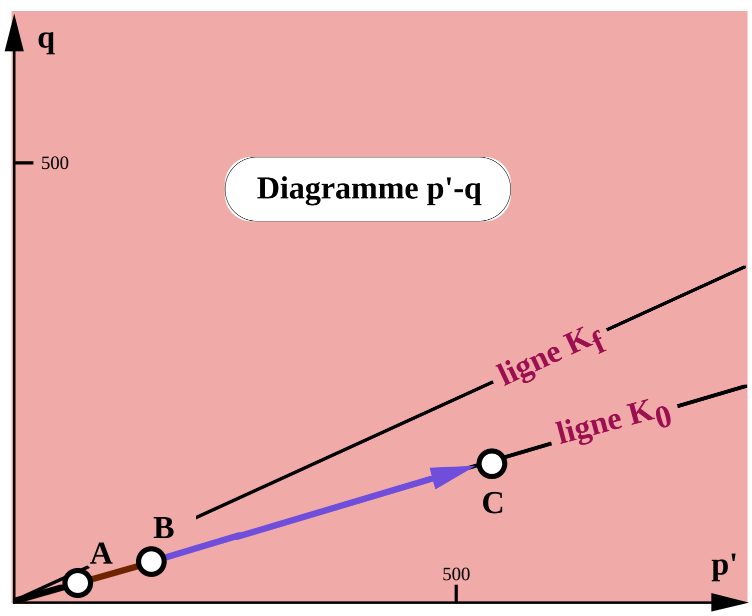
Etapes de l'écrouissage et de la plastification d'un sol limono-argileux (un cas parmi beaucoup d'autres)

2. Surcharge par un glacier : B – C







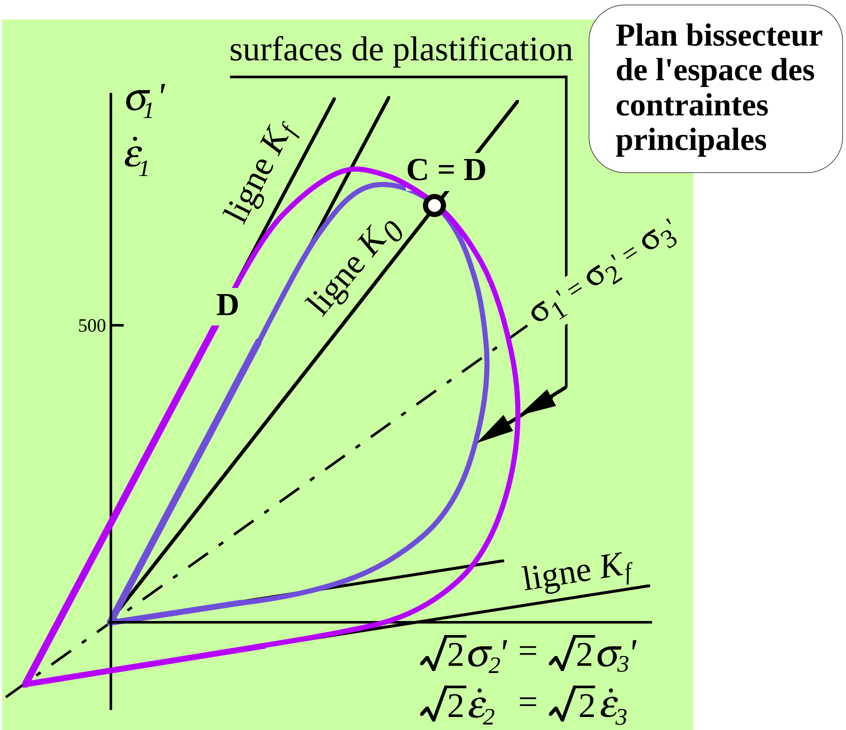


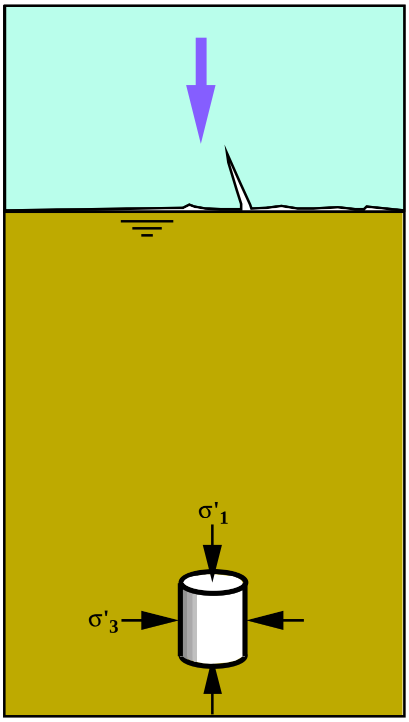
Cycle postgrade EPFL : Géologie Appliquée à l'Ingénierie et à l'Environnement
Module D1-6: **Modélisation en contraintes-déformations** M. Dysli

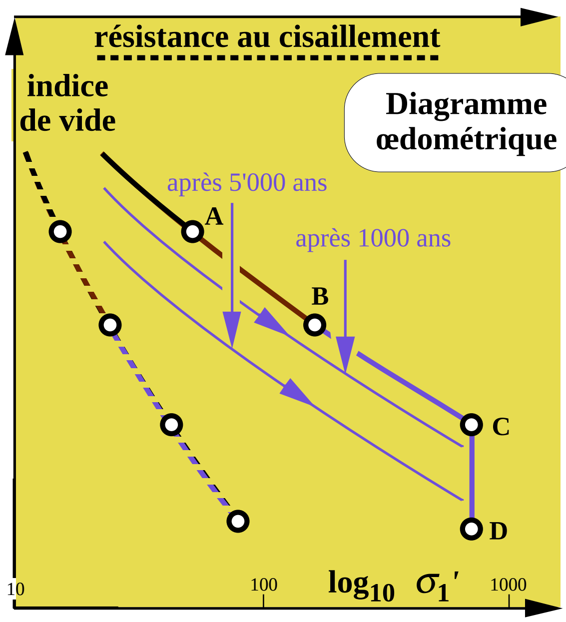
Document No 21c

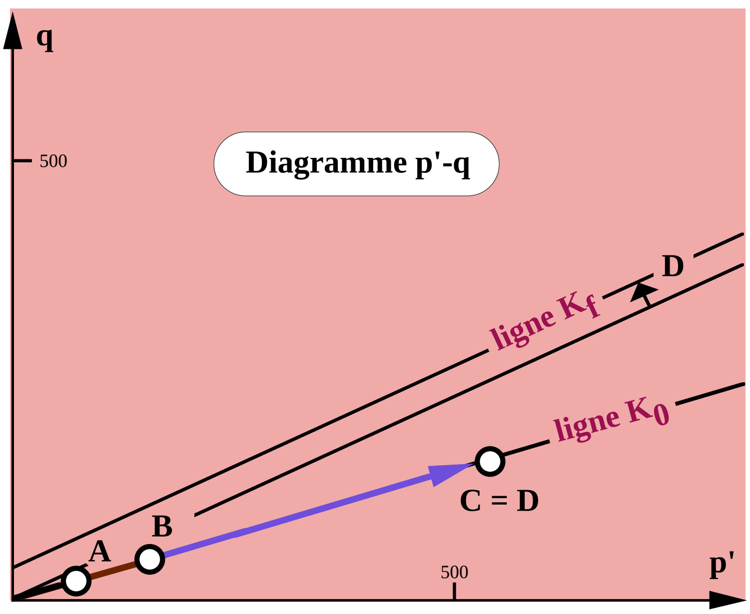
Etapes de l'écrouissage et de la plastification d'un sol limono-argileux (un cas parmi beaucoup d'autres)

3. Consolidation secondaire (diagénétique) sous le poids du glacier : C – D



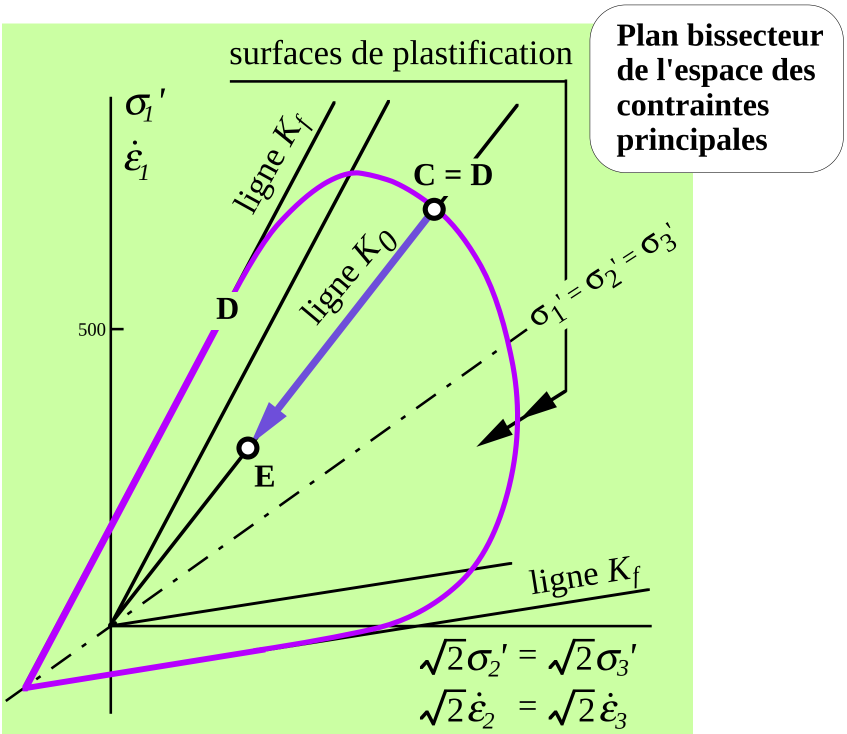


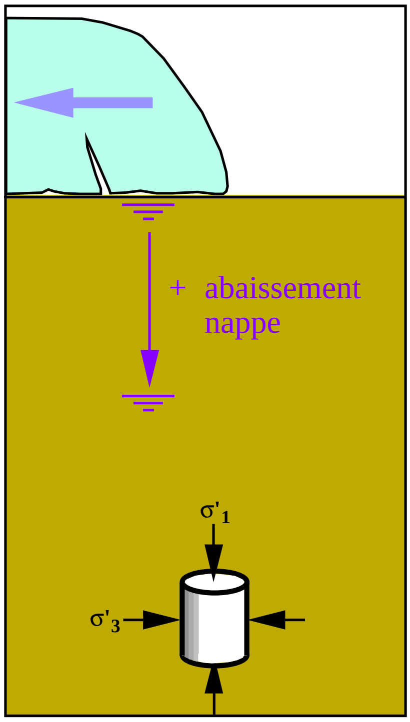


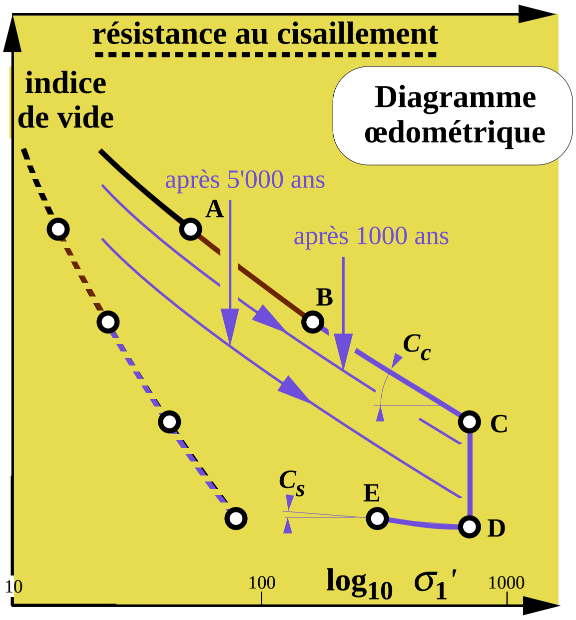


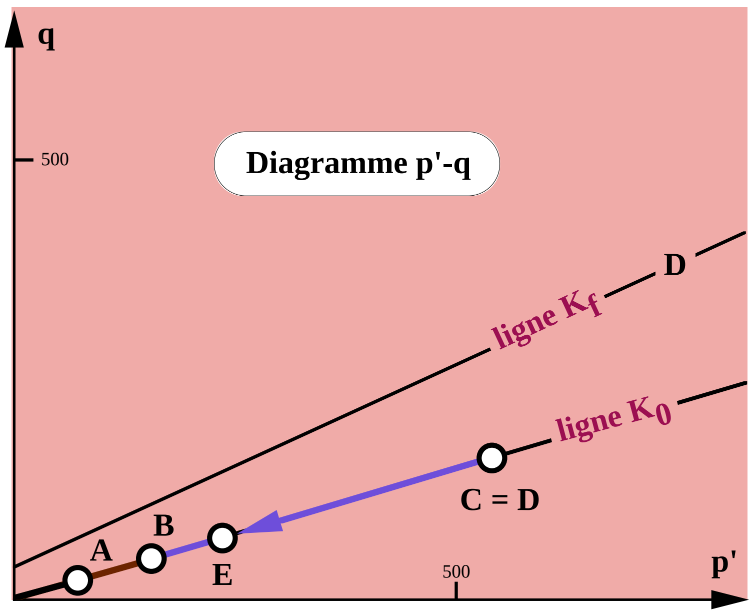
Etapes de l'écrouissage et de la plastification d'un sol limono-argileux (un cas parmi beaucoup d'autres)

