

Electrodynamique classique

Notes de cours du Professeur Rattazzi

Basées sur les notes de cours
du Professeur Shaposhnikov (2008)

Version du 26 juillet 2015

Notes rédigées par Florent Baume

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Faculté des Sciences de Base, Section de Physique
Institut de Théorie des Phénomènes Physiques
Laboratoire de Physique Théorique des Particules

Table des matières

Table des matières	i
1 Introduction	1
1.1 But du cours	1
1.2 Notions de bases et lois de l'électrodynamique	1
1.2.1 Equations de Maxwell	2
1.3 Rappels mathématiques	3
1.3.1 Analyse vectorielle	3
1.3.2 Transformée de Fourier	3
1.3.3 Théorème des résidus	4
1.3.4 Décomposition d'un vecteur en composantes transverses et longitudinales	5
1.4 Limites de l'électrodynamique classique	5
2 Solutions des équations de Maxwell	7
2.1 Equations de Maxwell sous forme intégrale	7
2.2 Structure des équations de Maxwell	7
2.2.1 Equation de continuité	7
2.2.2 Potentiel associé au champ magnétique	8
2.2.3 Potentiel associé au champ électrique	9
2.2.4 Invariance de jauge	10
2.2.5 Nombre de degrés de liberté des champs électrique et magnétique	11
2.3 Méthode de résolution des équations de Maxwell	11
2.3.1 Méthode pour l'électrostatique	11
2.3.2 La fonction δ de Dirac	12
2.3.3 Fonctions de Green pour l'équation de Poisson	14
2.4 Théorème de Green et conditions aux bords générales	15
2.4.1 Unicité des solutions avec des conditions de Dirichlet ou de Neumann . . .	16
2.4.2 Solutions formelles de problèmes d'électrostatiques avec conditions aux bords grâce aux fonctions de Green	17
2.5 Cas dynamique	19
2.5.1 Fonctions de Green et analyse complexe	22
2.5.2 Solutions de l'équation de D'Alembert	26
3 Ondes planes	27
3.1 Solutions dans le vide	27
3.2 Valeurs Moyennes	30

4	Les potentiels de Liénard-Wiechert	31
4.1	Calculs des potentiels	31
4.1.1	Intégration temporelle	31
4.1.2	Intégration spatiale	32
4.2	Des potentiels de Liénard-Wiechert aux champs	33
4.3	Radiation d'une particule en mouvement	36
4.3.1	Cas non relativiste	37
4.3.2	Cas relativiste	37
4.3.3	Mouvement rectiligne	38
5	Expansion en multipôles	41
5.1	Cas électrostatique	41
5.2	Magnétostatique	44
5.3	Expansion en multipôles dans le cas dynamique	45
5.4	Radiation du dipôle	48
5.4.1	Structure des champs	49
6	Relativité restreinte	51
6.1	Symétries et mécanique Newtonienne	51
6.2	Transformations de Galilée des équations de Maxwell dans le vide	54
6.3	Equations de D'Alembert et transformations de Lorentz	55
6.3.1	Considérations générales	55
6.4	Transformation de Lorentz générale : le groupe de Lorentz	60
7	Formulation covariante de l'Electrodynamique	62
7.1	Vecteurs contravariants et covariants	63
7.1.1	Transformation des dérivées	65
7.2	Les équations de Maxwell sous forme covariante	66
8	Formulation covariante de la mécanique Newtonienne	69
8.1	Structure de l'espace temps	69
8.1.1	Temps propre	69
8.2	De Newton (et Maxwell) à Einstein	71
8.3	Applications pour des cas simples	73
8.3.1	Champ électrique constant	73
8.3.2	Champ magnétique constant suivant ($\mathcal{O}z$)	75
8.4	Généralisation relativiste de la formule de Larmor	76
8.5	Les accélérateurs	78
8.5.1	Accélérateur linéaire	78
8.5.2	Radiation synchrotron	78
9	Champs électrique et magnétique dans un milieu macroscopique	79
9.1	Les équations de Maxwell macroscopiques	79
9.2	Equations de Maxwell macroscopiques : les champs \mathbf{H} et \mathbf{D}	82
9.3	Solution des équations de Maxwell dans un milieu dense	83
9.3.1	Diélectrique	84
9.4	Les ondes électromagnétiques dans les milieux continus	86
9.4.1	Réflexion d'une onde	86

Chapitre 1

Introduction

Les phénomènes électriques et magnétiques sont connus depuis la Grèce antique, même s'il ne s'agissait alors que d'une connaissance qualitative (ou semi-quantitative) de ces phénomènes. Une études quantitative, selon les critères de la science moderne a débuté à partir du XVII^e siècle. Elle s'est ensuite développée durant les XVIII^e et XIX^e siècle grâce aux recherches de Coulomb, Faraday, Ampère, Maxwell, Hertz,...

Avec Maxwell, on achève la formulation de tous les phénomènes électromagnétiques avec un système de loi physiques (d'équations). On pourrait dire que Maxwell a introduit le premier exemple d'unification de forces, en unifiant les forces électriques et magnétiques.

Ses équations étaient de plus prédictives. En effet, elles prédisaient que la lumière était un phénomène électromagnétique, et qu'elle était une onde se propageant dans les champs électrique et magnétique. Ces prédictions furent testées 20 ans plus tard par Hertz.

1.1 But du cours

Le principal but du cours est d'étudier les conséquences des équations de Maxwell, qu'on appelle généralement *l'électrodynamique classique* (abrégié CED). On peut distinguer deux classes de conséquences :

1. Les conséquences physiques :
 - Les ondes électromagnétiques et leur propagation dans le vide ou dans la matière.
 - L'émission de radiations électromagnétiques par des particules chargées accélérées.
2. Les conséquences « conceptuelles » :
 - Les équations de Maxwell incitent à reformuler les lois de la mécanique, avec l'introduction de la relativité restreinte (*special relativity* en anglais).

1.2 Notions de bases et lois de l'électrodynamique

Le système d'unité utilisé durant la première partie du cours sera le *système international d'unités* (SI), dans lequel :

- L'unité de courant est l'ampère A. Un courant est de 1 A si la force agissant entre deux lignes électriques parallèles parcourues par le même courant est de $2 \cdot 10^{-7}$ N/m.
- L'unité de charge électrique est le Coulomb C : $C = A \cdot s$.
- L'unité du potentiel électrique est le Volt V : $V = \frac{J}{C}$
- L'unité du champ électrique : V/m.
- L'unité du flux magnétique est le Weber Wb : $Wb = V \cdot s$.

- L'unité d'induction magnétique (ou de densité de flux magnétique) est le Tesla T. $T = \frac{Wb}{m^2} = \frac{V \cdot s}{m^2}$ ($1 T = 10^4$ gauss).
- L'unité de la résistance est le Ohm Ω : $\Omega = \frac{V}{A}$.
- L'unité de capacité est le Farad F : $F = \frac{C}{V}$.

1.2.1 Equations de Maxwell

Tout phénomène d'électrodynamique classique est décrit par les équations de Maxwell :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{MI})$$

$$c^2 \nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} \quad (\text{MII})$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (\text{MIII})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{MIV})$$

où :

- $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ (resp. $\mathbf{B}(\mathbf{x})$) est le champ électrique (resp. magnétique),
- $\rho(\mathbf{x})$ (resp. $\mathbf{J}(\mathbf{x})$) est la densité de charge (resp. de courant),
- $c = 299\,792\,458$ m/s est la vitesse de la lumière,
- $\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \frac{C^2}{N \cdot m^2} = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{A \cdot s}{V \cdot m}$ est la permittivité du vide.

A ces équations, on doit également ajouter la force de Lorentz, qui agit sur une particule de charge q qui se déplace avec vitesse \mathbf{v} dans un champ électromagnétique :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}). \quad (1.1)$$

Selon la force de Lorentz le champ électrique \mathbf{E} correspond à une force par unité de charge, en tant que \mathbf{B} est une force par unité de charge et de vitesse.

Remarques :

1. La loi d'Ampère est parfois écrite :

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \mu_0 = \frac{1}{c^2 \epsilon_0}$$

μ_0 est la perméabilité magnétique du vide. On en déduit ainsi :

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

2. La permittivité du vide ϵ_0 est un concept inutile dans le vide. On peut faire le changement d'unité :

$$\begin{aligned} \rho, \mathbf{J} &\rightarrow \sqrt{\epsilon_0} \rho, \sqrt{\epsilon_0} \mathbf{J} \\ \mathbf{E}, \mathbf{B} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \mathbf{E}, \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \mathbf{B} \end{aligned}$$

Ce changement permet ainsi d'éliminer ϵ_0 des équations de Maxwell et de laisser la force de Lorentz inchangée. C'est la base du système d'unité *CGS Gaussien*, où c est la seule constante dans les équations de Maxwell et dans l'équation de la force de Lorentz.

1.3 Rappels mathématiques

Dans ce qui suit, on rappelle quelques résultats et définitions d'analyse vectorielle et complexe, supposés connus.

1.3.1 Analyse vectorielle

Les principales opérations vectorielles sont définies en coordonnées cartésiennes comme :

Gradient :

$$\nabla f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \partial_i f \mathbf{e}_i$$

où $\mathbf{e}_i, i=1, 2, 3$ désigne la base orthonormée du système cartésien. Dans la dernière égalité, on a utilisé la *convention d'Einstein*. Dans cette convention, une sommation est sous-entendue sur chaque indice répété, par exemple :

$$A_i = \alpha_i B_j C_j = \alpha_i \sum_j B_j C_j$$

Divergence :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \partial_i A_i$$

Rotationnel :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3 \\ &= \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j A_k \end{aligned}$$

D'autre part, on considère que vous connaissez :

Théorème de Gauss/de la divergence :

$$\int_V d^3x \nabla \cdot \mathbf{A} = \oint_{\partial V} \mathbf{d}\sigma \cdot \mathbf{A} \quad (1.2)$$

On écrira parfois $\mathbf{d}\sigma \cdot \mathbf{A} \equiv d\sigma A_n$ ou A_n est la composante du vecteur normal à la surface. Dans le cas où $\mathbf{A} = \nabla\psi$ on écrira $A_n \equiv \partial_n\psi$ (notation dans le livre de Jackson).

Théorème de Stokes :

$$\oint_{\partial S} \mathbf{dl} \cdot \mathbf{A} = \int_S \mathbf{d}\sigma \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) \quad (1.3)$$

1.3.2 Transformée de Fourier

La transformée de Fourier d'une fonction $f(\mathbf{x})$, où \mathbf{x} est un n -vecteur, est définie comme :

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n x f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

où $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ désigne le produit scalaire Euclidien. Par abus de langage, on utilisera parfois la notation $\tilde{f}(\mathbf{k}) = f(\mathbf{k})$ dans les cas sans ambiguïtés. La transformée inverse est donnée par :

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

Dans cette convention, le facteur $(2\pi)^n$ et l'exponentielle positive n'apparaissent que lorsque l'intégration est faite sur les vecteur \mathbf{k} .

Remarque : En dimension 4, on utilise en général la convention suivante :

$$f(\mathbf{k}, \omega) = \int_{\mathbb{R}^4} d^3x dt f(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

$$f(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} f(\mathbf{k}, t) e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

Cette convention est utilisée pour préserver l'invariance sous transformation de Lorentz (voir chapitre 6). Elle revient à inverser le signe des exponentielles et à utiliser un produit scalaire dans l'espace de Minkowski.

Propriétés importantes :

1.3.3 Théorème des résidus

Une fonction $f(z)$ est dite *holomorphe*¹ sur U si sa dérivée

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe pour tout point $z_0 \in U$.

Théorème de Cauchy : Soit un ouvert U de \mathbb{C} simplement connexe et $f(z)$ une fonction holomorphe sur U . Alors pour toute boucle $\gamma \subset U$:

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = 0 \quad (1.4)$$

Théorème des résidus : Soit un ouvert U de \mathbb{C} simplement connexe et $f(z)$ une fonction holomorphe sur $U \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$. Alors pour toute boucle $\gamma \subset U$ ne rencontrant aucun des points singuliers z_1, z_2, \dots, z_n :

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k) \quad (1.5)$$

Résidus des pôles Dans le cas où les points singuliers sont des pôles d'ordre n , le résidu de $f(z)$ en z_k est donné par :

$$\text{Res}(f, z_k) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_k)^n f(z) \quad (1.6)$$

1. En physique, les termes holomorphes et analytiques sont très souvent interchangés dans la littérature.

1.3.4 Décomposition d'un vecteur en composantes transverses et longitudinales

En général, un champ vectoriel $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ peut être décomposé comme $\mathbf{V} = \mathbf{V}_\perp + \mathbf{V}_\parallel$, où :

$$\mathbf{V}_\parallel \equiv \nabla f \quad \rightarrow \quad \nabla \wedge \mathbf{V}_\parallel = 0 \quad (1.7)$$

est appelée *composante longitudinale*, et

$$\mathbf{V}_\perp \equiv \nabla \wedge \mathbf{U} \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{V}_\perp = 0 \quad (1.8)$$

est appelée *composante transverse*. Ceci peut être montré facilement en passant dans l'espace de Fourier pour les coordonnées spatiales, où on a :

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (1.9)$$

Maintenant, $\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{k}, t)$ peut être décomposé en composantes orthogonale et parallèle à \mathbf{k} :

$$\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{k}, t) = \tilde{\mathbf{V}}_\perp + \tilde{\mathbf{V}}_\parallel \quad (1.10)$$

où $\tilde{\mathbf{V}}_\parallel = \mathbf{k} \tilde{f}$ et $\tilde{\mathbf{V}}_\perp \cdot \mathbf{k} = 0$. On peut donc trouver un vecteur $\tilde{\mathbf{U}}$ tel que $\tilde{\mathbf{V}}_\perp = \mathbf{k} \wedge \tilde{\mathbf{U}}$. En tenant compte de la décomposition (1.10) dans l'éq. (1.9) on obtient le résultat décrit par les eqs. (1.7, 1.8).

On peut noter que la composante longitudinale $\tilde{\mathbf{V}}_\parallel$ couvre un espace de dimension 1, tandis que la composante transverse $\tilde{\mathbf{V}}_\perp$ couvre un espace de dimension 2 perpendiculaire à \mathbf{k} .

En repassant dans l'espace des positions, on peut dire qu'un champ vectoriel de dimension 3 est spécifié par trois fonctions dans l'espace-temps, sa composante longitudinale étant définie par une fonction tandis que sa composante transverse est définie par deux fonctions.

Un vecteur \mathbf{V} satisfaisant $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ est appelé un *vecteur transverse*. Un vecteur \mathbf{V} satisfaisant $\nabla \wedge \mathbf{V} = 0$ est appelé un *vecteur longitudinal*.

1.4 Limites de l'électrodynamique classique

Les limites de l'électrodynamique classique sont établies par la mécanique quantique, où le monde microscopique est décrit par des *particules* (quanta) avec des valeurs en principe discrètes de l'énergies, de l'impulsion, de charges, ... Dans ce paradigme, les ondes électromagnétiques sont associées à des photons et la matière est constituée de particules, e.g. d'électrons et de protons de charges discrètes $q_e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{C}$ et $q_p = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{C}$.

La limite classique de l'électrodynamique est toutefois valable dans le cas où le nombre de quanta (dans ce cas, les photons) est grand à tel point que l'on ne peut pas s'apercevoir de la nature discrète de la radiation (et de la matière).

Par exemple, pour une source de lumière visible de 100W, à une distance d'un mètre, on a environ $10^{15} \text{photons/cm}^2 \cdot \text{s}$. Si la résolution spatiale et temporelle du système de détection n'est pas assez grande, on pourra bien décrire sa réaction d'une façon continue, selon le lois de la physique classique.

Dans une manière similaire on considère en électrodynamique classique le concept de distribution continue de charge ρ . En réalité, la matière est composée d'une multitude d'atomes. Si l'on a une résolution spatiale $L \gg r_{\text{atome}}$, et si la résolution de charge électrique est beaucoup plus grande que q_e (la charge de l'électron), on pourra toutefois bien décrire la distribution de charge comme continue.

D'autre part, l'électrodynamique classique prédit que les atomes ne sont pas stables : en tournant autour du noyau l'électron va émettre énergie sous forme de radiation, et finalement « tomber » dessus en un temps très court (10^{-14} s). Au niveau atomique, l'électrodynamique classique prédit une instabilité des atomes, donc est bel et bien insuffisante.

Cependant, « mélanger » l'électrodynamique et la mécanique quantique marche très bien *sans* l'introduction de nouvelles lois, et donne lieu à l'*électrodynamique quantique* (QED). Elle a été entre autres formalisée par Feynman, Schwinger et Tomonaga dans les années 50, et est la théorie la plus précise qu'on aie pour décrire l'électromagnétisme à petites distances/grandes énergies. Sa validité est très bien testée jusqu'à des distances de 10^{-15} cm.

Enfin, on peut également considérer la possibilité de modifier l'électrodynamique (classique ou quantique) à de très grandes distances, en considérant par exemple un potentiel de la forme du potentiel de Yukawa :

$$V(r) = \frac{1}{r} e^{-r/L}$$

qui se réduit au potentiel de Coulomb à des distances $\ll L$. Il n'y a aucune évidence expérimentale d'une modification de l'électrodynamique à de grandes distances. Pour exemple, l'observation de champs magnétiques galactiques implique que l'électrodynamique n'est pas modifiée au dessous de $\sim 10^{19}$ m. Dans l'hypothèse d'une modification à la Yukawa, ces observations impliquent $L > 10^{19}$ m. Ces modifications à grandes distances n'ont cependant pas de très grandes motivations du point de vue théorique.

Chapitre 2

Solution des équations de Maxwell en présence de sources

2.1 Equations de Maxwell sous forme intégrale

Afin de réécrire les équations de Maxwell sous forme intégrale, on intègre sur un volume V ou un chemin fermé Γ entourant une surface S .

En utilisant le théorème de Gauss (1.2), la première se reformule :

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

Loi de Gauss : “Le flux de E à travers une surface fermée est égal à la charge à l’intérieur de cette surface divisée par ϵ_0 ”.

En utilisant le théorème de Stokes (1.3), la deuxième traduit la loi d’Ampère :

$$\underbrace{c^2 \oint_{\Gamma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{J}}_{\text{loi d'Ampère}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}}_{\text{terme de courant de déplacement}} \quad (2.2)$$

De même, en réutilisant le théorème de Stokes, la troisième équation se reformule :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \quad (2.3)$$

Cette équation est nommée *loi de Faraday*.

La quatrième traduit quant à elle la non-existence de monopôles magnétiques,

$$\oint_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

2.2 Structure des équations de Maxwell

2.2.1 Equation de continuité

On considère les deux équations de Maxwell (MI) et (MII) qui dépendent de ρ et \mathbf{J} . ρ et \mathbf{J} sont des quantités qui décrivent la matière (du point de vue microscopique : ρ et \mathbf{J} sont déterminés par la position, la vitesse et la charge des particules). L’évolution spatio-temporelle de ρ et \mathbf{J} est donc intuitivement liée à la dynamique de la matière : les équations du mouvement

de la matière devraient dicter comment ces deux courants changent en fonction du temps et de l'espace. Remarquablement, ceci peut être aussi prouvé depuis les équations de Maxwell.

En dérivant par rapport au temps la première équation, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.5)$$

D'autre part en prenant la divergence de la seconde :

$$\underbrace{c^2 \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B})}_{=0} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{j}}{\epsilon_0} \quad (2.6)$$

Où l'on a utilisé les propriétés de l'opérateur ∇ . En combinant (2.5) et (2.6), on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.7)$$

qui est appelée *équation de continuité*. Elle exprime la conservation de la charge électrique. Si la charge n'était pas conservée, il ne serait pas possible de résoudre les équations de Maxwell.

Historiquement, le point de vue a été un peu différent : en posant l'équation de continuité, Maxwell a introduit le terme de déplacement dans la loi d'Ampère, sans laquelle on ne pourrait pas la résoudre.

L'existence d'une loi de conservation est une caractéristique des quatre forces fondamentales observées dans la Nature (forces électromagnétique, faible, forte et gravitationnelle).

2.2.2 Potentiel associé au champ magnétique

La résolution des équations de Maxwell peut être grandement simplifiée en remarquant que les équations (MIII) et (MIV) sont homogènes selon les champs, i.e. ne dépendent pas des termes de sources.

L'équation (MIV) implique que le champ magnétique découle d'un potentiel vecteur \mathbf{A} tel que :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.8)$$

Ceci peut être compris en passant dans l'espace de Fourier en ce qui concerne la dépendance spatiale de \mathbf{B} . En effet, on a :

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

La divergence du champ magnétique vaut alors :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

L'équation de Maxwell (MIV) est équivalente à :

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0$$

Le vecteur $\tilde{\mathbf{B}}$ est donc perpendiculaire au vecteur \mathbf{k} . Dans tous les cas, on peut alors trouver un vecteur $\tilde{\mathbf{A}}$ perpendiculaire aux deux premiers. En repassant dans l'espace réel, on a bien :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Remarque : Il est clair que le potentiel vecteur \mathbf{A} n'est pas unique et n'est défini qu'à un gradient près. En effet, la transformation :

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} + \nabla\alpha \quad (2.9)$$

où α est une fonction scalaire arbitraire donne le même champ magnétique, par les propriétés de l'opérateur ∇ .

2.2.3 Potentiel associé au champ électrique

En introduisant le potentiel vecteur dans la loi de Faraday (2.3), on obtient :

$$\nabla \wedge \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Lorsque qu'une fonction vectorielle \mathbf{F} (dans ce cas $\mathbf{F} = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$) satisfait $\nabla \wedge \mathbf{F} = 0$, on peut toujours trouver un potentiel scalaire Φ tel que :

$$\mathbf{F} = -\nabla\Phi$$

Il existe 2 manières de s'en convaincre :

1. Adapter l'exemple fait pour le champ vectoriel \mathbf{A} dans l'espace de Fourier.
2. Définir un chemin γ joignant un point de départ \mathbf{x}_0 à un point arbitraire \mathbf{x} . Si l'on définit Φ_γ comme :

$$\Phi_\gamma(\mathbf{x}) = - \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

On sait que $\nabla \wedge \mathbf{F} = 0$. Ainsi pour deux chemins γ_1 et γ_2 , on a :

$$\begin{aligned} \Phi_{\gamma_1}(\mathbf{x}) - \Phi_{\gamma_2}(\mathbf{x}) &= \int_{\gamma_1} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F} - \int_{\gamma_2} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F} \\ &= - \oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_S \nabla \wedge \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\ &= 0 \end{aligned}$$

où Γ est la boucle fermée en \mathbf{x}_0 partant par γ_1 et revenant par γ_2 . Le potentiel ainsi défini ne dépend donc pas du chemin.

Pour conclure, les équations de Maxwell (MIII) et (MIV) permettent la définition d'un potentiel scalaire ϕ et d'un potentiel vectoriel \mathbf{A} tels que :

$$\begin{cases} \mathbf{B} &= \nabla \wedge \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{cases} \quad (2.10)$$

2.2.4 Invariance de jauge

Φ et \mathbf{A} ne définissent pas univoquement \mathbf{E} et \mathbf{B} . En effet, la *transformation de jauge*

$$\begin{cases} \mathbf{A} & \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\alpha \\ \Phi & \longrightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial\alpha}{\partial t} \end{cases} \quad (2.11)$$

implique les mêmes champs électrique et magnétique peu importe la fonction α . Pour le champ magnétique, cela découle trivialement des propriétés de l'opérateur ∇ . Pour le champ électrique :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} & \longrightarrow \mathbf{E}' = -\nabla\Phi' - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}' \\ & = -\nabla\left(\Phi - \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} + \nabla\alpha) \\ & = -\nabla\Phi + \nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t} - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t} \\ & = \mathbf{E} \end{aligned}$$

La « redondance » associée à la transformation de jauge peut être exploitée avantageusement en choisissant une paramétrisation de Φ et \mathbf{A} dans laquelle les équations de Maxwell prennent une forme plus simple. Le choix de la jauge dépend largement du problème. On dit dans ce cas qu'on *fixe la jauge*. Un des choix pratiques est la jauge de Lorenz¹ :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0 \quad (2.12)$$

Cette dernière peut être trouvée en partant de la transformation de jauge (2.11), en choisissant α tel que :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2\alpha + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} = 0$$

C'est-à-dire qu' α doit résoudre :

$$-\nabla^2\alpha + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

La jauge de Lorenz est très pratique principalement pour deux raisons :

1. la contrainte (2.12) est invariante sous changement de référentiel inertiel (transformations de Lorentz). Ceci va être étudié plus en détail dans le chapitre 6
2. Les équations de Maxwell se découpent en une équation pour Φ indépendante de \mathbf{A} et vice-versa :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \nabla^2\Phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2.13)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\mathbf{A} = \frac{\mathbf{J}}{c^2\varepsilon_0} \quad (2.14)$$

La partie homogène de ces deux équations correspond à la propagation d'une onde à vitesse c .