4. Décharge par fonte du glacier : C (D) – E





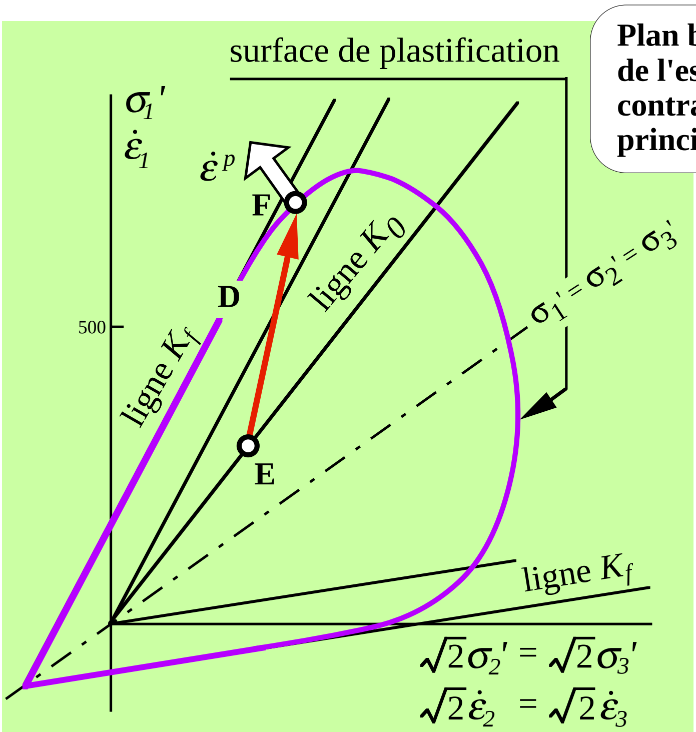


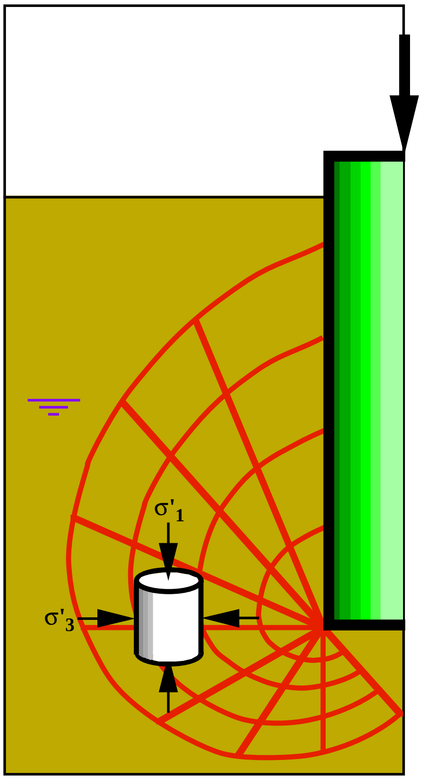


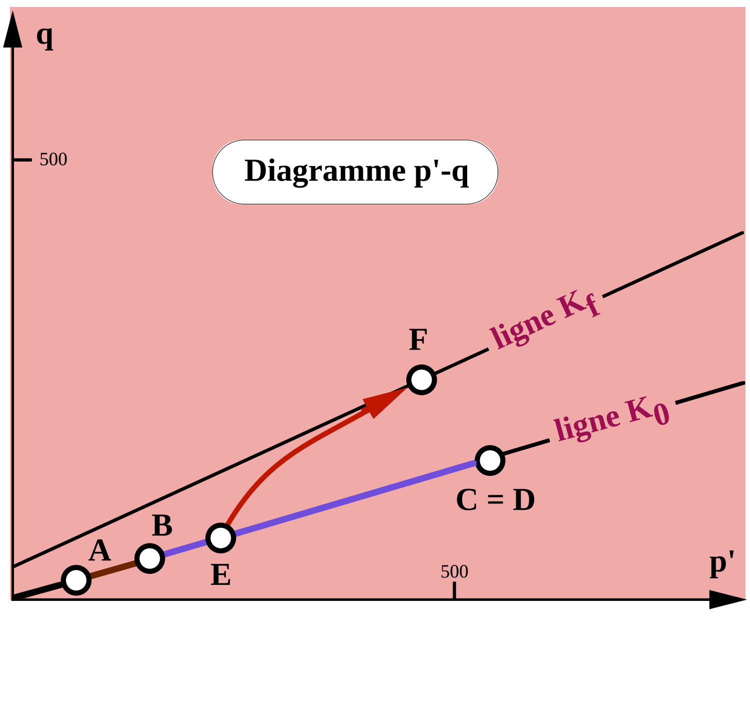
Etapes de l'écrouissage et de la plastification d'un sol limono-argileux (un cas parmi beaucoup d'autres)

5. Cisaillement par un pieu : E – F

Plan bissecteur de l'espace des contraintes principales

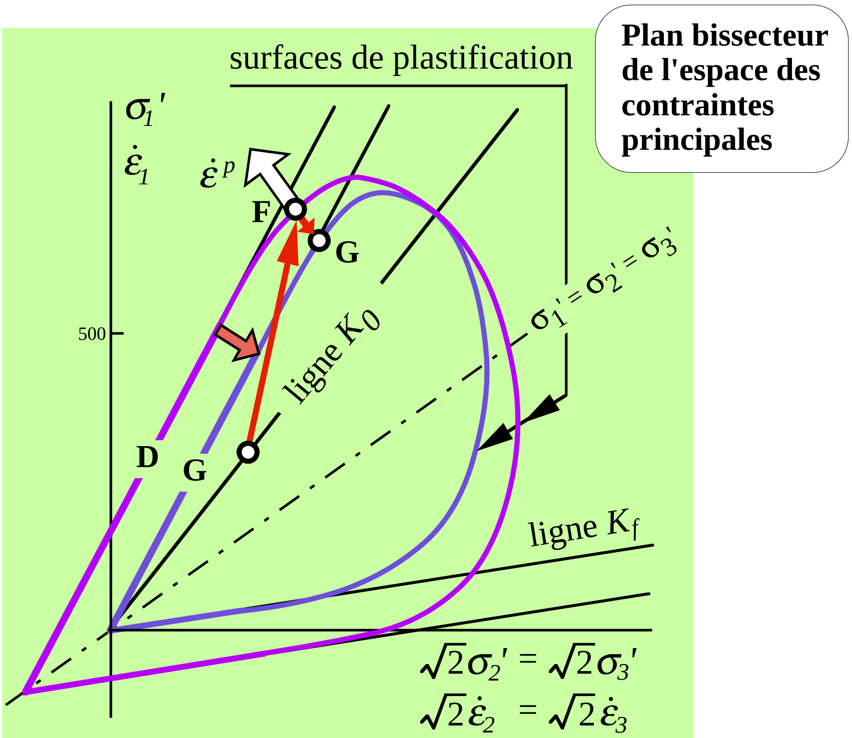


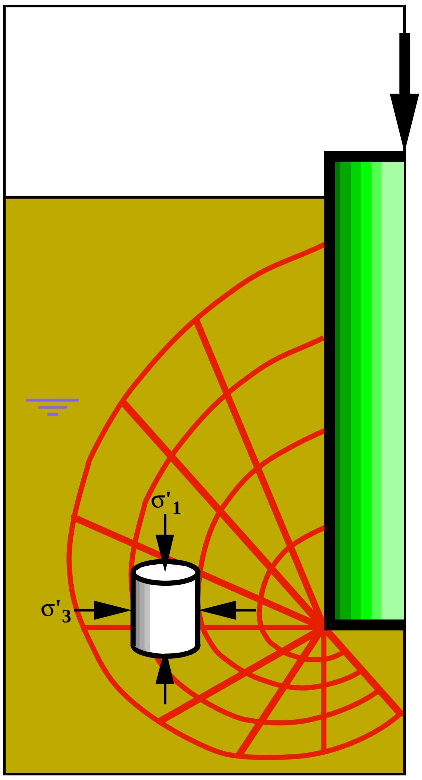


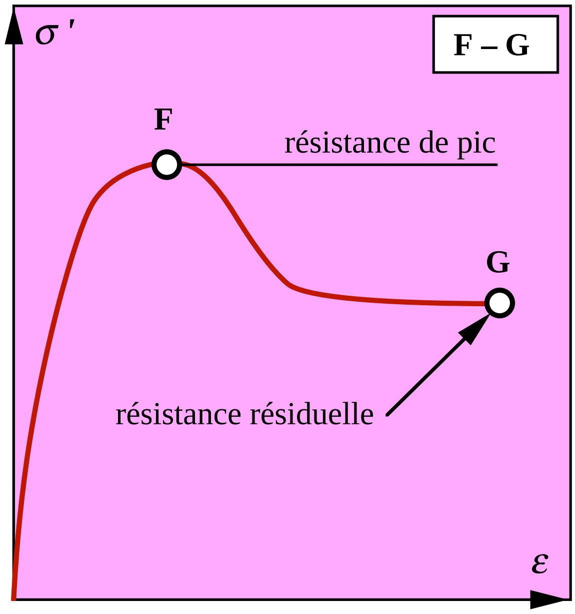


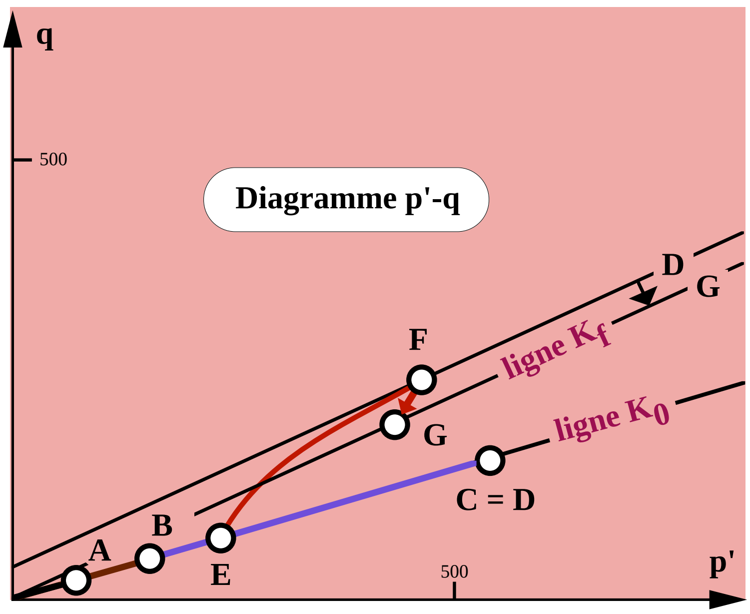
Etapes de l'écrouissage et de la plastification d'un sol limono-argileux (un cas parmi beaucoup d'autres)

6. Décrouissage lors du cisaillement : F – G









Explications des documents No 21a à 21f

Une représentation en trois dimensions du type de celle de du document 18a est nécessaire à la compréhension de la modélisation du comportement plastique des sols; elle est nonobstant un peu compliquée et il est plus facile de montrer graphiquement les différents schémas possibles dans une représentation à deux dimensions. On utilise souvent pour cela le plan bissecteur $\sigma_2 = \sigma_3$, plan utilisé sur les documents 21. En outre, il est intéressant de comparer le comportement d'un sol sous diverses sollicitations par leur représentation dans d'autres diagrammes classiques. Pour cette raison, sur les figures 21, on trouvera aussi le diagramme œdométrique et le diagramme p-q. Sur le diagramme œdométrique on a aussi représenté la résistance au cisaillement du sol, par exemple celle mesurée avec un scissomètre. Enfin, dans les documents 21, l'évolution du tenseur des contraintes est évaluée au droit du petit schéma représentant ce tenseur (cylindre avec σ_1' et σ_3').

Document 21a: Lors de la *formation d'un sol par sédimentation*, le tenseur des contraintes qui s'établit et croit, est défini par le coefficient de pression des terres au repos K_0. Le sol se consolide sous son propre poids en poussant petit à petit la surface de plastification (chemin A-B sur le document). Sa résistance, en un point donné du sol, augmente progressivement grâce à cet écrouissage qui débute dès la première couche de sédiments déposée (voir, en particulier, le diagramme œdométrique).

Document 21b: Après la formation du sol, une *surcharge* peut s'exercer sur lui, par exemple celle d'un glacier lors de la glaciation würmienne (chemin B-C sur le document).

Document 21c: Pendant que cette surcharge règne (des milliers d'années si c'est celle d'un glacier würmien) des phénomènes de diagénèses (consolidation secondaire) vont poursuivre ce processus de consolidation en augmentant surtout la cohésion, mais, cette fois ci, sans modification du tenseur des contraintes (surface D du document).

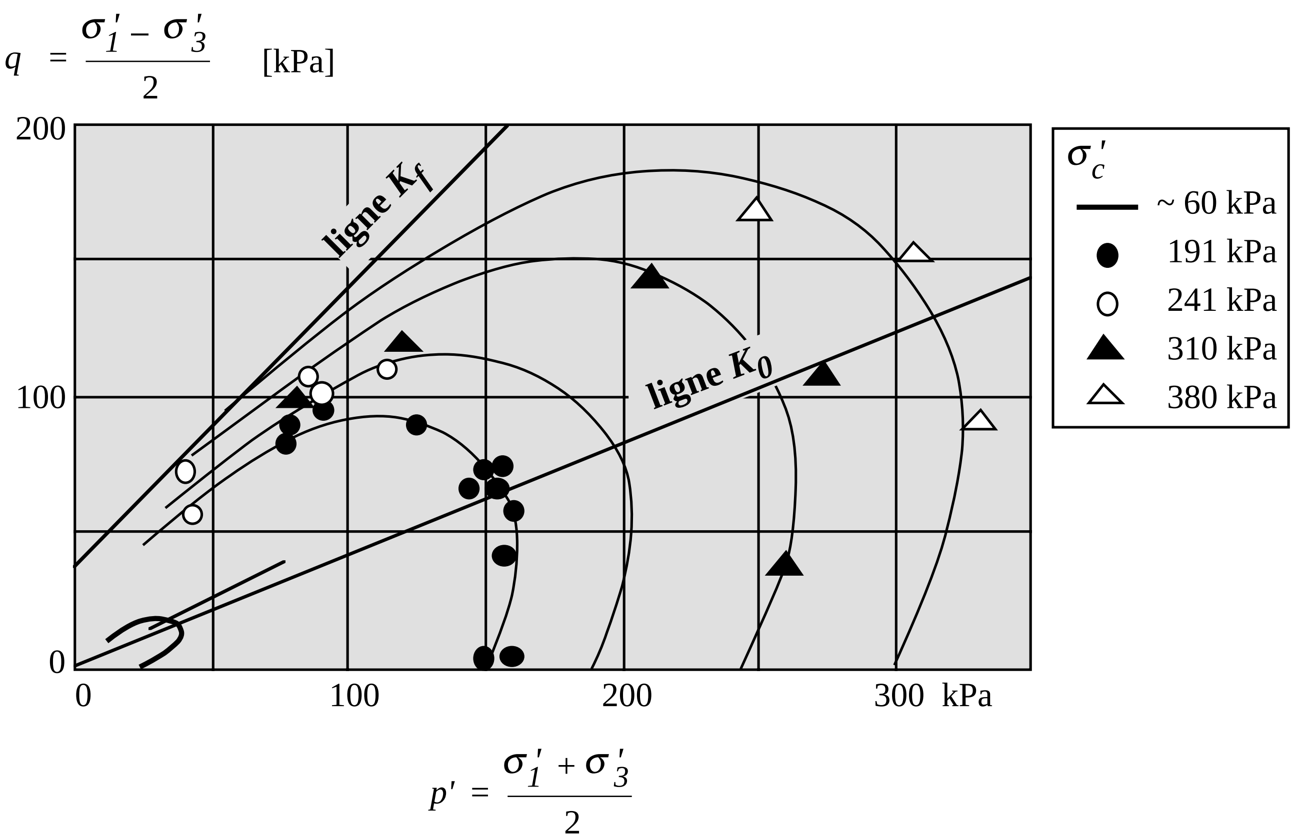
Document 21d: La surcharge peut disparaître (fonte du glacier würmien par exemple) et, en même temps, la nappe phréatique s'abaisser un peu. Si la loi constitutive admise est élasto-plastique, la décharge se fait alors dans le domaine élastique sans modifier une surface de plastification préexistante et sans en créer une nouvelle (chemin C-E sur le document). Le point E n'est pas confondu avec le point B car il y a eu abaissement de la nappe phréatique en plus du retrait glaciaire. Après la décharge, le sol est *surconsolidé*.