1. Cette jauge est nommée d'après le physicien danois Ludvig Lorenz (1829–1891), alors que le physicien néerlandais Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928) a donné son nom aux transformations de Lorentz et à la force de Lorentz.

2.2.5 Nombre de degrés de liberté des champs électrique et magnétique

Un bon exercice est de « compter » combien de degrés de liberté on trouve dans les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} . Un degré de liberté (d.d.l.) correspond à une fonction, en principe générale, de (\mathbf{x}, t) . En principe, \mathbf{E} et \mathbf{B} étant des tri-vecteurs, on a $3 \times 2 = 6$ d.d.l..

Cependant, les équations (MIII) et (MIV) sont des contraintes sur les d.d.l.. En particulier, (MIV) impose que la composante longitudinale du champ magnétique \mathbf{B}_{\parallel} soit nulle : elle fixe donc 1 d.d.l. Par contre, (MIII) correspond à une relation linéaire entre les composantes transverses de \mathbf{E} et \mathbf{B} ; elle fixe 2 d.d.l.. Les contraintes (MIII) et (MIV) réduisent le d.d.l. en (\mathbf{E}, \mathbf{B}) de 6 à 3.

Il est intéressant de faire le même compte en utilisant les potentiels Φ et \mathbf{A} . Au premier abord, on compte $1 + 3 = 4$ d.d.l. dans les potentiels. Mais il faut faire attention, car la paramétrisation en terme de potentiels est redondante : du point de vue physique, les potentiels sont déterminés modulo une transformation de jauge. La liberté dans le choix de jauge correspond à une fonction α , donc 1 d.d.l. On conclue que le nombre de d.d.l. physiques qu'on compte dans les potentiels est $4 - 1 = 3$, en accord avec ce qui a été trouvé en terme de \mathbf{E} et \mathbf{B} .

2.3 Méthode de résolution des équations de Maxwell

On va maintenant développer des méthodes de résolution des équations (2.13) et (2.14) et discuter leur conséquences physique.

2.3.1 Méthode pour l'électrostatique

On considère premièrement les équations dans la situation la plus simple, c'est-à-dire lorsque $\mathbf{J} = 0, \rho \neq 0, \dot{\rho} = 0$, et lorsque l'on peut prendre $\mathbf{A} = \mathbf{B} = 0$. Cette limite correspond à ce que l'on appelle *l'électrostatique*. Le potentiel Φ est défini par $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, qui doit résoudre la loi de Gauss (MI). Le potentiel vérifie *l'équation de Poisson* :

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.15)$$

Pour trouver les solutions générales, on doit également spécifier les conditions aux bords, par exemple :

$$|\nabla\Phi| = |\mathbf{E}| \xrightarrow{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} 0$$

i.e. que les champs disparaissent à l'infini.

remarque :

- l'équation de Poisson est linéaire² (principe de superposition) : étant donnée une distribution de charges $\rho = \sum_i \rho_i$, la solution de

$$\nabla^2\Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_i \rho_i$$

avec condition au bord (infini) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |\nabla\Phi| = 0$ ³ s'écrit

$$\Phi = \sum_i \Phi_i$$

2. En supposant qu'aucune non-linéarité est induite par les conditions aux bords.
3. On remarque cette condition au bord est lineare en Φ .

où Φ_i sont les solutions de $\nabla^2 \Phi_i = \frac{-1}{\epsilon_0} \rho_i$ avec condition au bord $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |\nabla \Phi_i| = 0$.

Supposant une distribution de charge ρ , la contribution $\delta_V \Phi$ à Φ d'un petit volume dV à une distance R (voir figure 2.1) va être (en utilisant un résultat qu'on connaît) :

$$\delta_V \Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_V dV}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \quad (\text{Loi de Coulomb})$$

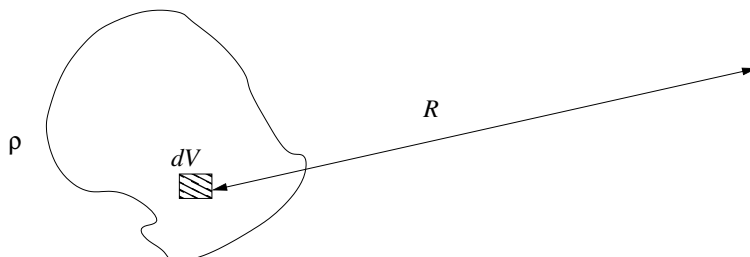


FIGURE 2.1 – petit volume dV à une distance R contribuant au potentiel scalaire.

En appliquant le principe de superposition, on a :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_V \delta_V \Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (2.16)$$

Cette procédure peut être « formalisée » en introduisant deux objets mathématiques :

- La fonction delta de Dirac
- La fonction de Green

2.3.2 La fonction δ de Dirac

La fonction δ de Dirac formalise le concept de *charge finie* contenue dans un *volume infinitésimal*. La densité de charge correspondant à une charge ponctuelle q en \mathbf{x}_0 est

$$\rho(\mathbf{x}) = q\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

Ce concept peut être généralisé à n'importe quelle dimension.

Son intégrale sur un volume est :

$$\int_V d^3x q\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \begin{cases} q & \text{si } \mathbf{x}_0 \in V \\ 0 & \text{si } \mathbf{x}_0 \notin V \end{cases}$$

Ce qui peut être compris comme si la fonction de Dirac était nulle partout sauf en \mathbf{x}_0 . La fonction de Dirac $\delta^n(\mathbf{x})$ n'est *pas* une fonction, c'est une distribution. Elle peut être définie comme le cas limite de fonctions régulières :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

Quelques exemples de fonctions possibles :

1.

$$\delta_\epsilon^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \left(\frac{1}{\pi\epsilon^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}{\epsilon^2} \right)$$

2.

$$\delta_\epsilon^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{3\epsilon^2}{(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 + \epsilon^2)^{5/2}}$$

En général, pour une fonction de Schwartz⁴ en dimension n $F(\mathbf{x})$ telle que :

$$\begin{aligned} 1) \quad & F(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall x \\ 2) \quad & \int d^n x F(\mathbf{x}) = 1 \end{aligned}$$

on peut définir

$$\delta_\epsilon^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{1}{\epsilon^n} F\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\epsilon}\right)$$

telle que sa limite pour $\epsilon \rightarrow 0$ tend vers la distribution delta de Dirac :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

En effet, en utilisant un changement de variable :

$$\begin{aligned} \int d^n x \delta_\epsilon^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) &= \int \frac{d^n x}{\epsilon^n} F\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\epsilon}\right) \\ &= \int d^n y F(\mathbf{y}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Propriétés :

a)

$$I_1 = \int d^n x f(\mathbf{x}) \delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0) \quad (2.17)$$

Démonstration. Par définition :

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^n x f(\mathbf{x}) \delta_\epsilon^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^n x}{\epsilon^n} f(\mathbf{x}) F\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\epsilon}\right) \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \epsilon \mathbf{y}$, on obtient :

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^n y f(\mathbf{x}_0 + \epsilon \mathbf{y}) F(y) \\ &= f(\mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

A première ligne, on a permuté la limite et l'intégrale. Ceci est permis dans le cas où l'intégrale existe, c'est-à-dire dans le cas où $f(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{y})$ ne croît pas trop rapidement à l'infini. Ce n'est en réalité pas un problème, parce qu'on peut toujours choisir F telle qu'elle décroisse assez rapidement à l'infini. \square

b)

$$\mathbf{I}_2 = \int d^n x f(\mathbf{x}) \nabla \delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = -\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_0)$$

4. L'ensemble des fonctions de Schwartz est l'ensemble des fonctions à décroissance rapide.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^n x}{\epsilon^n} f(\mathbf{x}) \nabla F\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\epsilon}\right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^n x}{\epsilon^n} \left\{ \nabla \left(f(\mathbf{x}) F\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\epsilon}\right) \right) - \nabla f(\mathbf{x}) F\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\epsilon}\right) \right\} \end{aligned}$$

En utilisant la formule du gradient et a) :

$$\mathbf{I}_2 = \underbrace{\oint d\mathbf{S} f(\mathbf{x}) F\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\epsilon}\right)}_{=0} - \nabla f(\mathbf{x}_0) \quad (2.18)$$

Le premier terme est nul si l'on suppose que la fonction $F\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\epsilon}\right)$ décroît assez rapidement à l'infini. \square

c)

$$\delta^n(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \sum_i \frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{\left| \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|} \quad (2.19)$$

où \mathbf{g} est une fonction n'ayant que des racines simples à $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ et $\left| \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|$ son jacobien.

La preuve est laissée en exercice.

d) La dimension de la delta est $\frac{1}{L^n}$, où n est la dimension de l'espace, et L une longueur.

Démonstration. ϵ a la dimension d'une longueur, donc

$$\delta_\epsilon^n(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon^n} F\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\epsilon}\right)$$

F n'ayant pas de dimension, δ a une dimension de $\frac{1}{\text{Volume}}$.

De manière similaire, on peut partir du fait que l'intégrale sur l'espace de la delta vaut :

$$\int d^n x \delta^n(\mathbf{x}) = 1$$

La dimension de la mesure $d^n x$ étant L^n et 1 est sans dimension. Ainsi, la dimension de la delta est bien L^{-n} \square

Une distribution de charges ponctuelles q_i en position \mathbf{x}_i peut donc être décrite par

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_i q_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i). \quad (2.20)$$

2.3.3 Fonctions de Green pour l'équation de Poisson

Une *fonction de Green* est une fonction $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ dépendant de 2 variables \mathbf{x} et \mathbf{x}' satisfaisant :

$$-\nabla_{\mathbf{x}}^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.21)$$

En pratique, $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ est le potentiel en \mathbf{x} associé à une particule de charge $q = \epsilon_0$ localisée en \mathbf{x}' . $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ est complètement spécifiée par l'équation (2.21) et un choix judicieux de conditions aux bords.

Une fois $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ obtenue, on peut l'utiliser pour obtenir la forme la plus générale possible du potentiel associée à la distribution de charge $\rho(\mathbf{x})$:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3x' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') \quad (2.22)$$

En effet, ainsi définit, $\Phi(\mathbf{x})$ satisfait l'équation de Poisson (2.15) :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}}^2 \Phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3x' \nabla_{\mathbf{x}}^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3x' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') \\ &= -\frac{\rho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Remarques :

- $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ va en général dépendre des conditions au bord.
- Il est évident qu'ajouter une fonction de Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ et une fonction $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ telle que $\nabla_{\mathbf{x}}^2 F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0$ donne à nouveau une fonction de Green (qui satisfait en général des différentes conditions au bord).
- Dans \mathbb{R}^3 vide, avec un champ \mathbf{E} s'annulant à l'infini

$$E(\mathbf{x}) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

la solution (démontrée en exercice) est donnée par :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

L'idée pour y parvenir est d'introduire une fonction régulière $G_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ satisfaisant

$$\nabla^2 G_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\delta_\varepsilon^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

où δ_ε est une des possibles approximations de la fonction de Dirac, et finalement prendre la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Une possibilité est :

$$G_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 + \varepsilon^2}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

On a ainsi :

$$\nabla^2 G_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{3\varepsilon^2}{(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 + \varepsilon^2)^{5/2}} = -\delta_\varepsilon^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

2.4 Théorème de Green et conditions aux bords générales

Dans le cas simple d'une distribution de charge dans le vide, la notion de fonctions de Green semble une complication superflue des résultats obtenus par la loi de Coulomb et du principe de superposition. Dans des situations plus générales, c'est cependant un outil très utile.

Le cas que l'on va considérer à présent peut être décrit comme un volume V borné par une surface fermée ∂V (voir figure 2.2) qui est lui-même l'union de plusieurs surfaces fermées, telle que :

$$\partial V = \bigcup_i S_i$$

En principe, on laissera S_0 tendre vers l'infini. On veut trouver le potentiel Φ étant données :

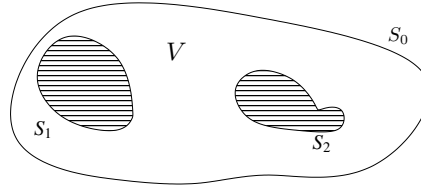


FIGURE 2.2 – Types de surfaces considérées pour le théorème de Green.

- la densité de charge $\rho(\mathbf{x})$ à l'intérieur de V ,
- de bonnes conditions aux bords sur ∂V .

Quelles doivent être les conditions aux bords dont on a besoin, et sont-elles consistantes ? Cette question a une réponse donnée par les *identités de Green* :

Première identité de Green :

Soient deux fonctions $\phi(\mathbf{x})$ et $\psi(\mathbf{x})$ définies à l'intérieur de V . On définit :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \phi \nabla \psi \\ \Rightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} &= \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi\end{aligned}$$

En intégrant la seconde équation sur le volume, et en utilisant le théorème de la divergence, on obtient la *première identité de Green* :

$$\int_V dV (\nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi) = \oint_{\partial V} \mathbf{dS} \cdot \phi \nabla \psi \quad (2.23)$$

Seconde identité de Green (Théorème de Green) :

En permutant ϕ et ψ dans la première identité de Green (2.23), et en soustrayant les deux équations, on obtient immédiatement la *Seconde identité de Green*, appelée aussi *théorème de Green* :

$$\int_V dV (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) = \oint_{\partial V} \mathbf{dS} \cdot (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \quad (2.24)$$

2.4.1 Unicité des solutions avec des conditions de Dirichlet ou de Neumann

Etant donnée une distribution de charge $\rho(\mathbf{x})$, quelle conditions aux bords sont appropriées pour qu'il existe une solution unique à l'équation de Poisson ? Pour y répondre, on considère deux solutions $\Phi_1(\mathbf{x})$, $\Phi_2(\mathbf{x})$ de l'équation de Poisson

$$\nabla^2 \Phi_i = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad i = 1, 2$$

Ces solutions sont égales pour les conditions aux bords dites de *Dirichlet* et *Neumann*. Pour le prouver, on définit :

$$U = \Phi_1 - \Phi_2$$

En substituant $U = \phi = \psi$ dans la première identité de Green (2.23), on obtient :

$$\int_V dV (U \nabla^2 U + |\nabla U|^2) = \oint_{\partial V} \mathbf{dS} \cdot U \nabla U$$

Finalement, en utilisant le fait que par l'équation de Poisson, $\nabla^2 U = \nabla^2 \Phi_1 - \nabla^2 \Phi_2 = 0$:

$$\int_V dV |\nabla U|^2 = \oint_{\partial V} \mathbf{dS} \cdot U \nabla U \equiv \int_{\partial V} dS U \partial_n U \quad (2.25)$$

Dirichlet : Il est physiquement intuitif que fixer ϕ aux bords fixe la solution de manière unique. L'équation (2.25) montre explicitement qu'étant données deux solutions qui coïncident aux bords, on a :

$$U|_{\partial V} = 0 \Rightarrow \int dV |\nabla U|^2 = 0 \Rightarrow \nabla U = 0$$

Ce qui implique :

$$U = 0 \Rightarrow \Phi_1 = \Phi_2$$

On a bien une solution unique avec une condition aux bords de Dirichlet.

Neumann : Fixer $\partial_n \Phi$ (dérivé normale à la surface) aux bords est équivalent à fixer la composante normale E_n et définit également « uniquement » la solution. en effet :

$$\partial_n \Phi_1|_{\partial V} = \partial_n \Phi_2|_{\partial V} \Rightarrow \nabla U = 0 \quad \text{à l'intérieur de } V$$

Donc $\Phi_1 = \Phi_2 + \text{cst.}$ La valeur de la constante n'a aucune incidence sur la physique.

Condition mixte : Une condition aux bords plus générale peut également être donnée à partir d'un cas mixte :

- Condition de Dirichlet sur une partie de ∂V ,
- Condition de Neuman sur une autre partie.

On peut montrer que cette solution donne également lieu à une solution unique.

2.4.2 Solutions formelles de problèmes d'électrostatiques avec conditions aux bords grâce aux fonctions de Green

L'idée est de chercher une fonction de Green adaptée dans un volume V :

$$-\nabla_{\mathbf{x}}^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

En général, on peut écrire une fonction de green de la forme :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$$

avec F telle que $\nabla_{\mathbf{x}'}^2 F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0$ à l'intérieur de V . On doit donc choisir F d'une manière adaptée aux conditions de bords. F représente les effets de la charge à l'extérieur de V .

On considère le théorème de Green avec :

$$\begin{aligned} \phi &= \Phi(\mathbf{x}') & \nabla^2 \Phi &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \psi &= G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') & \nabla_{\mathbf{x}'}^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad \forall \mathbf{x} \in V \end{aligned}$$

En intégrant sur d^3x' , on obtient :

$$\int_V d^3x' \left(\Phi(\mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}'}^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) = \int_{\partial V} d\mathbf{S} (\Phi(\mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}'} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \nabla \Phi(\mathbf{x}'))$$

En utilisant la définition de la fonction de Green pour l'électrostatique :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_V d^3x' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \int_{\partial V} d\mathbf{S} (G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \nabla \Phi(\mathbf{x}') - \Phi(\mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}'} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')) \quad (2.26)$$

On peut noter la structure intéressante du résultat. Le premier terme semble être issu de la contribution des charges à l'intérieur du volume, tandis que le second est issu des bords. Cependant, le terme de bord contient des termes en Φ et en $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$. On a prouvé que lorsqu'un des deux est fixé, alors la solution est unique. L'équation (2.26) semble au premier abord contenir plus d'informations que nécessaires. On peut néanmoins encore utiliser le fait que $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ n'est pas unique, et on peut trouver la fonction de Green adaptée aux conditions de bords.

Dirichlet : Si $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ est choisie de telle manière que

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \quad \forall \mathbf{x}' \in \partial V$$

alors les termes de bords proportionnels à $\nabla \Phi$ tombent et on obtient :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3x' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') - \int_{\partial V} d\mathbf{S} \Phi(\mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}'} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (2.27)$$

Neumann : Dans ce cas, le choix le plus évident semble

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \quad \forall \mathbf{x}' \in \partial V$$

ie les composantes du gradient sont orthogonales à S . Cependant, le théorème de Gauss impose que :

$$1 = \int_V d^3x' (-\nabla_{\mathbf{x}'}^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')) = - \int_S dS \frac{\partial G}{\partial n'}$$

Ainsi, le choix le plus judicieux est de choisir la fonction de Green telle que

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{S} = \text{cst}$$

où S est l'aire de la surface, i.e la somme sur tous les bords non connexes. L'équation (2.26) devient finalement

$$\Phi(\mathbf{x}) = \langle \Phi \rangle_S + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3x' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') + \int_{\partial V} d\mathbf{S} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \nabla \Phi(\mathbf{x}') \quad (2.28)$$

où $\langle \Phi \rangle_S$ est la moyenne du potentiel sur toute la surface :

$$\langle \Phi \rangle_S = \frac{1}{S} \int_{\partial V} dS \Phi(\mathbf{x})$$

Dans le cas où une partie du bord est à l'infini, ie $S \rightarrow \infty$, la moyenne est nulle et ce terme tombe dans l'équation finale (2.28).

2.5 Cas dynamique

On considère maintenant le cas dynamique. Il est régi par les deux équations :

$$\square \Phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2.29)$$

$$\square \mathbf{A} = \frac{\mathbf{J}}{\varepsilon_0 c^2} \quad (2.30)$$

$$(2.31)$$

où \square est le D'Alembertien défini par :

$$\square f = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \nabla^2 f$$

La fonction de Green associée à ces équations est alors $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ telle que :

$$\square_{(\mathbf{x}, t)} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') \quad (2.32)$$

On se spécialise maintenant dans le cas du potentiel scalaire. Comme dans le cas statique, il est facile de vérifier que

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' dt' G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \frac{\rho(\mathbf{x}', t')}{\varepsilon_0} \quad (2.33)$$

satisfait l'équation de D'Alembert (2.29) :

$$\begin{aligned} \square \Phi(\mathbf{x}, t) &= \int d^3x' dt' \square G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \frac{\rho(\mathbf{x}', t')}{\varepsilon_0} \\ &= \int d^3x' dt' \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') \frac{\rho(\mathbf{x}', t')}{\varepsilon_0} \\ &= \frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

A nouveau, l'équation (2.33) définit une solution particulière dépendant des conditions de bords satisfaites par $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$. Des exemples seront donnés plus bas. La solution la plus générale est obtenue en ajoutant à l'équation (2.33) la solution générale du cas homogène ($\rho = 0$).

Afin de trouver la solution, le plus simple est de passer dans l'espace de Fourier pour le temps :

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', t') e^{-i\omega t} \quad (2.34)$$

En prenant la transformée de Fourier de l'équation de D'Alembert (2.29), on obtient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} (-k^2 - \nabla_{\mathbf{x}}^2) \tilde{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', t') e^{-i\omega t} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')}$$

Où l'on a défini $k = \omega/c$ dans le membre de gauche et utilisé la représentation de Fourier de la δ de Dirac dans le membre de droite. L'équation est vérifiée si et seulement si :

$$-(k^2 + \nabla_{\mathbf{x}}^2) \tilde{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', t') = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{i\omega t'} \quad (2.35)$$

On peut maintenant chercher une solution comme dans le cas statique. Le cas le plus simple est de considérer une symétrie sphérique, donc $\tilde{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', t') = \tilde{G}(r, \omega, t')$. De plus, pour tous points $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ (i.e : $r \neq 0$), l'équation se réduit à :

$$(k^2 + \nabla_{\mathbf{x}}^2) \tilde{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', t') = 0$$

En utilisant l'expression du Laplacien en coordonnées sphériques, on obtient l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \tilde{G}}{\partial r}(r, \omega, t') \right) &= -k^2 \tilde{G}(r, \omega, t') \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\tilde{G}}{dr}(r, \omega, t') \right) &= -k^2 \left(r^2 \tilde{G}(r, \omega, t') \right) \end{aligned}$$

En posant $\tilde{G} = F/r$, on tombe sur une équation différentielle ressemblant à celle de l'oscillateur harmonique, on a donc :

$$\tilde{G}(r, \omega, t') = \frac{A_k}{r} e^{ikr} + \frac{B_k}{r} e^{-ikr} \quad A_k, B_k \in \mathbb{C}$$

On doit à présent trouver une condition sur les coefficients de normalisation A_k, B_k imposés par la δ de Dirac au membre de droite de l'équation (2.35). Cette contrainte peut être prise en compte en prenant la forme intégrale de (2.35) :

$$\int_{\mathcal{B}_r} d^3r (\nabla^2 + k^2) \tilde{G}(r, \omega, t') = - \int_{\mathcal{B}_r} d^3x \delta^3(\mathbf{r}) e^{i\omega t'} = -e^{i\omega t'}$$

où \mathcal{B}_r est une boule de rayon r centrée en $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Pour trouver la valeur des constantes, on doit donc calculer des intégrales de la forme :

$$\int_{\mathcal{B}_r} d^3x (\nabla^2 + k^2) \left(\frac{1}{r} e^{ikr} \right)$$

Cependant, à $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, cette expression est singulière. Afin de passer outre ce problème, l'idée est de considérer :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{B}_r} d^3x (\nabla^2 + k^2) \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + \varepsilon^2}} e^{ik\sqrt{r^2 + \varepsilon^2}} \right)$$

En développant, on obtient :

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{B}_r} d^3x \left\{ \left(\nabla^2 \frac{1}{\sqrt{r^2 + \varepsilon^2}} \right) e^{ik\sqrt{r^2 + \varepsilon^2}} + 2 \left(\nabla \frac{1}{\sqrt{r^2 + \varepsilon^2}} \right) \cdot \left(\nabla e^{ik\sqrt{r^2 + \varepsilon^2}} \right) + \frac{\nabla^2 + k^2}{\sqrt{r^2 + \varepsilon^2}} e^{ik\sqrt{r^2 + \varepsilon^2}} \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{B}_r} d^3x \left\{ -4\pi \delta_{\varepsilon}^3(\mathbf{r}) + \left[\frac{3ik\varepsilon^2}{(r^2 + \varepsilon^2)^2} + \frac{k^2\varepsilon^2}{(r^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \right] \right\} e^{ik\sqrt{r^2 + \varepsilon^2}} \end{aligned}$$

Où on a utilisé la définition de la fonction de Green statique dans le premier terme. On peut montrer que l'intégrale du terme entre crochets est nul lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Pour s'en convaincre, on considère le second terme :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{B}_R} d^3\mathbf{r} \frac{\varepsilon^2}{(r^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} &= 4\pi \int_0^R dr \frac{\varepsilon^2 r^2}{(r^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \\ &= \underbrace{4\pi\varepsilon^2}_{\rightarrow 0} \underbrace{\int_0^{R/\varepsilon} dy \frac{y^2}{(y^2 + 1)^{3/2}}}_{\text{converge}}\end{aligned}$$

L'intégrale étant finie, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, tout le second terme tend vers zéro.