Document 21e: Un pieu, foré dans le sol pour supporter un ouvrage, va provoquer un cisaillement qui peut aboutir à l'état limite F, état qui ne peut être dépassé (chemin E-F sur le document).

Document 21f: Le sol étant surconsolidé, la déformation plastique associée au cisaillement va détruire les liaisons diagénétiques et il y aura ce que les anglo-saxons appellent "strain softening" terme que des francophones ont, malheureusement, traduit par adoucissement (pourquoi pas *décrouissage*!). Le diagramme σ - ε F-G, qui complète ce dernier document, montre la résistance de pic correspondant au point F et la résistance résiduelle correspondant au point G qui est atteinte après une déformation plastique importante.

Résultats d'essais triaxiaux

La forme de la trace des surfaces de plastification des documents No 18a et 21a à 21f n'est pas une schématisation théorique car, comme le montre ce document, des essais triaxiaux en laboratoire avec divers chemins de contraintes ont démontré un comportement identique pour les sols fins.



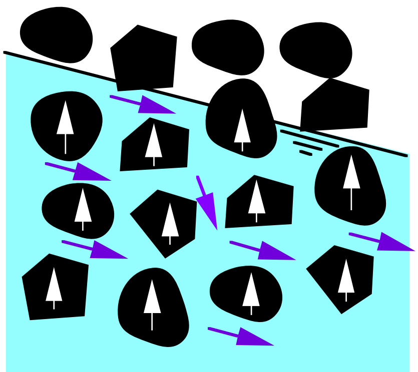
D'après Tavenas et Leroueil et Graham.

F. Tavenas, S. Leroueil, Effects of stresses and time on yielding of clays, Proc. 9th Int. Conf. on Soil Mech. and. Found. Eng., Tokyo, 1977.

J. Graham, J. Crook, A. Bell, Time effects on the stress-strain behaviour of natural soft clay, Geotechnique 33, 1983.

Nous avons maintenant tout l'arsenal de mécanique du continu pour tenter de modéliser un sol. Il nous manque cependant quelque chose. Comment l'eau interstitielle intervient dans tout cela?

Rappel : interaction solide - liquide



Rappel des principales équations de l'hydraulique utilisées en mécanique des sols :

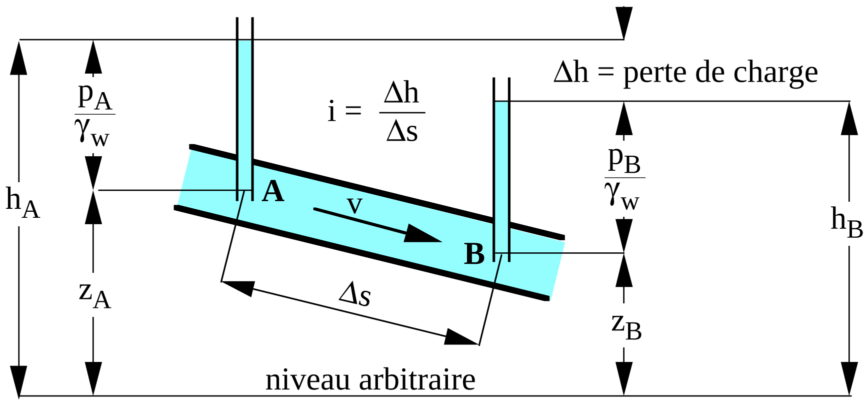
Archimède : Poussée verticale = Volume immergé $\cdot \gamma_w$

Continuité : Masse eau entrante = masse eau sortante

Bernoulli :
(bilan énergétique)

$$h = \frac{p}{\gamma_w} + z + \cancel{\frac{v^2}{2g}} = \text{constante}$$

négligé en mécanique des sols



Darcy : $v = k \cdot i$
(Cours écoulements souterrains)

k = perméabilité ou conductivité hydraulique $[m \cdot s^{-1}]$

h = charge hydraulique [m H_2O)
z = niveau vertical [m]
p = pression [kPa = $kN \cdot m^{-2}$]

γ_w = poids volumique de l'eau $[kN \cdot m^{-3}]$
v = vitesse de l'eau $[m \cdot s^{-1}]$
g = accélération de la pesanteur $[m \cdot s^{-2}]$

Equations régissant la circulation de l'eau dans les sols

Sol saturé

Dans un sol saturé, au moyen :

- de l'équation de continuité qui fait le bilan des quantités d'eau entrant et sortant d'un volume de sol,
- et de l'équation de Darcy

on obtient l'*équation générale des écoulements souterrains* :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{Dx}\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_{Dy}\frac{\partial h}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_{Dz}\frac{\partial h}{\partial z}\right) = \frac{\partial \theta}{\partial t} \tag{1}$$

$$h = z + \frac{u}{\gamma_w} \tag{2}$$

avec :
- h = charge ou potentiel hydraulique [m d'eau]
- z = élévation [m]
- u = pression interstitielle [kPa = $kN \cdot m^{-2}$]]
- γ_w = poids volumique de l'eau [$kN \cdot m^{-3}$]
- θ = teneur en eau volumique [-]
- k_{Di} = conductivité hydraulique dans la direction i (x,y,z) = coeff. de perméabilité

Si le sol est isotrope sur le plan des conductivités hydrauliques, l'équation (1) peur s'écrire :

$$\nabla h = \frac{1}{k_D}\frac{\partial \theta}{\partial t} \tag{3}$$

avec : ∇ = laplacien = $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 h}{\partial z^2}$

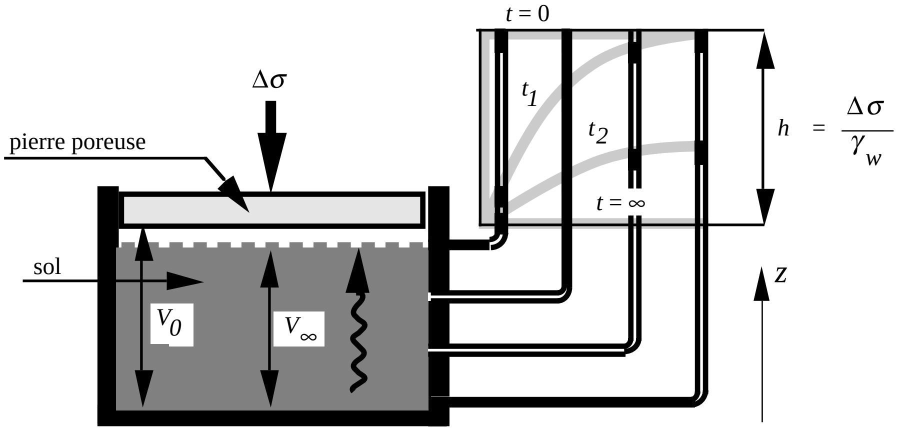
C'est une équation de Laplace et l'écoulement qu'elle détermine est un *écoulement à potentiel de vitesse*.

Le terme $\partial\theta/\partial t$ exprime la possibilité, pour un sol, de rendre ou d'absorber une certaine quantité d'eau.
En *régime permanent*, ou d'équilibre, ce volume spécifique ne varie pas en fonction du temps et le second membre de l'équation (1) ou (3) est nul.

En *régime transitoire* θ peut varier en fonction du temps, ceci pour différentes raisons. La plus intéressante pour le géotechnicien est celle où le sol est soumis à un déviateur de contraintes. Dans l'exemple uniaxial de la figure du haut du document No 24b, la surcharge $\Delta\sigma$ sur la pierre poreuse surmontant l'échantillon de sol va mettre en pression l'eau interstitielle et, au temps 0, toute cette surcharge sera reprise par la pression de l'eau : courbe t=0 à droite de la figure.
Puis, du fait de cette pression, l'eau s'écoulera de l'échantillon vers la pierre poreuse où la pression est nulle et, dans le sol de l'échantillon, les grains supporteront, de plus en plus, la surcharge $\Delta\sigma$. On représente cette répartition de la contrainte entre le squelette solide et l'eau interstitielle par la relation fondamentale bien connue : $\sigma = \sigma' + u$

avec :
- σ = contrainte totale (eau + solide)
- σ' = contrainte effective (solide)
- u = pression interstitielle (eau)

Suite sur document No 24b



$$\Delta n = \Delta\theta = \frac{V_0 - V_\infty}{V_0} \qquad (V_a = 0)$$

Consolidation d'un sol par tenseur de contrainte uniaxial.

L'écoulement vers la pierre poreuse est modélisé par l'équation (3). Au temps t_1 et t_2 la répartition de la pression dans l'échantillon est donnée par les courbes correspondantes à droite de la figure ci-dessus. Enfin, après un temps qui dépend de la conductivité hydraulique du sol et dénommé t_∞, la pression est nulle dans tout l'échantillon.
Puisque l'échantillon est saturé, et donc que le volume de l'air est nul, la quantité d'eau expulsée de l'échantillon correspond à la variation de porosité. Par définitions :

$$\Delta\theta = \Delta n = m_v \cdot \Delta\sigma' \tag{5}$$

avec : m_v = *coefficient de compressibilité volumétrique* [kPa^{-1}]

Pendant le drainage vers la pierre poreuse on peut alors écrire:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = m_v \frac{\partial(\Delta\sigma')}{\partial t} = m_v \frac{\partial(\Delta\sigma - u)}{\partial t} \qquad m_v = \frac{1}{E_{œd}} \tag{6}$$

et, puisque $\Delta\sigma$ est constant et que z peut être négligé :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial\theta}{\partial t} = m_v \frac{\partial u}{\partial t} = m_v \gamma_w \frac{\partial h}{\partial t} \tag{7}$$

Le signe – tombe car lorsque z augmente, h diminue (voir figure ci-dessus).
L'équation (1) peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{Dx}\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_{Dy}\frac{\partial h}{\partial \mathrm{y}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_{Dz}\frac{\partial h}{\partial \mathrm{z}}\right) = m_v \gamma_w \frac{\partial h}{\partial t} \tag{8}$$

et la (3) :

$$\nabla h = \frac{1}{k_D} m_v \gamma_w \frac{\partial h}{\partial t} \tag{9}$$

L'inverse du multiplicateur de $\partial h/\partial t$ est le *coefficient de consolidation* c_v [m^2 ·s^{-1}] :

$$c_v = \frac{k_D}{m_v \gamma_w} \tag{10}$$

Suite sur document No 24c

et l'équation (9) peut prendre enfin la forme très simple suivante:

$$\nabla h = \frac{1}{c_v} \frac{\partial h}{\partial t} \qquad (11)$$

L'équation (11) est à l'*équation de la consolidation*. Pour la résoudre dans le cas unidimensionnel de la figure, Terzaghi a utilisé un développement en série.

Une dernière forme intéressante de l'équation (3) est celle des *hydrogéologues* :

$$\nabla h = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} \qquad (13)$$

avec : S = coefficient d'emmagasinement [-]
= $m_v \cdot \gamma_w \cdot z$
T = transmissivité = $k_D \cdot z$ [$m^2 \cdot s^{-1}$]
z = épaisseur de la couche aquifère [m]

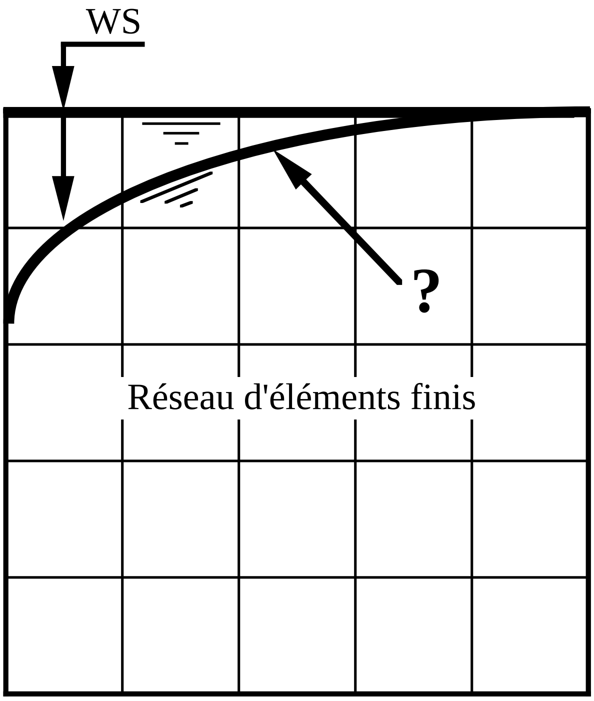
L'équation des écoulements souterrains (3), appliquée aux cas les plus simples comme aux cas les plus complexes à 3 dimensions, est aujourd'hui presque exclusivement résolue par la *méthode des éléments finis*.
En présence d'une *nappe libre*, la solution de l'équation des écoulements souterrains par la méthode des éléments finis présente une difficulté qui n'a pu être résolue avec satisfaction que ces dernières années. La surface constituée par la nappe libre est en effet une limite d'intégration de l'équation (3), donc une limite du réseau d'élément finis; cette limite n'est cependant pas connue a priori et le réseau doit être ajusté petit à petit, chacune des itérations consistant en la résolution d'un nouveau système d'équations avec des conditions aux limites modifiées. Les techniques numériques utilisées pour ces modifications progressives du réseau sont coûteuses en temps d'ordinateur et conduisent souvent à des résultats peu précis.
Il existe heureusement une méthode qui ne demande aucune modification de la discrétisation initiale en éléments finis. Elle consiste à définir le zone au-dessus de la nappe libre comme un milieu non saturé et de lui donner soit une conductivité hydraulique très faible mais constante, soit une conductivité fonction de la succion capillaire. L'équation (3) devient alors non linéaire et requiert des techniques particulières pour sa solution, techniques aujourd'hui bien maîtrisées.