Une façon encore plus rapide est de prendre la boule \mathcal{B}_R avec $Rk \ll 1$ et d'intégrer. On a alors :

$$\begin{aligned}e^{ikr} &= 1 + \mathcal{O}(Rk) \rightarrow 1 \\ \int_{\mathcal{B}_R} d^3\mathbf{r} \frac{k^2}{r} &\propto (kR)^2 \rightarrow 0\end{aligned}$$

Le comportement à $R \simeq 0$ est donc :

$$\int_{\mathcal{B}_R} d^3\mathbf{r} (\nabla^2 + k^2) \frac{e^{ikr}}{r} \rightarrow \int_{\mathcal{B}_R} d^3x \nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi$$

La « morale » de ce qui a été fait est que la Dirac n'a de l'influence que lorsque que $R \rightarrow 0$, et que l'équation est réduite à l'équation de Poisson. On a ainsi :

$$(\nabla^2 + k^2) \frac{e^{\pm ikr}}{r} = -4\pi\delta^3(\mathbf{r})$$

Par ailleurs, la condition de reliaement pour $\tilde{G}(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', t')$ est donnée par :

$$-4\pi(A + B)\delta^3(\mathbf{r}) = (\nabla^2 + k^2) \tilde{G} = -\delta^3(\mathbf{r})e^{-i\omega t'} \quad \text{à } r \rightarrow 0$$

D'où finalement :

$$A + B = \frac{1}{4\pi} e^{i\omega t'}$$

On peut remarquer que la condition à l'origine ne fixe pas complètement la solution. Ce n'est pas surprenant puisque G est définie à une fonction homogène près. Deux cas sont cependant distingués, et leurs fonctions de Green associées sont finalement retrouvées en prenant la transformée de Fourier inverse :

1. *Fonction de Green retardée* $G = G_R$, où l'on a :

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{4\pi} e^{i\omega t'} \\ B &= 0\end{aligned}$$

On a donc :

$$G_R = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{r} e^{-i\omega(t-t') + i\frac{\omega}{c}r} = \frac{\delta(t-t' - \frac{r}{c})}{4\pi r} \quad (2.36)$$

La fonction de Green retardée est non nulle que lorsque $t - t' = r/c > 0$, d'où son nom. Pour les positions, la fonction G_R est une fonction de Dirac localisée sur la surface sphérique $r = c(t - t')$ se propageant à vitesse c . Le fait qu'elle corresponde à l'*expansion* d'une onde sphérique est associée à la présence du facteur $+i\frac{\omega}{c}r$ dans l'exponentielle.

2. *Fonction de green avancée* $G = G_A$:

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= \frac{1}{4\pi} e^{i\omega t'} \end{aligned}$$

On a donc :

$$G_A = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{r} e^{-i\omega(t-t') - i\frac{\omega}{c}r} = \frac{\delta(t-t' + \frac{r}{c})}{4\pi r} \quad (2.37)$$

La fonction de Green avancée est non nulle que lorsque $t - t' = -r/c < 0$, d'où son nom. Pour les positions, la fonction G_R est une fonction de Dirac localisée sur la surface sphérique $r = c(t-t')$ se propageant à vitesse c . Le fait qu'elle corresponde à la *contraction* d'une onde sphérique est associée à la présence du facteur $-i\frac{\omega}{c}r$ dans l'exponentielle.

2.5.1 Fonctions de Green et analyse complexe

On revient maintenant au problème de résoudre l'équation de d'Alembert d'une manière plus directe grâce à l'analyse complexe. On repart de la définition de la fonction de Green dans le cas dynamique

$$\square_{(\mathbf{x},t)} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') \quad (2.38)$$

Cette équation est symétrique sous translation temporelle et spatiale, ce qui fait qu'il est consistant de chercher des solutions dépendant uniquement de :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{x} - \mathbf{x}' \\ T &= t - t' \end{aligned}$$

L'équation à résoudre est par conséquent :

$$\square_{(\mathbf{R},T)} G(\mathbf{R}, T) = \delta^3(\mathbf{R}) \delta(T) \quad (2.39)$$

En passant dans l'espace de Fourier⁵, l'équation (2.39), on a :

$$\begin{aligned} G(\mathbf{R}, T) &= \int \frac{d^3x d\omega}{(2\pi)^4} \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\omega T + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} \\ \Leftrightarrow \square G(\mathbf{R}, T) &= \int \frac{d^3x d\omega}{(2\pi)^4} \left(-(i\mathbf{k})^2 + \left(\frac{i\omega}{c}\right)^2 \right) \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\omega T + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} \end{aligned}$$

De plus, en utilisant la représentation intégrale de la δ de Dirac :

$$\delta^4(\mathbf{R}, T) = \int \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^4} e^{-i\omega T + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}$$

On trouve finalement que résoudre l'équation (2.39) est équivalent à trouver la solution de :

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) = 1 \quad (2.40)$$

5. Pour les conventions sur les transformées de Fourier spatio-temporelles, voir les rappels sur la transformée de Fourier, section 1.3.2

En prenant la transformée de Fourier inverse, on retombe sur :

$$G(\mathbf{R}, T) = \int \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i\omega T + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (2.41)$$

Cette intégrale a des singularités en $\omega = \pm c|\mathbf{k}|$. Pour lui donner du sens, on doit choisir une prescription pour *éviter* les singularités. En remarquant que l'intégrant est une fonction holomorphe de (ω, \mathbf{k}) avec des pôles simples, on va pouvoir utiliser le théorème des résidus pour donner une expression de l'intégrale (un bref rappel du théorème des résidus est donné à la section 1.3.3).

En effet, la présence de l'exponentielle implique que la fonction étendue aux nombres complexes va être nulle à l'infini dans la partie inférieure *ou* supérieure du plan complexe. Les singularités se trouvant sur l'axe réel, l'idée est de les décaler au-dessus ou au-dessous de celui-ci, et trouver un contour tel que l'intégrale sur le contour est égale à la transformée de Fourier, ce qui revient à trouver dans quelle partie du plan complexe la fonction est nulle. Il existe plusieurs options de contours, donnés à la figure 2.3.

Contour retardé : On peut distinguer deux cas :

$T < 0$: La fonction de Green est donnée par :

$$G(\mathbf{R}, T) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_{\gamma_R} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega T + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

L'exponentielle temporelle donne $-i\omega T = -i(\mathcal{R}(\omega) + i\mathcal{I}(\omega))T$. L'intégrant est donc exponentiellement supprimé dans la partie supérieure du plan complexe. En utilisant γ_R , et en fermant le contour par la partie supérieure du plan complexe (contour γ_R^+), il n'y a aucune singularité. Par le théorème de Cauchy :

$$G_R(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') = 0 \quad \text{si } t - t' < 0$$

$T > 0$: Dans ce cas-ci, l'exponentielle croît rapidement dans la partie supérieure du plan complexe, et décroît rapidement dans la partie inférieure. On ferme donc γ_R par la partie inférieure du plan complexe. Cette fois, les résidus sont présents à l'intérieur du contour. Pour évaluer l'intégrale, on utilise le théorème des résidus (1.5) :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega T}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} &= \oint_{\gamma_R^-} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega T}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \\ &= -\frac{2\pi i}{2\pi} \sum \text{Res} \left(\frac{e^{-i\omega T}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \right) \\ &= ic^2 \left(\frac{e^{-ic|\mathbf{k}|T}}{2c|k|} - \frac{e^{ic|\mathbf{k}|T}}{2c|k|} \right) \\ &= \frac{ic}{2|\mathbf{k}|} \left(e^{-ic|\mathbf{k}|T} - e^{ic|\mathbf{k}|T} \right) \end{aligned}$$

où γ_R^- est le contour fermé passant dans la partie inférieure du point complexe (voir la figure). En réintroduisant cette expression dans l'expression de la fonction de Green (2.41), on trouve pour chaque terme :

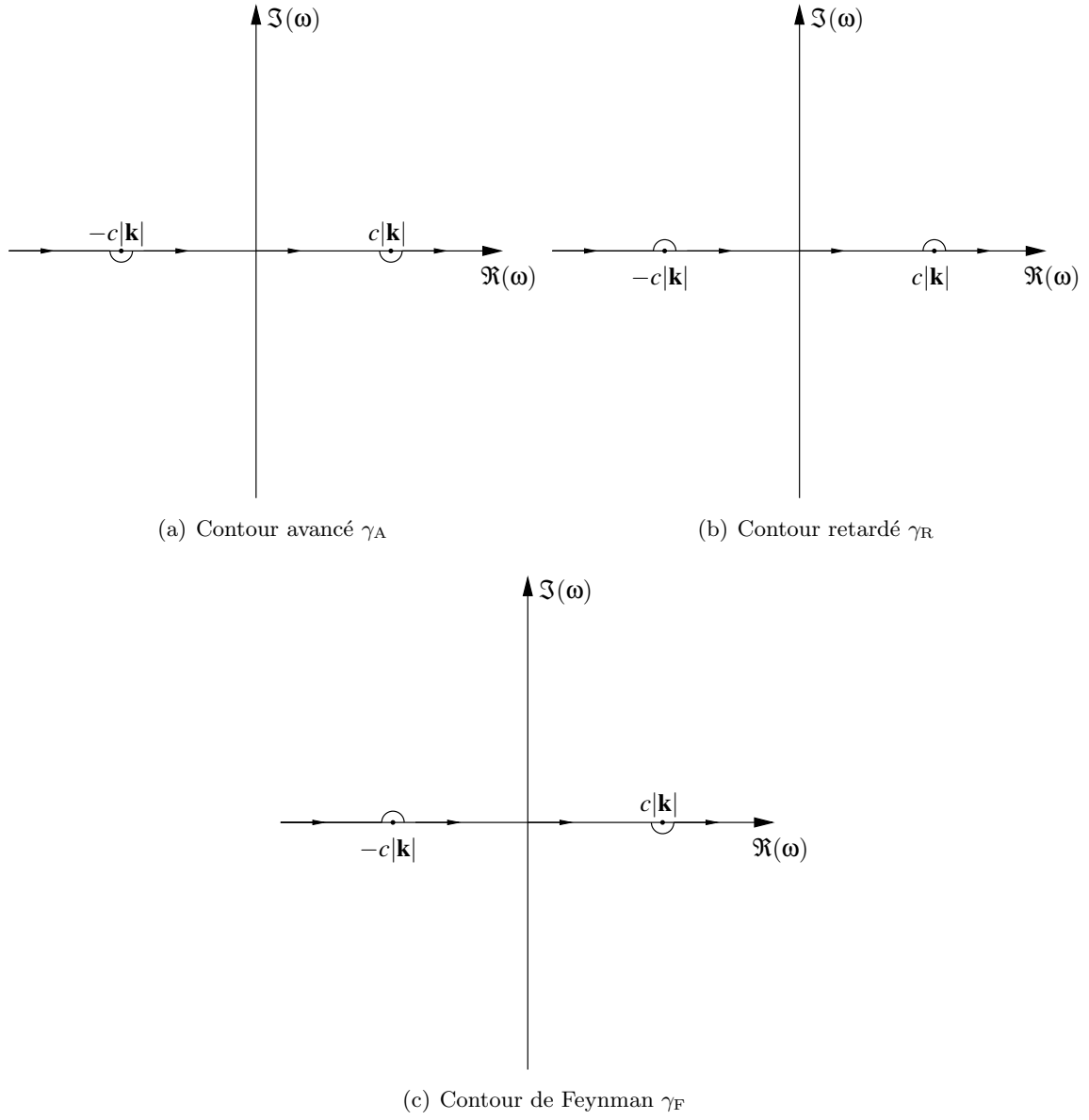


FIGURE 2.3 – Contours d'intégration dans le plan complexe. La fermeture de la boucle se fait en fonction du signe de T .

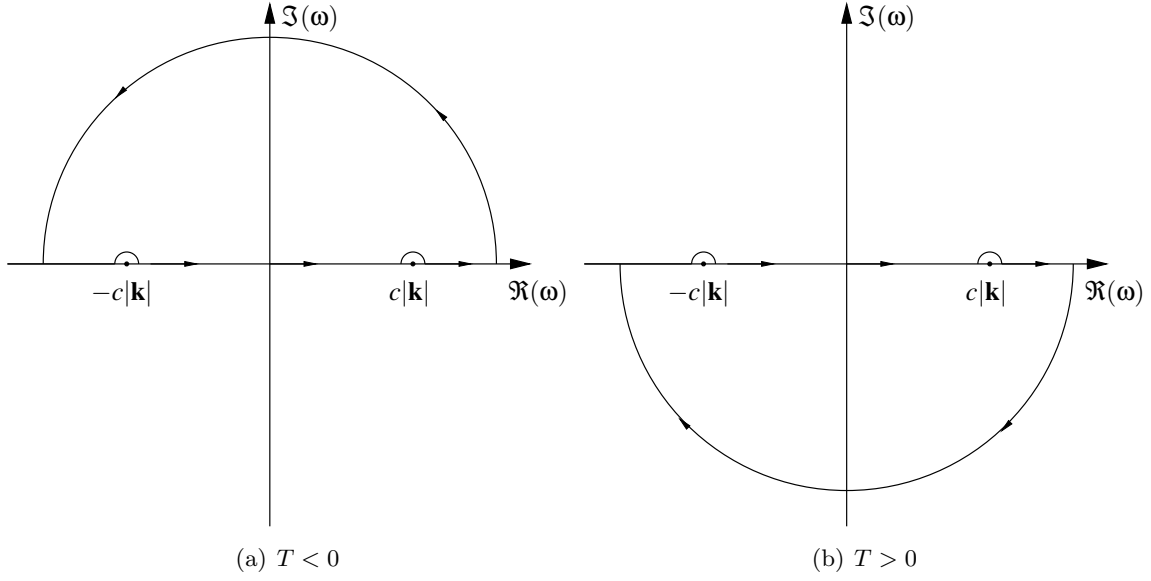


FIGURE 2.4 – Contours d'intégration dans le plan complexe en fonction de la valeur de T .

$$\begin{aligned}
 \int d^3k \frac{1}{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} \pm i k T} &= 2\pi \int_{-1}^1 d\cos(\theta) \int_0^\infty dk k e^{i k |\mathbf{R}| \cos(\theta) \pm i k T} \\
 &= \frac{2\pi}{i|\mathbf{R}|} \int_0^\infty dk e^{i k T} \left(e^{i k |\mathbf{R}|} - e^{-i k |\mathbf{R}|} \right)
 \end{aligned}$$

En réinjectant ce résultat dans l'équation (2.41), on a :

$$\begin{aligned}
 &\frac{c}{2|\mathbf{R}|} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} \left(e^{-i k T} - e^{i k T} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{c}{2|\mathbf{R}|} \int_0^\infty dk \left(e^{-i k \left(T - \frac{|\mathbf{R}|}{c} \right)} + e^{i k \left(T - \frac{|\mathbf{R}|}{c} \right)} - e^{-i k \left(T + \frac{|\mathbf{R}|}{c} \right)} - e^{i k \left(T + \frac{|\mathbf{R}|}{c} \right)} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{c}{2|\mathbf{R}|} \int_{-\infty}^\infty dk \left(e^{-i k \left(T - \frac{|\mathbf{R}|}{c} \right)} - e^{-i k \left(T + \frac{|\mathbf{R}|}{c} \right)} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\pi}{|\mathbf{R}|} \left(\delta\left(T - \frac{|\mathbf{R}|}{c}\right) - \delta\left(T + \frac{|\mathbf{R}|}{c}\right) \right)
 \end{aligned}$$

Par hypothèse, $T > 0$, ce que fait que la seconde δ de Dirac est nulle et on obtient bien, en remplaçant les valeurs de \mathbf{R}, T :

$$G_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)$$

Par des calculs similaires, on retrouve également le même résultat pour la fonction de Green avancée :

$$G_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t - t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)$$

2.5.2 Solutions de l'équation de D'Alembert

Maintenant que l'on connaît l'expression de $G_{A,R}$, on peut trouver les solutions de l'équation de D'Alembert avec des sources. En reprenant l'expression obtenue à l'équation (2.33), on a :

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' dt' G_R(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \frac{\rho(\mathbf{x}', t')}{\varepsilon_0} \quad (2.42)$$

$$= \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}', t' = t - \frac{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|}{c})}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \quad (2.43)$$

On peut noter que Φ à un temps donné t dépend de la densité de charges à un temps antérieur $t' = t - |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|/c$. On a donc un effet *retardé*. Le retard $\Delta t = t - t' = |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|/c$ correspond au temps qu'il faut pour parcourir la distance entre \mathbf{x} à \mathbf{x}' à la vitesse de la lumière (voir figure 2.5).

Pour le potentiel vecteur, on trouve de la même manière :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t' = t - \frac{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|}{c})}{4\pi c^2 \varepsilon_0 |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|}$$

En utilisant la fonction de Green avancée G_A , on a un renversement du temps, comme si on rembobinait un film. La solution à un temps t et une position \mathbf{x} correspond à l'état des sources à un temps $t' = t + |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|/c$.

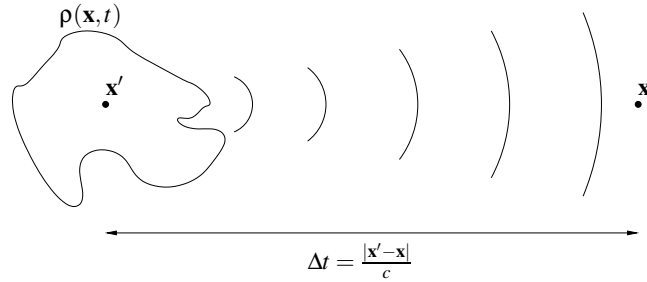


FIGURE 2.5 – Propagation du changement de la densité de charge pendant l'intervalle de temps $\Delta t = \frac{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|}{c}$

Chapitre 3

Ondes planes

En utilisant les fonctions de Green avancée et retardée, on peut maintenant écrire les solutions particulières des équations de Maxwell.

La solution générale avec terme de source est obtenue en ajoutant la solution générale de l'équation homogène. On a ainsi :

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}, t) &= \int d^3x' \frac{\rho\left(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} + \Phi_0 \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \int d^3x' \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0c^2|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} + \mathbf{A}_0\end{aligned}$$

Où Φ_0, \mathbf{A}_0 satisfont tous deux l'équation homogène dans la jauge de Lorenz :

$$\begin{aligned}\square\Phi_0 &= 0 \\ \square\mathbf{A}_0 &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{A}_0 &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial\Phi_0}{\partial t}\end{aligned}$$

3.1 Solutions dans le vide

On rappelle maintenant les solutions des équations de Maxwell dans le vide. On est amené à résoudre des équations différentielles du type :

$$\square f(\mathbf{x}, t) = 0 \tag{3.1}$$

En passant dans l'espace de Fourier¹ :

$$f(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^4} \tilde{f}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

L'équation (3.1) devient alors :

$$\square f(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^4} \left(\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{f}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = 0$$

1. On remarque que le fait que $f(\mathbf{x}, t)$ soit réelle implique la relation $\tilde{f}(\mathbf{k}, \omega) = \tilde{f}^*(-\mathbf{k}, -\omega)$.

qui implique que $\tilde{f}(\mathbf{k}, \omega)$ est une « fonction » avec support sur l'hyperboloïde² $\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$, ou plus formellement, que $\tilde{f}(\mathbf{k}, \omega)$ est proportionnelle à une δ de Dirac :

$$\tilde{f}(\mathbf{k}, \omega) = \delta\left(\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) g(\omega, k) \quad (3.2)$$

En intégrant sur ω et en définissant $\omega_k = c|\mathbf{k}| > 0$, la solution générale peut donc s'écrire³

$$f(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\hat{f}(\mathbf{k}) e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \hat{f}^*(\mathbf{k}) e^{i\omega_k t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \quad (3.3)$$

La présence du deuxième terme entre parenthèses – le complexe conjugué (c.c.) – assure que $f(\mathbf{x}, t)$ est une fonction réelle. On peut donc voir que la solution générale est une superposition d'ondes planes

$$\hat{f}_k(\mathbf{x}, t) = \hat{f}(\mathbf{k}) e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \text{c.c.}$$

Les crêtes d'onde se trouvent sur le plan $\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \text{const.}$. En considérant la variation $\Delta(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = \omega_k \Delta t - \mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{x} = 0$, on en déduit la vitesse de phase

$$v_{\text{phase}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega_k}{|\mathbf{k}|} = c$$

En utilisant dorénavant la définition $\varphi \equiv \omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$, une onde plane électromagnétique s'écrit donc :

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \hat{\Phi}(\mathbf{k}) e^{-i\varphi} + \text{c.c.} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}) e^{-i\varphi} + \text{c.c.} \quad (3.5)$$

Ces solutions sont valides uniquement dans le cas où les potentiels satisfont la jauge de Lorentz. Cette dernière se réécrit :

$$0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = \left(-i \frac{\omega_k}{c^2} \hat{\Phi} + i \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{A}} \right) e^{-i\varphi} + \text{c.c.} \quad (3.6)$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Phi} = \frac{c^2}{\omega_k} \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{A}} = \frac{c \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{A}}}{|\mathbf{k}|} \quad (3.7)$$

La solution la plus générale des équations de Maxwell dans le vide ($\rho = J = 0$) s'écrit donc comme la plus générale superposition linéaire d'ondes planes (3.4) et (3.5), satisfaisant la condition (3.7).

Regardons maintenant les champs électriques et magnétiques. En reprenant l'expression des champs en fonction des potentiels (équations (2.10)), on peut trouver :

– Pour le champ électrique :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ &= \left(-i \mathbf{k} \hat{\Phi} + i \omega_k \hat{\mathbf{A}} \right) e^{-i\varphi} + \text{c.c.} \end{aligned}$$

2. Cette hyperboloïde est formée de deux branches déconnectées $\omega = \pm c|\mathbf{k}|$.

3. L'intégrale sur ω grâce à la δ donne deux contributions : une à $\omega = +c|\mathbf{k}|$ et l'autre à $\omega = -c|\mathbf{k}|$, qui correspondent respectivement au premier et au deuxième terme entre parenthèses de l'équation (3.3). Selon l'équation 3.2, on trouve aussi $\hat{f}(\mathbf{k}) = \tilde{f}(\omega_k, \mathbf{k})/4\pi\omega_k$ et $\hat{f}(\mathbf{k})^* = \tilde{f}(-\omega_k, -\mathbf{k})/4\pi\omega_k$.

En utilisant la condition de Lorenz, on trouve pour chaque composante :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_\alpha &= ic|\mathbf{k}| \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{\mathbf{k}^2} \right) \hat{\mathbf{A}}_\beta e^{-i\varphi} + \text{c.c.} \\
&= ic|\mathbf{k}| \left(P_\perp \hat{\mathbf{A}} \right)_\alpha e^{-i\varphi} + \text{c.c.} \\
&\equiv ic|\mathbf{k}| (\hat{\mathbf{A}}_\perp)_\alpha e^{-i\varphi} + \text{c.c.} \\
&\equiv \hat{\mathbf{E}}_\alpha e^{-i\varphi} + \text{c.c.}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

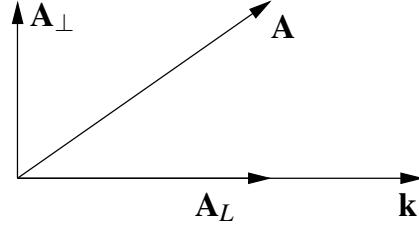


FIGURE 3.1 – Décomposition du vecteur \mathbf{A} en parties perpendiculaire et longitudinale sur le vecteur \mathbf{k} .

Où on a utilisé la convention d'Einstein (somme sur les indices répétés) et le projecteur sur le plan perpendiculaire à \mathbf{k} :

$$(P_\perp)_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{\mathbf{k}^2}$$

– Pour le champ magnétique :

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$$

On a donc encore un resultat de la forme :

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}} e^{-i\varphi} + \text{c.c.} \tag{3.9}$$

ou, en composantes,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{B}}_\alpha &= i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} k_\beta \hat{\mathbf{A}}_\gamma \\
&= i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} k_\beta \left((\hat{\mathbf{A}}_L)_\gamma + (\hat{\mathbf{A}}_\perp)_\gamma \right) \\
&= i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} k_\beta (\hat{\mathbf{A}}_\perp)_\gamma
\end{aligned} \tag{3.10}$$

La partie longitudinale tombe, car par définition elle est parallèle à \mathbf{k} .