Sol non saturé

Dans un sol non saturé, on utilise la même équation que pour les sols saturés, à condition cependant qu'il y ait continuité de la phase liquide et que la phase gazeuse ne soit pas trop importante; ces conditions correspondent, très approximativement, à un degré de saturation supérieur à 0,5. L'équation (3) devient non linéaire par le fait que la conductivité hydraulique k_D est, dans les sols non saturés, fonction de la succion capillaire donc de la charge hydraulique $h = u/\gamma_w + z$. Avec un programme de calcul sur ordinateur basé sur la méthode des éléments finis, la relation k_D = f(succion) est, en général, introduite point par point.
Que signifie physiquement cette équation appliquée à un milieu poreux non saturé? Si l'on diminue la teneur en eau en une région de ce milieu poreux non saturé, la succion capillaire va augmenter. Un *puits* est ainsi créé et l'eau du milieu poreux va s'écouler vers ce puits jusqu'à ce qu'un nouvel équilibre s'établisse. Si la succion diminue, la conductivité hydraulique k_D va aussi diminuer et ralentir l'écoulement vers le puits.
Si l'on augmente la teneur en eau dans cette même région, on crée alors une *source* et l'écoulement se fera radialement de cette source vers les autres régions du milieu poreux non saturé.

Pour plus de détails sur la modélisation des écoulements souterrains: voir module C1-6 donné par P. Perrochet.

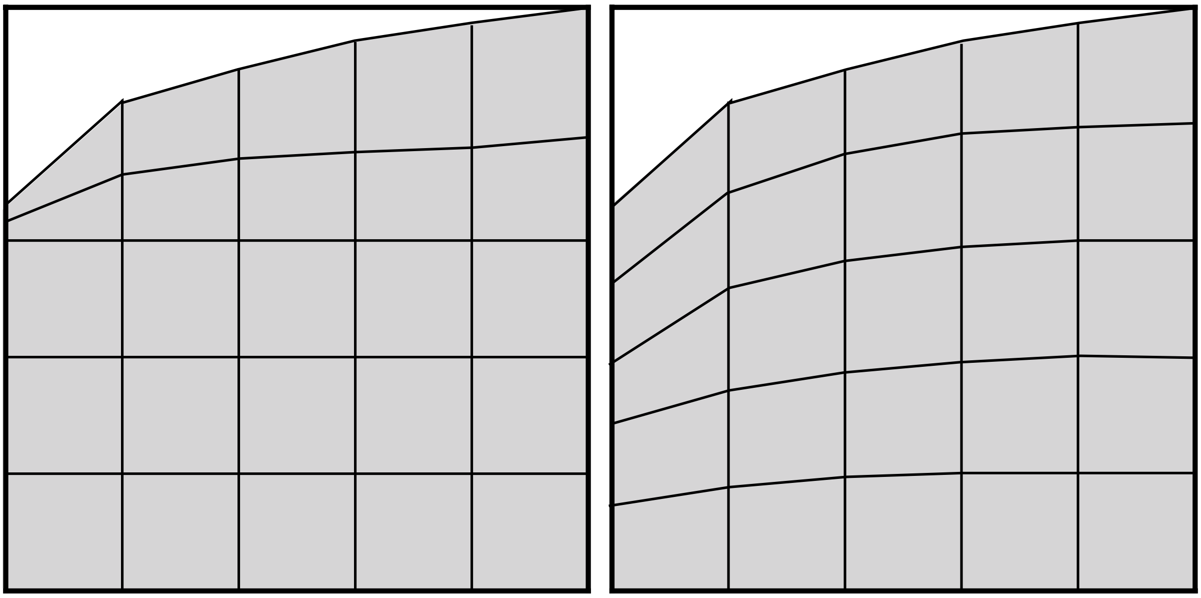
Problème de la nappe phréatique avec les éléments finis
Méthode classique (obsolète!)



$$\nabla h = \frac{1}{k_D} m_v \gamma_v \frac{\partial h}{\partial t}$$

Problème:
Si k_D = constante, la nappe phréatique est une limite d'intégration, donc du réseau d'éléments finis !

Solution classique (obsolète!) : modification pas à pas du réseau d'éléments finis

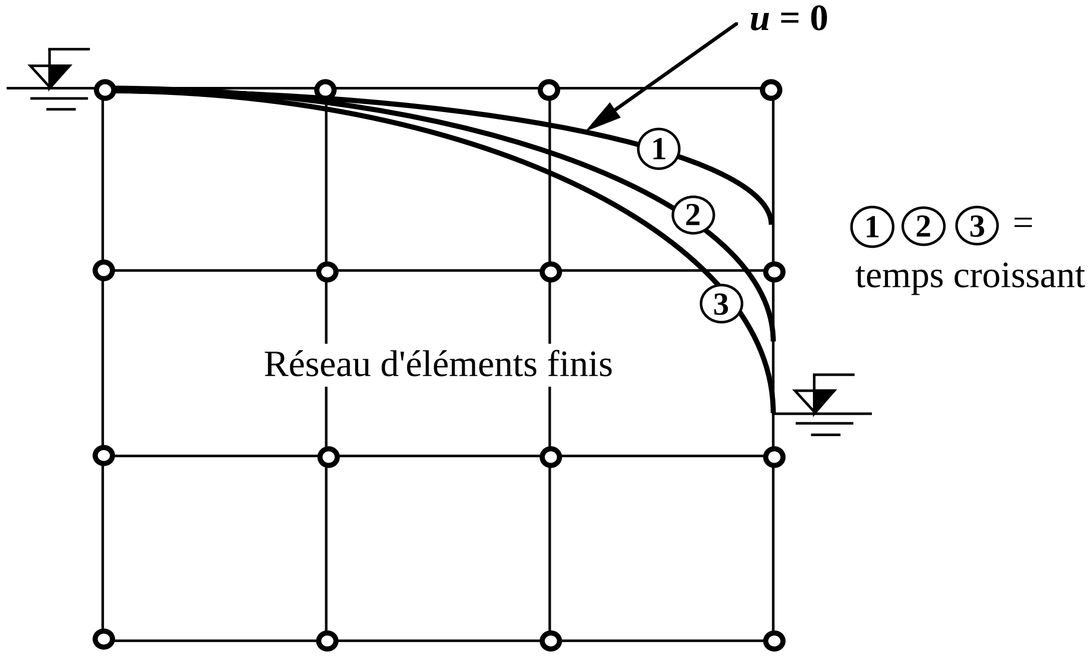


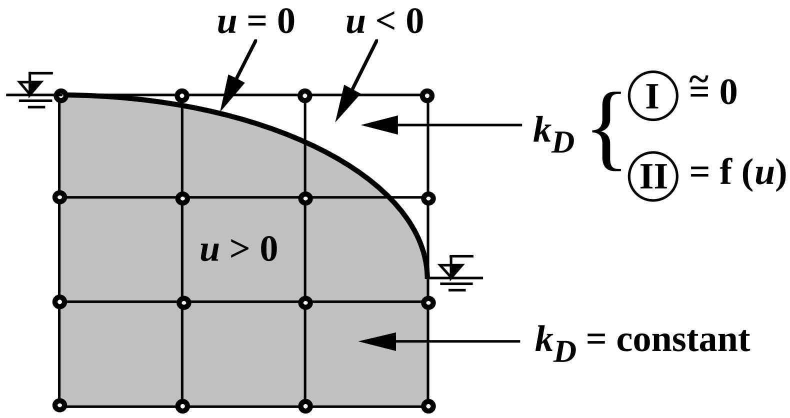
mauvais

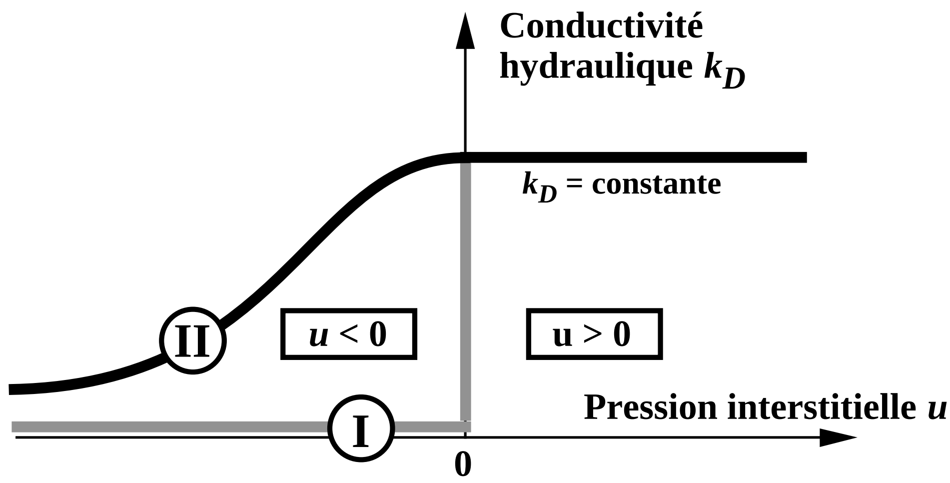
meilleur mais loin d'être parfait
et en 3D . . . .

Variation nappe phréatique par relation non linéaire $k_D = f(u)$

u = pression interstitielle







Trois équations fondamentales relativement à l'eau intertitielle

$$\sigma' = \sigma - u(t)$$

avec : σ' = contrainte effective, soit la contrainte transmise par les contacts mécaniques entre les particules de la phase solide.
σ = contrainte totale, soit la contrainte transmise par la phase liquide et la phase solide.
$u(t)$ = pression de l'eau interstitielle fonction du temps; u peut être positive ou négative (succion capillaire).

σ, σ', et u sont des tenseurs souvent réduits à des scalaires.

Sous forme tensorielle :

$$\sigma_{ij}' = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot u(t)$$

avec δ_{ij} = delta de Kronecker = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$u(t) = u_S + \Delta u(t)$$

avec : u_S = pression interstitielle correspondant à un régime permanent d'écoulement souterrain ou à une nappe immobile (pression statique).
Δu = excès transitoire de pression intertitielle provoqué par une modification du tenseur des contraintes

Interaction entre phase solide et phase liquide :

$$\Delta u = \mathrm{f}(\Delta e) = \mathrm{f}(\Delta\sigma) = \text{ par exemple } B\left(\Delta\sigma_3 + A\left(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3\right)\right) \text{ (Skempton)}$$

avec : Δu = pression interstitielle en excès
e = indice de vide
$\Delta\sigma_1$ = variation de la contrainte σ_1
$\Delta\sigma_3$ = variation de la contrainte σ_3
B = coefficient B de Skempton fonction du degré de saturation du sol: pour un sol saturé, $B = 1$
A = coefficient A de Skempton fonction de la consistance, de la sensibilité (la sensibilité est le rapport entre la résistance d'un sol non remanié et celle d'un sol remanié) et du degré de surconsolidation du sol; par exemple : A = 0,75 à 1,5 pour une argile très sensible et A = -0,5 à 0 pour une argile fortement surconsolidée.

Equations régissant la dilatation et la diffusion thermique

Sur le plan thermique un corps est caractérisé par sa *dilatation*, sa *conductivité*, sa *capacité thermique* ou *chaleur spécifique* et par sa *chaleur latente* lors d'un changement de phase, à savoir le passage d'un état solide, liquide ou gazeux à un autre parmi ces trois.

Dilatation thermique

Les déformations résultant du phénomène de la dilatation thermique sont donnés par les équations:

$$\varepsilon_i = \alpha \cdot \Delta T \quad (1) \qquad \varepsilon_v = 3\alpha \cdot \Delta T \quad (2)$$

avec :

ε_i	= déformation dans la direction i	[-]
ε_v	= déformation volumétrique	[-]
α	= coefficient de dilatation thermique	[K^{-1}]
ΔT	= variation de température	[K]

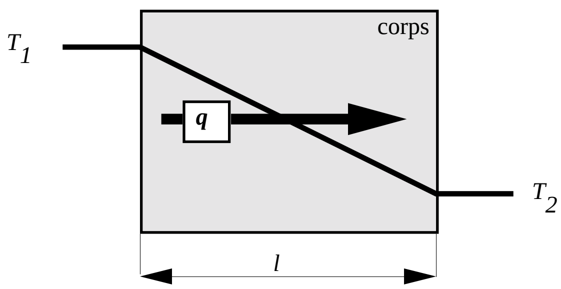
Conductivité thermique

La *conductibilité thermique* k est la vitesse d'écoulement de la chaleur, au travers d'un corps, sous un gradient thermique égal à l'unité; elle est tirée directement de l'équation de Fourier :

$$k = \frac{q}{\overrightarrow{\mathrm{grad}\, T}} \qquad [W.m^{-1}.K^{-1}] \qquad (3)$$

avec :

q	= flux de chaleur	[$W \cdot m^{-2}$]
T	= température	[K ou ° C]
$\overrightarrow{\mathrm{grad}\, T}$	= $\Delta T / l = (T_1 - T_2) / l$	[$K \cdot m^{-1}$]



Définition de la conductivité thermique.

Les écoulement thermiques sont modélisés par le même type d'équation que les écoulements hydrauliques; k est donc analogue à la perméabilité ou conductivité hydraulique k_D.
Le sol étant composé de particules solides, d'eau et souvent d'air, sa conductivité thermique est déterminée par celles des particules solides et de l'eau; comme celle de l'air est faible relativement à celle des particules solides et que l'air se trouve en général en très faible quantité dans les sols, elle est le plus souvent négligée.
La tableau en haut du document No 28b donne quelques valeurs de la conductivité thermique pour différents solides et liquides. Elle donne aussi les valeurs de la capacité thermique massique et volumique, dont nous parlerons plus loin, et du coefficient de dilation thermique linéaire.

Suite sur document No 28b

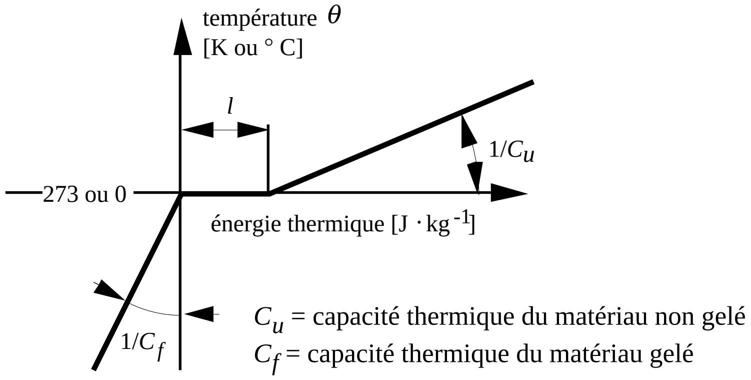
On remarque dans ce tableau que, parmi les minéraux constituant un sol, le quartz a une conductivité thermique plus forte que les autres; avec la teneur en eau, la teneur en quartz détermine ainsi fortement la conductivité thermique d'un sol. En outre, on remarquera la très grande variabilité des conductivités et capacités thermiques des sols et roches qui s'explique fort bien de par leur hétérogénéité.

Corps	***k*** $[W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}]$	***c*** $[kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}]$	***C*** $[kJ \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}]$	α $[10^{-6} \cdot K^{-1}]$
Minéraux :				
Quartz	4,8 - 7,7	env. 0.75	env. 2000	11
Plagioclase (Feldspath)	1,9			4.3
Orthose (Feldspath)				5
Biotite (mica noire)	2,0			7
Muscovite (mica blanc)	2,3			7
Roches :				
Granite	2,9 - 4,1	env. 0.80	env. 2100	7-10
Gneiss	2,7 - 4,6	env. 0.85	env. 2200	env. 10
Quartzite	5,4 - 8,1	env. 0.85	env. 2100	11
Dolomie	3,4 - 4,0	env. 0.75	env. 2000	
Calcaire	1,5 - 3,3	0.85 - 2.20	2000-5200	6-9
Grès	2,3 - 6,5	0.90 - 2.00	2200-5000	env. 10
Schiste	1,5 - 3,5	1.00 - 2.20	2100-4600	
Sols :				
(non gelés, saturés)				
Argile CH	0,9 - 1,8	1.4 - 2.1	2600-3400	
Limon argileux CL	1,2 - 1,8	1.2 - 1.6	2600-3000	
Limon ML	1,2 - 2,4	1.2 - 1.8	2500-3100	
Gravier sableux (grave)	1,2 - 3,0	1.1 - 1.8	2400-3000	
Tourbe	env. 0,6	env. 3.0	env. 4000	

Conductivités k, capacités thermiques massiques c et volumiques C et coefficients de dilatation thermique linéaire α de quelques minéraux, roches et sols.

Capacité thermique

La ***c****apacité thermique massique c* $[J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}]$ ou *la capacité thermique volumique C* $[J \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}]$ ($C = \rho \cdot c$) est la quantité d'énergie nécessaire à fournir à un corps pour élever 1 kg, respectivement 1 m^3 de ce corps de 1 K; la figure ci-dessous définit graphiquement ces capacités.



Définition des capacités thermiques C_u et C_f et de la chaleur latente l

Suite sur document No 28c

Chaleur latente

La *chaleur latente massique l* [J·kg^{-1}] est l'énergie nécessaire pour passer d'une phase à une autre, par exemple pour faire fondre un kilogramme de glace; elle est définie graphiquement sur la figure du document précédent (28b). *La chaleur latente volumique L* [J·m^{-3}] se rapporte elle à un volume unitaire de matière (L=l·ρ).
On utilise souvent, et notamment dans l'équation de la diffusion thermique, la *diffusivité thermique D* [m^2·s^{-1}] qui est la conductivité thermique divisée par la capacité thermique volumique :
$D = k / C$.

Equation de la diffusion thermique

L'équation de la diffusion thermique est la très classique équation de Fourier qui est, comme l'équation des écoulements souterrains une équation de Laplace :

$$\nabla T = \frac{1}{D}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{4}$$

avec : ∇ = laplacien
T = température [K] ou [° C]
D = diffusivité thermique = k/C [m^2·s^{-1}]
t = temps [s]

En *régime permanent*, le terme de droite de l'équation (4) est nul et elle se réduit à :

$$\nabla T = 0 \tag{5}$$

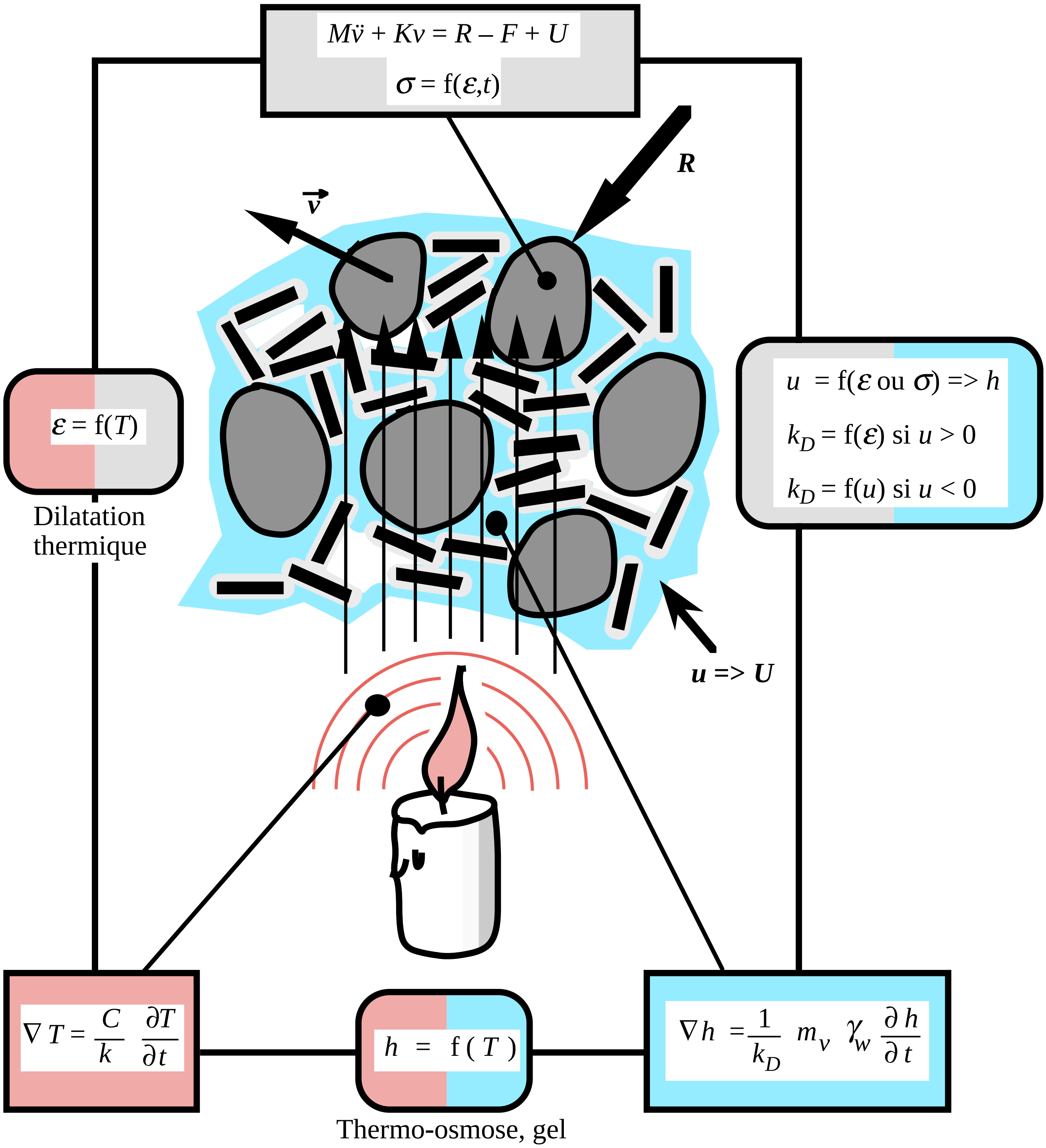
En régime permanent, la répartition des températures ne dépend ainsi que de la topologie du milieu et des conditions aux limites.
Le tableau ci-dessous compare les termes de l'équation de la diffusion thermique avec ceux des écoulements souterrains.

Diffusion thermique	**Ecoulement souterrain**
T = température	h = charge hydraulique
D = diffusivité thermique	$m_v \cdot \gamma_w / k_D = c_v$
C = capacité thermique volumique	$m_v \cdot \gamma_w$
k = conductivité thermique	k_D = conductivité hydraulique

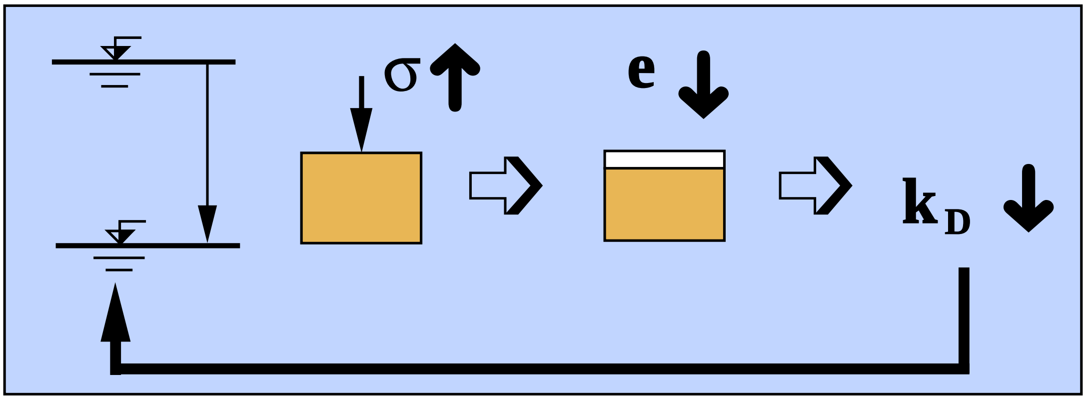
Comparaison des termes de l'équation de la diffusion thermique avec ceux de l'équation des écoulements souterrains.

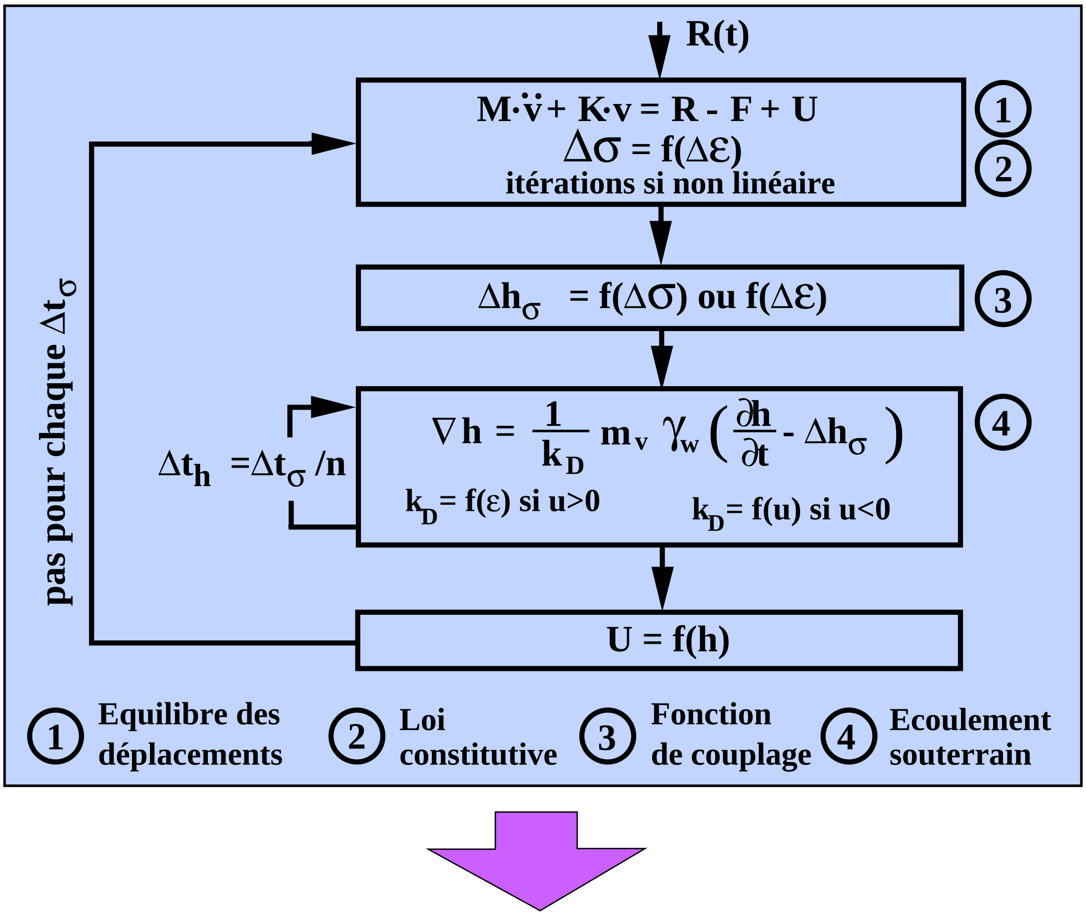
Comme k_D peut être fonction de la succion capillaire, donc de la charge hydraulique, la diffusion thermique D peut être elle fonction de la température, l'équation (4) devenant alors non linéaire.
Le sols contenant de l'eau et cette eau pouvant se transformer en glace, il peut donc y avoir un changement de phase donc consommation ou restitution de chaleur latente L Les modèles numériques résolvant l'équation (4) doivent donc pouvoir tenir compte de changements de phase.