Les champs physiques, (3.8) et (3.10), sont donc spécifiés par un 2-vecteur complexe $\hat{\mathbf{A}}_\perp$ dans le plan perpendiculaire au vecteur \mathbf{k} . On indique en général $\hat{\mathbf{A}}_\perp$ par le *vecteur de polarisation* $\boldsymbol{\varepsilon}$. On peut également noter que (3.8) et (3.10) impliquent :

$$\begin{cases} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \mathbf{n} \wedge \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} &= 0 \end{cases} \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$$

3.2 Valeurs Moyennes

On peut maintenant calculer les valeurs moyennes :

- Pour le champ électrique, on a :

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle = \left\langle \left(\hat{\mathbf{E}} e^{-i\varphi} + \hat{\mathbf{E}}^* e^{i\varphi} \right)^2 \right\rangle = 2\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}}^*$$

- Pour le champ magnétique, on trouve de manière similaire :

$$\langle \mathbf{B}^2 \rangle = \left\langle \left(\hat{\mathbf{B}} e^{-i\varphi} + \hat{\mathbf{B}}^* e^{i\varphi} \right)^2 \right\rangle = 2\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}^* = \frac{1}{c^2} \langle \mathbf{E}^2 \rangle$$

- Pour le produit scalaire des champs électrique et magnétique, il n'est même pas nécessaire de calculer la moyenne, car le produit est nul :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} &= \left\langle \left(\hat{\mathbf{E}} e^{-i\varphi} + \hat{\mathbf{E}}^* e^{i\varphi} \right) \left(\hat{\mathbf{B}} e^{-i\varphi} + \hat{\mathbf{B}}^* e^{i\varphi} \right) \right\rangle \\ &= \hat{\mathbf{E}}^* \cdot \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{B}}^* \\ &= \frac{1}{c} \left(\hat{\mathbf{E}}^* \cdot \mathbf{n} \wedge \hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n} \wedge \hat{\mathbf{E}}^* \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

par les propriétés du produit mixte.

- Dans le cas de la densité d'énergie, définie par

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2) \quad \frac{1}{\mu_0} = \varepsilon_0 c^2$$

on a :

$$\langle u \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2) = \varepsilon_0 \langle \mathbf{E}^2 \rangle = 2\varepsilon_0 \hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}}^*$$

- Pour le flux d'énergie $\mathbf{S} = \mathbf{E} \wedge \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$:

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= \varepsilon_0 c^2 \left(\hat{\mathbf{E}} e^{-i\varphi} + \hat{\mathbf{E}}^* e^{i\varphi} \right) \wedge \left(\hat{\mathbf{B}} e^{-i\varphi} + \hat{\mathbf{B}}^* e^{i\varphi} \right) \\ &= \varepsilon_0 c^2 \left(\hat{\mathbf{E}} \wedge \hat{\mathbf{B}}^* + \hat{\mathbf{E}}^* \wedge \hat{\mathbf{B}} \right) \\ &= \varepsilon_0 c^2 \left(\hat{\mathbf{E}} \wedge \left(\frac{1}{c} \mathbf{n} \wedge \hat{\mathbf{E}}^* \right) + \frac{1}{c} \hat{\mathbf{E}}^* \wedge \left(\mathbf{n} \wedge \hat{\mathbf{E}} \right) \right) \\ &= 2\varepsilon_0 c \mathbf{n} \left(\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}}^* \right) \\ &= \langle u \rangle c \mathbf{n} = \langle u \rangle \mathbf{v} \end{aligned}$$

Avec \mathbf{v} la vitesse de l'onde.

Chapitre 4

Les potentiels de Liénard-Wiechert

On considère à présent le cas d'une particule de charge q se déplaçant dans le vide avec une trajectoire $\mathbf{x}_0(t)$ et, donc, vitesse $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}_0(t)$. La densité de charge et le courant associés sont :

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{x}', t) &= q\delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0(t)) \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}', t) &= q\mathbf{v}(t)\delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0(t)) \end{cases} \quad (4.1)$$

On peut vérifier qu'ainsi définis, la densité de charge et le courant satisfont l'équation de continuité (2.7). On a :

$$\begin{cases} \dot{\rho}(\mathbf{x}', t) &= q\nabla_{\mathbf{x}'}\delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0(t)) \cdot (-\mathbf{v}) \\ \frac{\partial}{\partial x'_i}\mathbf{J}_i(\mathbf{x}', t) &= q\mathbf{v}_i(t)\frac{\partial}{\partial x'_i}\delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0(t)) \end{cases}$$

On retombe bien sur :

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

4.1 Calculs des potentiels

On peut à présent calculer les potentiels associés à ces sources. Il existe deux manières équivalentes d'y parvenir.

4.1.1 Intégration temporelle

Dans le cas du potentiel scalaire, on commence par le cas où l'on intègre d'abord la partie temporelle de l'intégrale (2.42) :

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \Big|_{t'=t-|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|/c} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0(t'))}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \Big|_{t'=t-|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|/c} \end{aligned}$$

On ne peut pas utiliser directement la δ de Dirac pour intégrer en \mathbf{x}' , car $\mathbf{x}_0(t')$ dépend aussi de \mathbf{x}' via $t' = t'(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t)$. En utilisant l'expression de la δ de Dirac pour une fonction arbitraire (équation (2.19)), l'intégrale s'écrit

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|} \left| \det \left(\frac{\partial(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0(t'))}{\partial \mathbf{x}'} \right) \right|^{-1}$$

ou t' est défini par l'équation implicite

$$t' = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|}{c} \quad (4.2)$$

Afin de trouver le déterminant, on commence d'abord par évaluer la dérivée composante par composante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x'^i - x_0^i)}{\partial x'^j} &= \delta_j^i - \frac{\partial x_0^i}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x'^j} \\ &= \delta_j^i + \frac{v^i}{c} \frac{x'^j - x_0^j}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0|} \\ &\equiv \mathbf{1} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \otimes \mathbf{n} \end{aligned}$$

Le déterminant est donc une fonction scalaire de la vitesse et du vecteur normal :

$$\det(\mathbf{1} - \mathbf{v} \otimes \boldsymbol{\omega}) = f(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega})$$

De plus, on peut toujours travailler dans une base telle que $\mathbf{v} = (0, 0, v_3)$, ainsi :

$$\det\left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{v}}{c} \otimes \mathbf{n}\right) = 1 - \frac{v_3 n_3}{c} \equiv 1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c}$$

En définissant $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$, on trouve que le potentiel scalaire est finalement :

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|} \frac{1}{|1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}|}$$

On peut procéder dans la même façon pour le potentiel vecteur.

4.1.2 Intégration spatiale

On peut également retrouver le même résultat en commençant par une intégration spatiale. En reprenant l'expression du potentiel et de la fonction de Green dynamique :

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' dt' \frac{\rho(\mathbf{x}', t') \delta(t - t' - |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|/c)}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' dt' \frac{\delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0(t')) \delta(t - t' - |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|/c)}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \end{aligned}$$

L'intégration sur d^3x' est triviale :

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}$$

A nouveau, on ne peut pas intégrer directement la delta de Dirac, car on a $\delta(f(t'))$. En réutilisant l'expression de la Dirac pour une fonction arbitraire (équation (2.19)), on doit trouver les zéros de $f(t')$. En définissant $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0(t')) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')$:

$$f(t') = t - t' - \frac{|\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0(t'))|}{c}$$

$$\frac{df}{dt'} = -1 + \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} \cdot \frac{d\mathbf{x}_0}{dt'} \frac{1}{c} = -1 + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}(t')}{c}$$

On note que si $|\mathbf{v}/c| < 1$, $\frac{df}{dt'} < 0$. Ainsi, f est une fonction monotone en t' , et n'admet ainsi qu'un unique zéro t'_* . D'autre part, on peut également noter que dans un milieu pour lequel la vitesse de propagation de la lumière est $c' < c$, on peut imaginer une particule allant à vitesse $v > c'$. Dans ce cas, la fonction $f(t')$ admettra des solutions multiples (voir figure 4.1). Ces solutions conduiront à la radiation Cherenkov.

Une autre manière de s'en convaincre est de considérer le cône de lumière (figure 4.2). $t - t'$ est le temps qu'il faut pour recevoir le signal. Si la particule va moins vite que la vitesse de la lumière, en tout temps, la tangente à sa trajectoire est contenue dans le cône. Cela implique qu'il n'existe qu'un seul endroit où la particule appartient au cône, le signal reçu correspond à un et un seul événement (un seul t'_*). $f(t')$ est bien monotone. Si la particule traverse plusieurs fois le bord du cône (trajectoire traitillée), Elle va plus vite que la vitesse de la lumière, et un signal pourrait provenir de plusieurs événements. Il existerait plusieurs t'_* , et $f(t')$ ne serait pas monotone.

En utilisant (2.19) pour l'intégrale sur t' , on obtient donc :

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|} \frac{1}{|1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}(t')/c|}$$

où t' est défini par $f(t') = t - t' - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|/c = 0$ (pour simplifier la notation, on a indiqué t'_* simplement avec t'), donc par

$$t' = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|}{c} = t - \frac{R(\mathbf{x}, t')}{c}. \quad (4.3)$$

De manière similaire, on trouve pour le champ vectoriel :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{v}(t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')|} \frac{1}{|1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}(t')/c|}$$

On retrouve bien les résultats obtenus à la section 4.1.1.

4.2 Des potentiels de Liénard-Wiechert aux champs

Maintenant que l'on a trouvé les potentiels, on peut en dériver la valeur des champs électrique et magnétique. En partant des potentiels :

$$\begin{cases} \Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}|} \\ \mathbf{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\boldsymbol{\beta}}{|\mathbf{R} - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}|} \end{cases} \quad (4.4)$$

Avec la notation de Landau-Lifschitz :

$$t' = t - \frac{R}{c} \quad \mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t'), \quad R = |\mathbf{R}|$$

Les potentiels ont une dépendance implicite de \mathbf{x} et t via $R(t'(\mathbf{x}, t))$ et $\mathbf{v}(t'(\mathbf{x}, t))$. Pour trouver le champs, on doit donc calculer la dérivée de ces quantités.

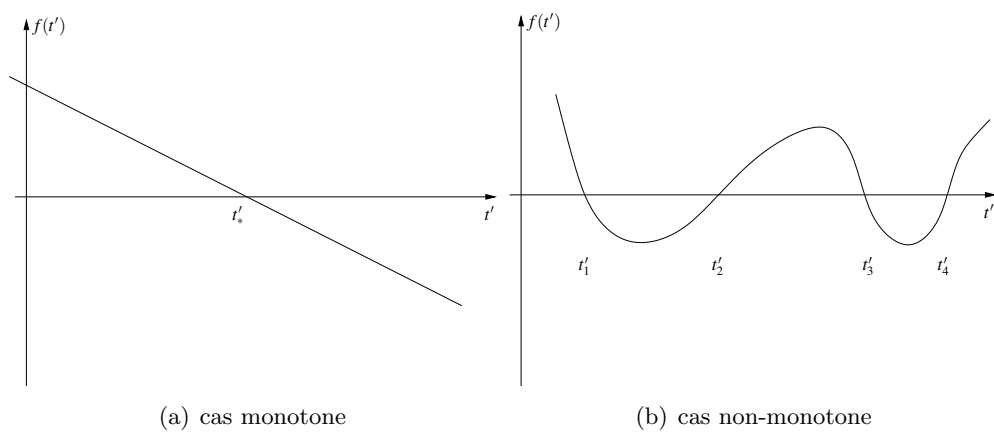


FIGURE 4.1 – Exemples de fonctions monotone et non monotone. Dans le cas non monotone, pour une valeur de t_1 donnée, il y a plusieurs valeurs possibles pour t' , donc pas de correspondance un à un.

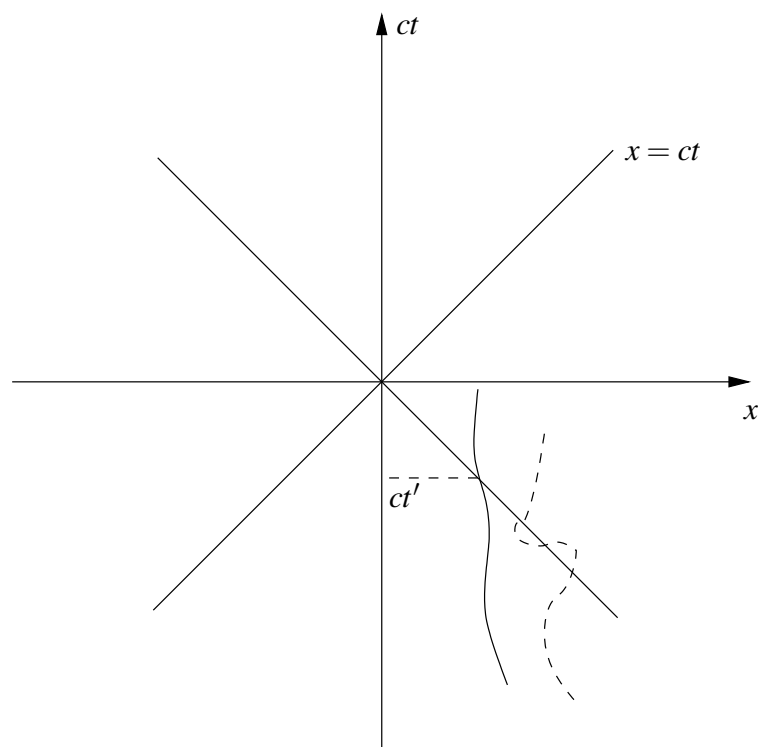


FIGURE 4.2 – Cône de lumière d'une particule. $t - t'$ est le temps qu'il faut pour recevoir le signal. Si la trajectoire croise plusieurs fois le cône de lumière, $f(t')$ n'est pas monotone.