Les couplages



Exemple d'un couplage solide - eau





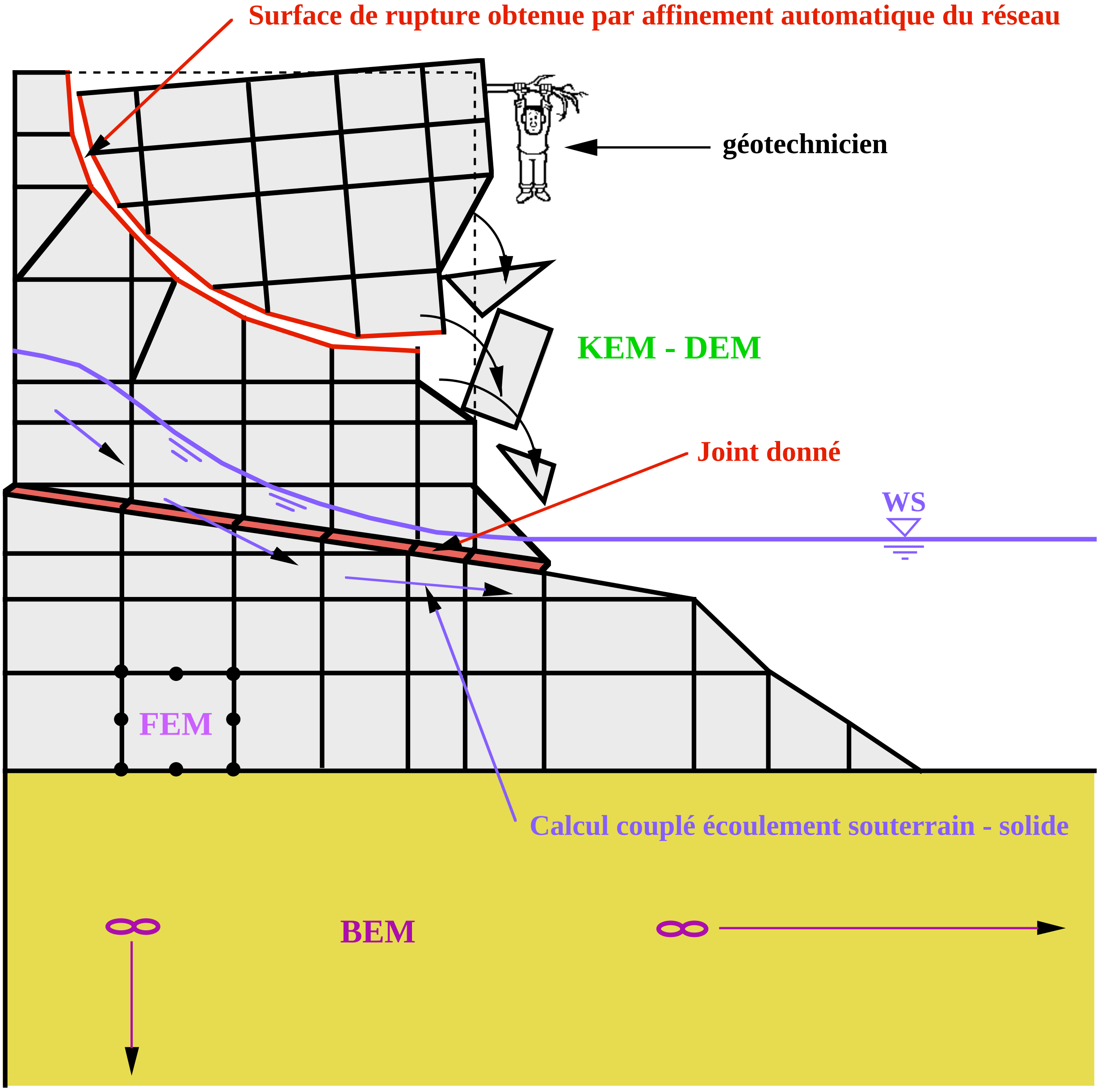
σ, ε, u
en chaque point et à tout moment

Le rêve de tout géotechnicien

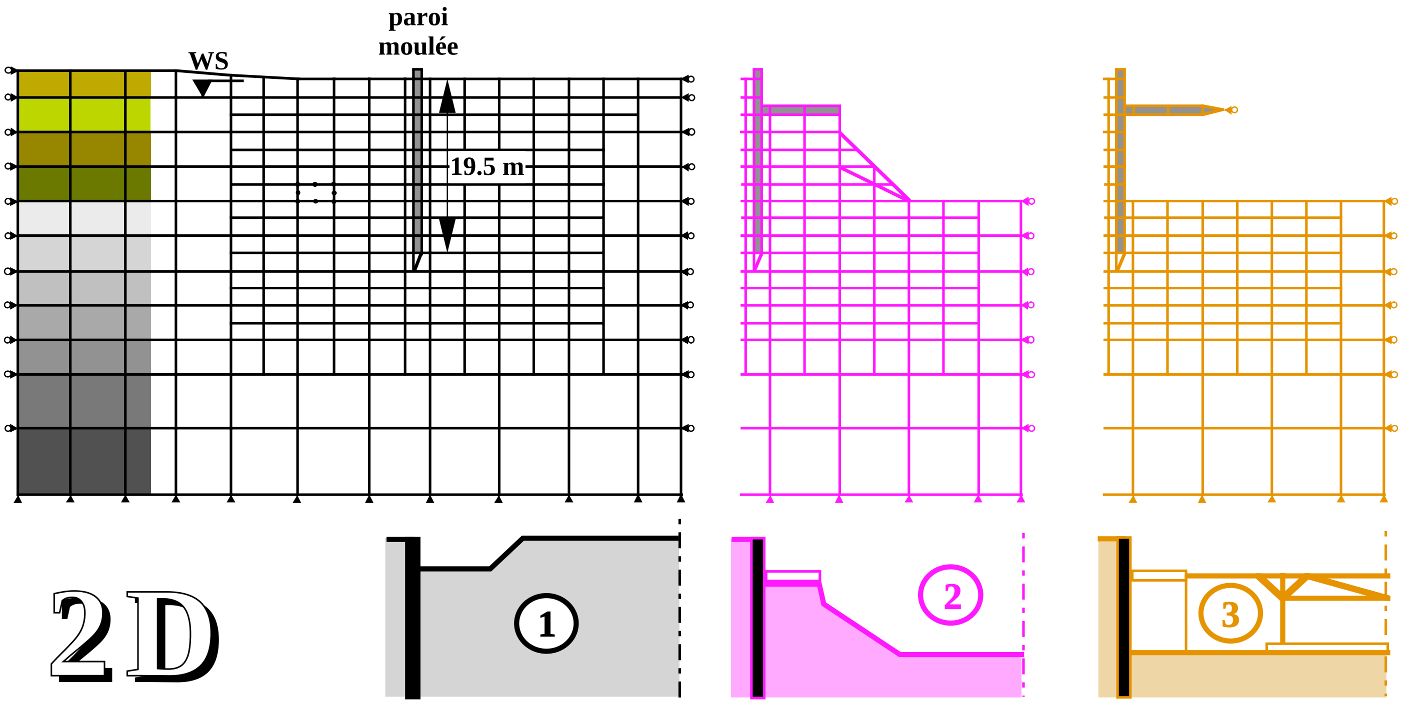
Possibilités actuelles (1996) de la modélisation numérique en contraintes - déformations - 1

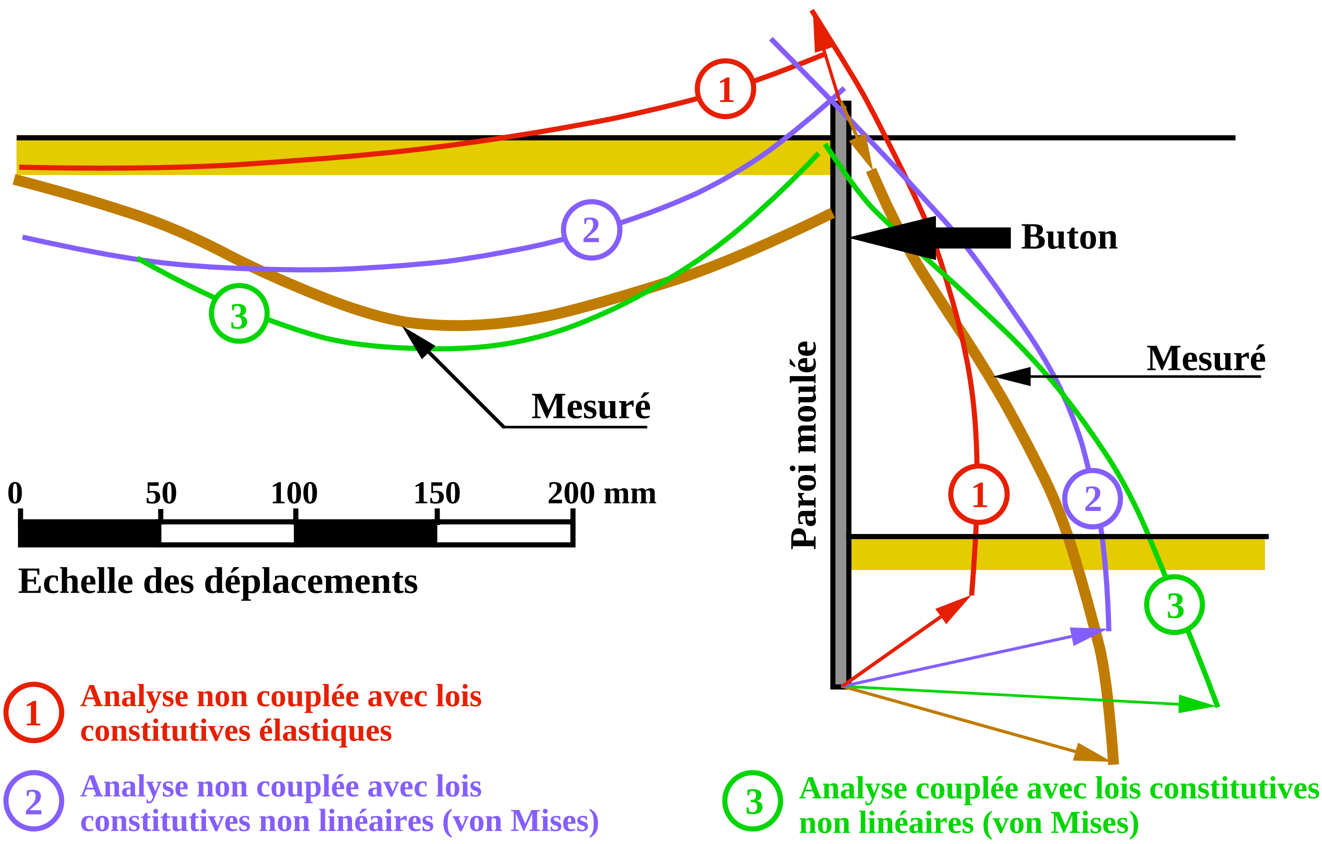
Une puissante méthode à disposition : la méthode des éléments finis et ses dérivées .

On peut presque tout faire avec !

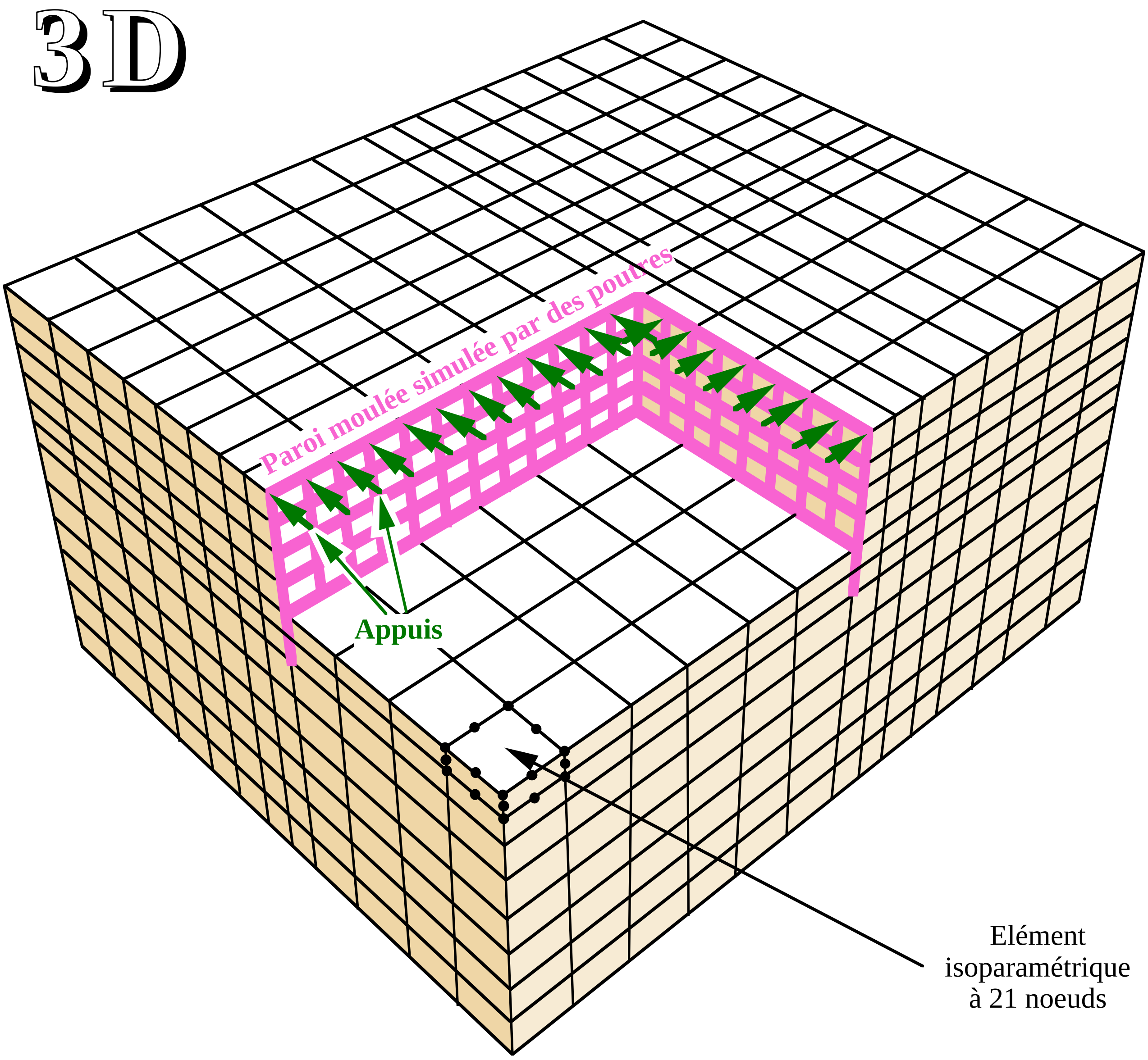


Possibilités actuelles (1996) de la modélisation numérique en contraintes - déformations - 2





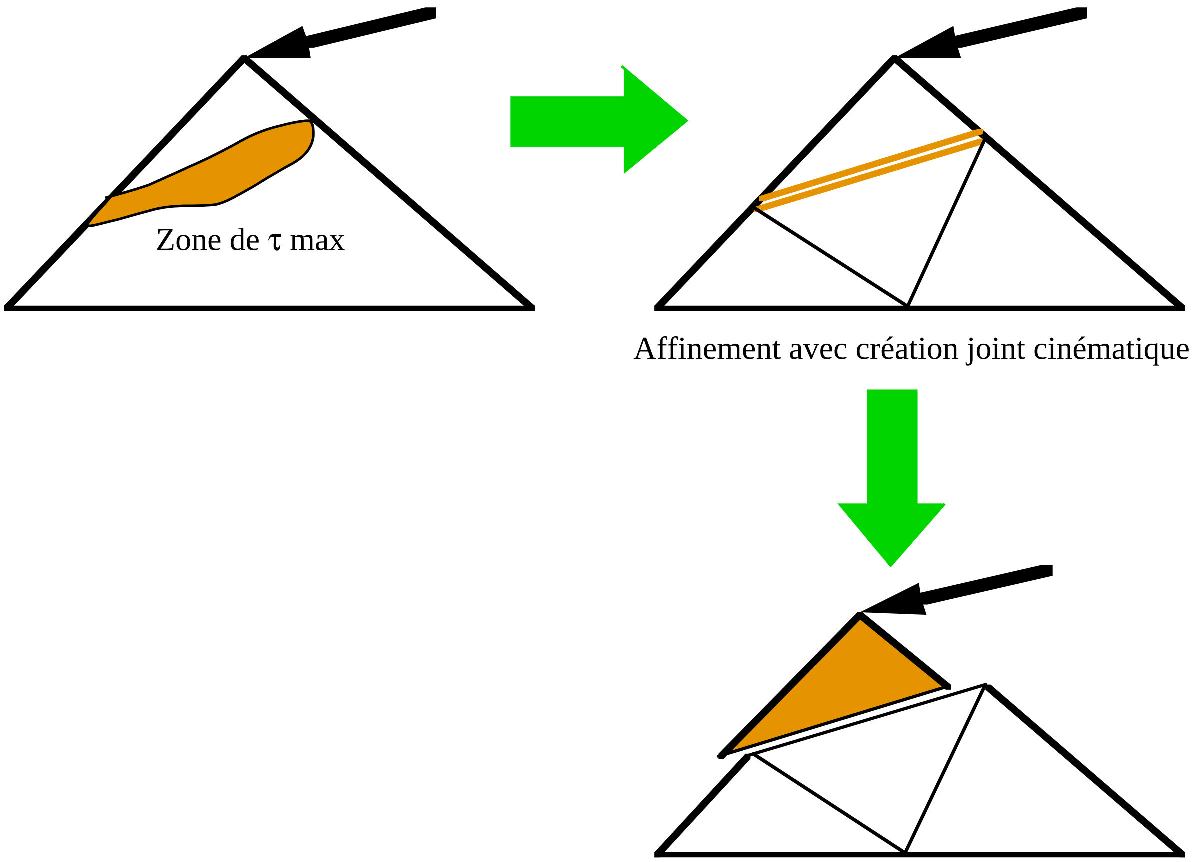
Possibilités actuelles (1996) de la modélisation numérique en contraintes - déformations - 3

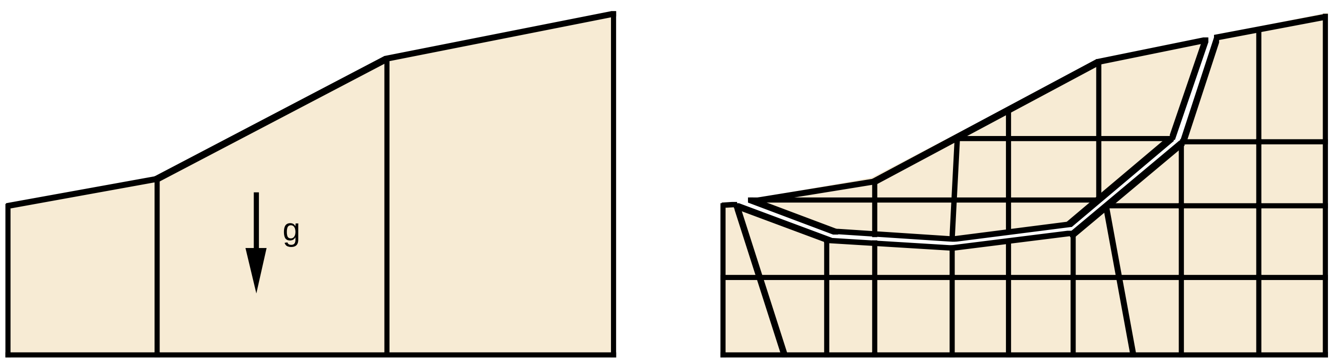


2016 éléments parallélépipédiques à 21 noeuds (avec zone d'excavation)
155 poutres à 3 noeuds
11'765 noeuds
30'209 degrés de liberté

Possibilités actuelles (1996) de la modélisation numérique en contraintes - déformations - 4

Affinement avec création de joints cinématiques





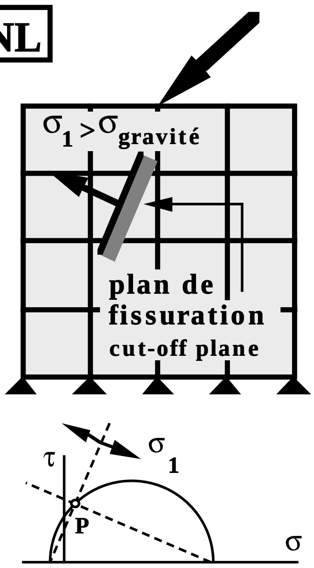
Etat initial **Après quelques pas d'affinement**

Possibilités actuelles (1996) de la modélisation numérique en contraintes - déformations - 5

Joints non cinématiques

Joints implicites si traction

NL

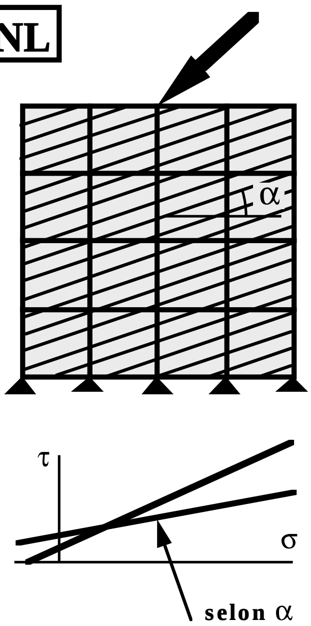


Diverses stratégies :

a) rigidité normale au plan de fissuration réduite à zéro
b) rigidité normale au plan de fissuration multipliée par facteur de réduction
c) rigidité au cisaillement réduite à zéro
d) rigidité au cisaillement multipliée par facteur de réduction
e) combinaison a), b), c), d)

Joints implicites avec loi constitutive orientée

NL

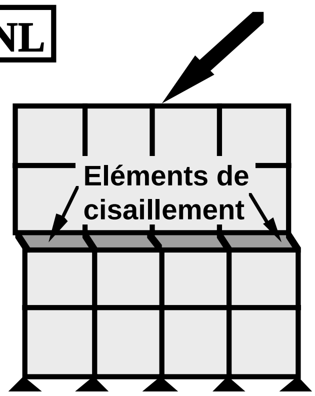


f) a), b), c), d), e) avec en plus annulation des contraintes normales et de cisaillement sur le plan de fissuration (τ pour les pas ultérieurs)

- ■ fissure associée à chaque point de Gauss
- ■ fissure conservée pour pas ultérieurs, pas de nouvelle fissure si ce n'est à 90°.

Joints à géométrie donnée

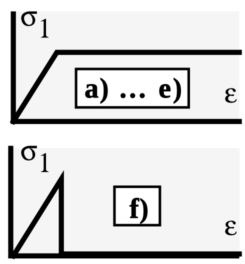
NL



Eléments de cisaillement :

- élastique orthotrope
- élastique anisotrope ❤❤
- élasto-plastique ❤❤
- etc

Déplacements limités

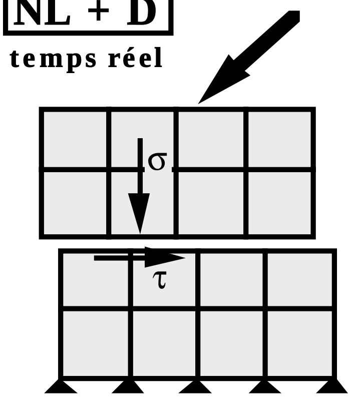


Joints cinématiques

KEM: Kinematic Element Method
DEM: Discret Element Method

NL + D

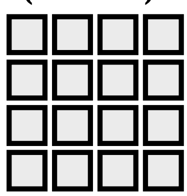
temps réel



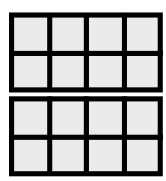
$\tau = c + \sigma \, tg\, \Phi$

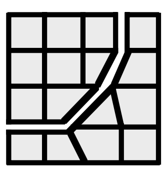
Déplacements illimités

Joints partout (Cundall)



Joint(s) à endroit(s) donné(s)



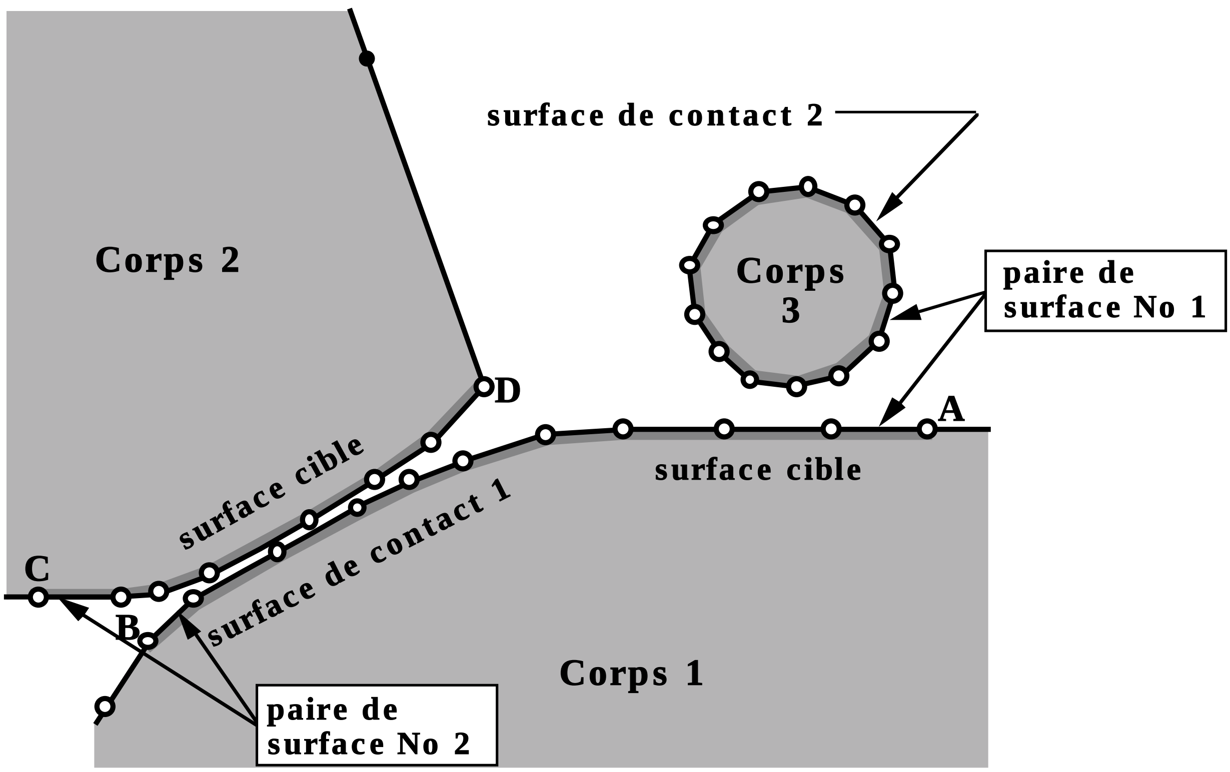


Joint (plan rupture) créé par loi constitutive

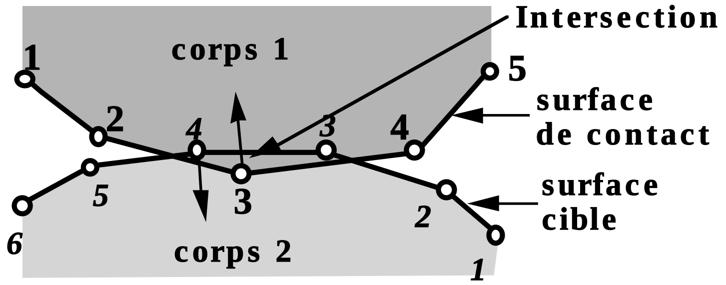
NL = analyse non linéaire **D** = analyse dynamique (temps réel)

Possibilités actuelles (1996) de la modélisation numérique en contraintes - déformations - 6

Surface de contact dans un programme type ADINA



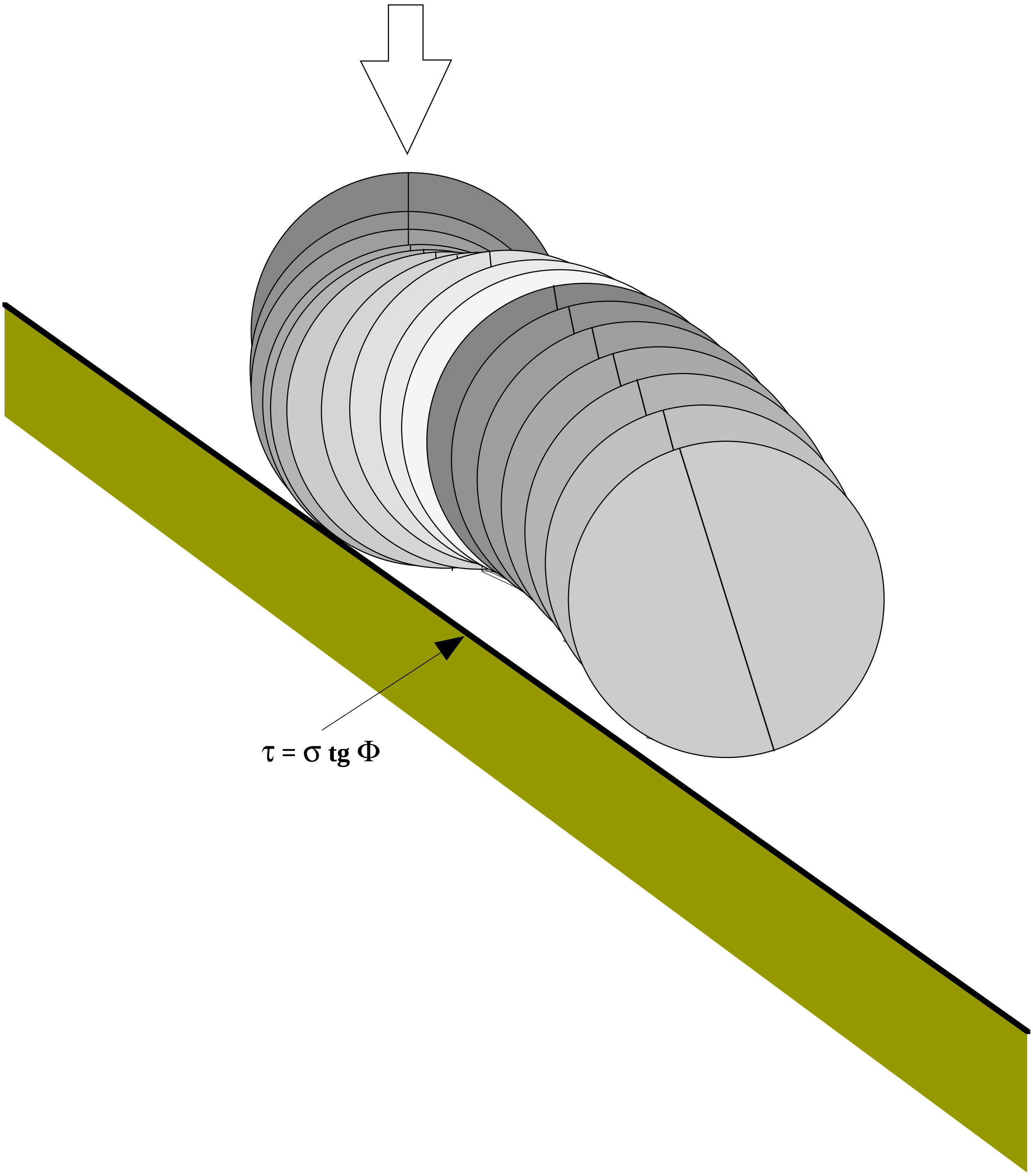
Surface de contact et surface cible orientée par numérotation des points des surfaces :



En suivant la numérotation le corps doit se trouver à gauche

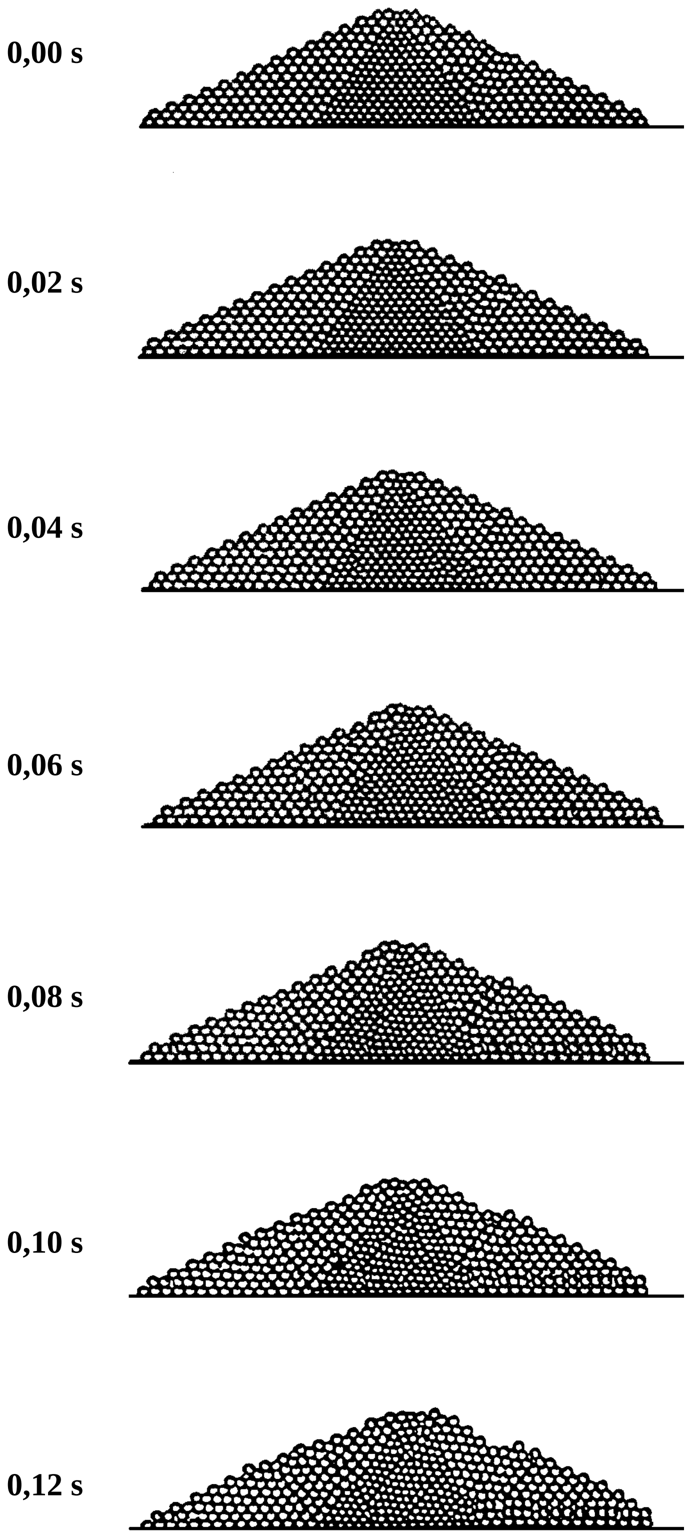
Possibilités actuelles (1996) de la modélisation numérique en contraintes - déformations - 7

ADINA84 : Chute d'une bille élastique sur un plan incliné infiniment rigide



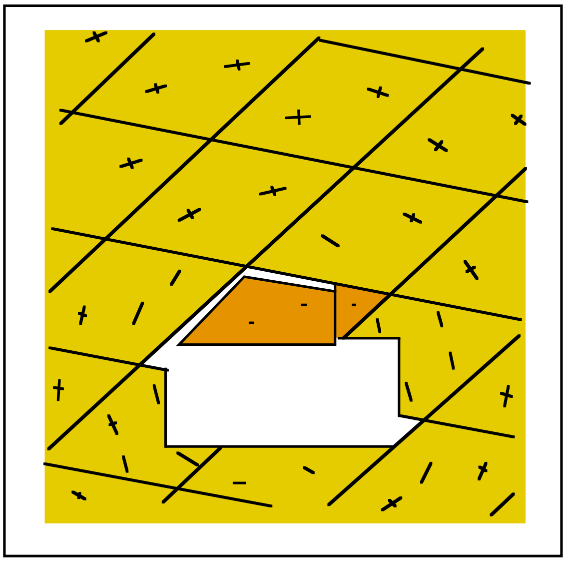
Possibilités actuelles (1996) de la modélisation numérique en contraintes - déformations - 8

Méthode des éléments discrets (KEM, DEM)
Digue pendant séisme

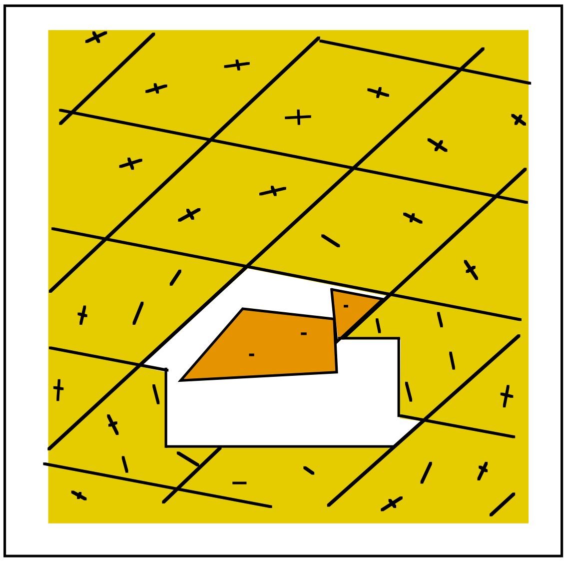


Possibilités actuelles (1996) de la modélisation numérique en contraintes - déformations - 9

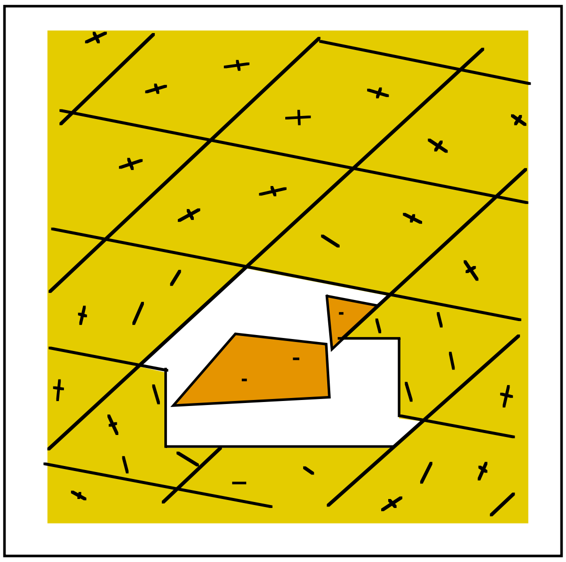
Méthode des éléments discrets (KEM, DEM)
Ecroulement cavité souterraine



t = 0,26 sec.



t = 0,51 sec.

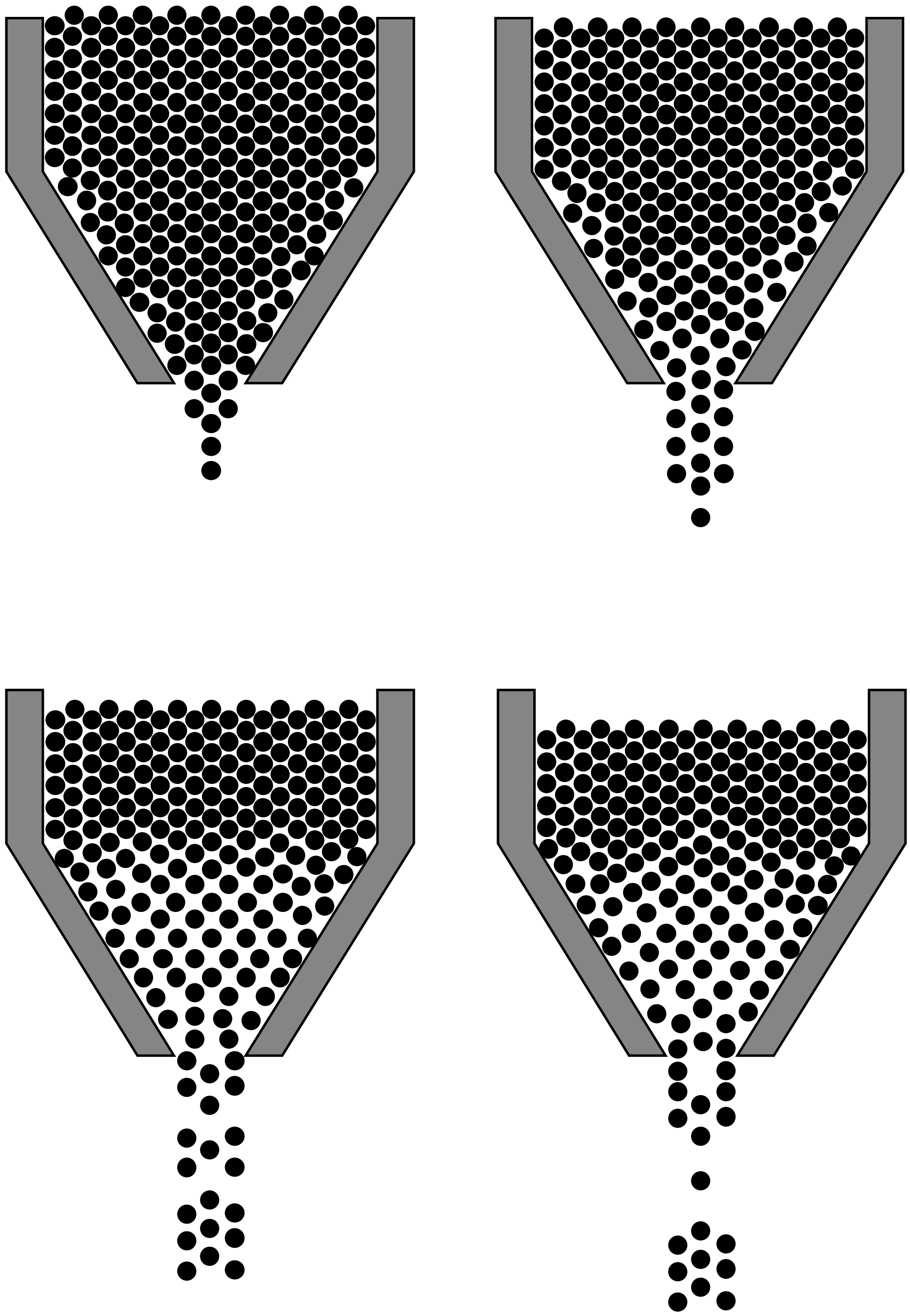


t = 0,75 sec.

Programme UDEC (Universal Distinct Element Method) de P. A. Cundall

Possibilités actuelles (1996) de la modélisation numérique en contraintes - déformations - 10

Méthode des éléments discrets (KEM, DEM)
Vidange silo



Possibilités actuelles (1996) de la modélisation numérique en contraintes - déformations - 11

- **Méthode des éléments finis avec lois constitutives non linéaires pour équilibre des déplacements (contraintes et déformations)**
- **Méthode des éléments finis pour écoulements souterrains avec perméabilité non linéaire pour, en particulier, nappe libre**
- **Couplage des ces deux groupes d'équations => σ, ε et u connus en tout point et à tout moment**
- **Méthode des éléments discrets**
- **Affinement avec création de surfaces cinématiques**
- **etc.**

Permettent :

- **une optimalisation poussée des projets de fondations, d'ouvrages souterrains et d'ouvrages en terre et ainsi un coût d'exécution le plus bas possible,**
- **des études paramétriques très faciles, études très importantes en mécanique des sols et des roches du fait de la grande variabilité des paramètres,**
- **l'établissement de plans de sécurité précis et fiables,**
- **l'utilisation sans réserve de la méthode des observations qui permet de prendre certains risques lors du projet, risques souvent intéressants pour le coût de l'ouvrage,**
- **etc., etc.**