En dérivant (4.3), on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial t'}{\partial t} &= 1 - \frac{1}{c} \nabla_{x_0} R \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} \\
&= 1 + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R} \frac{\partial t'}{\partial t} \\
&= 1 + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \frac{\partial t'}{\partial t}
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}} \quad (4.5)$$

D'une façon similaire on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial t'}{\partial x^i} &= \partial^i t' = -\frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial x^i} \\
&= -\frac{1}{c} \frac{R^j}{R} (\delta^{ij} - v^j \partial_i t') \\
&= -\frac{1}{c} (n^i - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \partial^i t')
\end{aligned}$$

d'où on obtient

$$\nabla t' = -\frac{1}{c} \frac{\mathbf{n}}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}}, \quad (4.6)$$

En plus on a

$$\nabla R = \nabla(t - t')c = \frac{\mathbf{n}}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} \quad (4.7)$$

$$\partial_t R = \partial_t(t - t')c = \left(1 - \frac{1}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}}\right) = \frac{-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} c}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} \quad (4.8)$$

$$\partial_i R^j = \partial_i(x^j - x_0^j) = \delta_i^j + \frac{n^i \beta^j}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} \quad (4.9)$$

$$\partial_t R^j = -\frac{\partial x_0^j}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{v^j}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} \quad (4.10)$$

En utilisant les résultats au dessus on peut maintenant dériver les champs en dérivant (4.4)
Le champ électrique est

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Pour le gradient du potentiel scalaire, en partant de l'équation (4.4) :

$$\begin{aligned}
-\nabla \Phi &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-1}{|R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}|^2} \left(\frac{\mathbf{n}}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}} - \left(\boldsymbol{\beta} + \frac{\boldsymbol{\beta}^2 \mathbf{n}}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}} \right) + \mathbf{R} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} \frac{\mathbf{n}}{c(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})} \right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \frac{1}{|1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}|^3} \left(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}) - \boldsymbol{\beta}^2 \mathbf{n} + \frac{\mathbf{R} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}}{c} \mathbf{n} \right)
\end{aligned}$$

De manière similaire, pour la dérivée temporelle du champ vectoriel :

$$-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\boldsymbol{\beta}}{c} \frac{1}{R^2} \frac{1}{|1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}|^3} \left(\beta^2 c - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} c - \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{R} \right) - \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{c} \frac{1}{R} \frac{1}{|1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}|^2} \right]$$

En remettant les deux expressions ensemble :

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \frac{1}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \cdot \left[\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta} (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}) - \beta^2 \mathbf{n} + \frac{R\mathbf{n}}{c} (\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{n}) + \left(\beta^2 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} - (\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{n}) \frac{R}{c} \right) - \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}} R}{c} (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}) \right]$$

En développant quelque peu le terme entre crochet, on trouve :

$$[\dots] = (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) (1 - \beta^2) + \frac{R}{c} \left((\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) - (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}) \dot{\boldsymbol{\beta}} \right)$$

En utilisant $\mathbf{n}^2 = 1$ et l'identité vectorielle

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$$

le terme proportionnel à R/c se réécrit :

$$(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) - \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{n} \wedge \left((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}} \right)$$

Au final le champ électrique est décrit par l'équation

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \frac{1}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \left((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) (1 - \beta^2) + \frac{R}{c} \mathbf{n} \wedge \left((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right) \quad (4.11)$$

En utilisant un procédé similaire, on peut faire les calculs pour le champ magnétique et trouver :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{n} \wedge \mathbf{E} \quad (4.12)$$

On peut noter que toutes les quantités décrivant la trajectoire de la particule apparaissant dans ces expressions sont calculées au temps t' (défini par (4.2)), e.g : $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t')$.

Les champs, en particulier \mathbf{E} , contiennent 2 termes distincts :

1. Le premier terme (proportionnel à $(1 - \beta^2)$) dépend uniquement de $\boldsymbol{\beta}$ et pas de ses dérivées, et décroît en R^{-2} à l'infini. Ce champ est de nature « coulombienne », mais est « déformé » par le mouvement de la particule. De plus, les déformations sont contrôlées par $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ et sont donc négligeables pour des sources qui se meuvent à des vitesses beaucoup plus faible que la vitesse de la lumière. On va voir plus tard que ces déformations sont élégamment interprétées comme dues à une contraction de Lorentz.
2. Le second terme, proportionnel à $\dot{\boldsymbol{\beta}}$, décroît à l'infini en R^{-1} . On va voir plus loin qu'un tel terme est associé aux ondes électromagnétiques émises par une particule accélérée. De plus, les termes proportionnels à $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ dominent \mathbf{E} et \mathbf{B} à grandes distances.

4.3 Radiation d'une particule en mouvement

Lorsqu'une particule est en mouvement, elle émet un rayonnement électromagnétique. Le but de cette section est de comprendre ces phénomènes dans différents régimes en trouvant la variation de la puissance en fonction du temps. Cette partie est aussi dite « partie de radiation ».

4.3.1 Cas non relativiste

On cherche à présent à connaître le flux d'énergie pour des vitesses $\beta \equiv |\boldsymbol{\beta}| \ll 1$. En utilisant le fait qu'à large distance, le comportement des champs électrique et magnétique est dominé par $\dot{\boldsymbol{\beta}}$, le champ électrique se réduit à :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &\simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{Rc} \mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}}) \\ &\simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{Rc} (-\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\perp})\end{aligned}$$

Avec $\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\perp} = \dot{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})$. Le champ magnétique se réduit quant à lui à :

$$\mathbf{B} \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{Rc^2} (-\mathbf{n} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}}_{\perp})$$

Le flux d'énergie est alors donné par le vecteur de Poynting :

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} \\ &\simeq \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} |\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\perp}|^2 \frac{\mathbf{n}}{R^2}\end{aligned}$$

En utilisant la définition de $\boldsymbol{\beta}$, on obtient la *formule de Larmor pour les vitesses non relativistes* :

$$\mathbf{S} \simeq \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} |\dot{\mathbf{v}}_{\perp}|^2 \frac{\mathbf{n}}{R^2} \quad |\mathbf{v}| \ll c \quad (4.13)$$

En intégrant sur une sphère entourant la particule, on obtient la puissance totale émise par les radiations :

$$\begin{aligned}P &= \oint \mathbf{d}\sigma \cdot \mathbf{S} \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{v}}^2 \frac{R^2}{R^2} \int \sin^2 \theta d \cos \theta d\varphi \\ &= \frac{q^2 \dot{v}^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}\end{aligned}$$

4.3.2 Cas relativiste

Dans ce cas, on considère des vitesses telles que $\beta \simeq 1$. En considérant la partie en R^{-1} des champs, on a :

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{Rc} \frac{1}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \mathbf{n} \wedge ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}})$$

On est intéressé en particulier par $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$, car on devra intégrer sur une sphère pour trouver l'énergie émise par radiation. On a :

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{E} \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}) = \frac{1}{c} \left(E^2 \mathbf{n} - \underbrace{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})}_{=0} \mathbf{E} \right)$$

La projection du vecteur de Poynting est alors $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = \epsilon_0 c \mathbf{E}^2$, d'où :

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = \varepsilon_0 c \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0^2} \frac{1}{R^2 c^2} \frac{1}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^6} \left(\mathbf{n} \wedge \left((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right)^2$$

La perte d'énergie¹ par unité de temps par unité d'angle solide est donc finalement :

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega dt} = R^2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 c} \frac{\left(\mathbf{n} \wedge \left((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right)^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^6}$$

Si l'on veut savoir combien d'énergie la particule émet par radiation par unité de temps de son histoire, on doit changer dt vers dt' . On a vu à l'équation (4.5) :

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}}$$

Ce qui veut dire que vers l'avant ($\mathbf{n} = \boldsymbol{\beta}/|\boldsymbol{\beta}|$) :

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{1 - |\boldsymbol{\beta}|} > 1$$

et vers l'arrière ($\mathbf{n} = -\boldsymbol{\beta}/|\boldsymbol{\beta}|$) :

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{1 + |\boldsymbol{\beta}|} < 1$$

L'énergie émise par unité d'angle solide par unité de temps est donc :

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega dt'} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c} \frac{\left| \mathbf{n} \wedge \left((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right|^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \quad (4.14)$$

4.3.3 Mouvement rectiligne

On considère maintenant le cas particulier d'une particule se déplaçant en ligne droite. i.e : $\boldsymbol{\beta} \parallel \dot{\boldsymbol{\beta}}$. En regardant en particulier la partie en R^{-1} des champs de Liénard-Wichert (partie de radiation), on a pour le champ électrique :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{Rc} \frac{1}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \mathbf{n} \wedge \left(\mathbf{n} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c} \frac{1}{R} \frac{1}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \left((\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c} \frac{1}{R} \frac{1}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} (-\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\perp}) \end{aligned}$$

En utilisant la formule trouvée pour la perte d'énergie par unité d'angle solide par unité de temps (4.14), on a :

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{d\mathcal{E}}{d\Omega dt'} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c} \frac{\left(\dot{\beta} \sin(\theta) \right)^2}{(1 - \beta \cos(\theta))^5} \quad (4.15)$$

$$= \frac{q^2 \dot{v}^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \frac{\sin^2(\theta)}{(1 - \beta \cos(\theta))^5} \quad (4.16)$$

1. Afin de ne pas confondre avec le champ électrique l'énergie est en générale décrite par \mathcal{E} .

Remarques :

- Dans la limite $\beta \rightarrow 0$, cette équation réduit à la formule de Larmor (4.13). On a une émission dans « toutes les directions ».
- Dans le cas $\beta \rightarrow 1 \Leftrightarrow v \rightarrow c$, la radiation est émise dans la direction $\theta \sim 0$ (en avant). Ce régime correspond à un régime ultra-relativiste.

Afin de trouver la puissance totale émise P_{tot} , on intègre sur les angles solides :

$$P_{\text{tot}} = \frac{q^2 \dot{v}^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} 2\pi \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin^3(\theta)}{(1 - \beta \cos(\theta))^5}$$

En faisant le changement de variable $t = \cos(\theta)$, l'intégrale s'évalue de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dt \frac{1-t^2}{(1-\beta t)^5} &= \frac{1}{4\beta} \frac{1-t^2}{(1-\beta t)^4} \Big|_{-1}^1 + \frac{1}{2\beta} \int_{-1}^1 dt \frac{t}{(1-\beta t)^4} \\ &= \frac{1}{6\beta^2} \frac{1}{(1-\beta t)^3} \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{6\beta^2} \int_{-1}^1 dt \frac{1}{(1-\beta t)^3} \\ &= \frac{1}{6\beta^2} \left(\frac{1}{(1-\beta^2)^3} + \frac{1}{(1+\beta^2)^3} \right) - \frac{1}{12\beta^3} \frac{1}{1-\beta t} \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{4}{3} \frac{1}{(1-\beta^2)^3} \end{aligned}$$

La puissance totale émise est finalement :

$$P_{\text{tot}} = \frac{q^2 \dot{v}^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3} \gamma^6 \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (4.17)$$

Remarques :

- Lorsque $\beta \rightarrow 1 \Leftrightarrow v \rightarrow c$, la puissance émise en radiation lorsque la particule est accélérée diverge. Il est donc impossible d'accélérer une particule à une vitesse $v \geq c$. c apparaît dans l'équation (4.17) comme une vitesse limite.
- Si $\beta \rightarrow 0$, l'équation se réduit à la formule de Larmor (4.13).

Dans la limite $\beta \rightarrow 1$, il est intéressant d'étudier la distribution de la puissance émise vers l'avant ($\theta \simeq 0$).

$$\frac{dP}{d\varphi d\cos(\theta)} \simeq \underbrace{\frac{q^2 \dot{v}^2}{16\pi \varepsilon_0 c}}_A \frac{\theta^2}{(1 - \beta (1 - \frac{1}{2}\theta^2))^5} \quad (4.18)$$

De plus, lorsque $\beta \rightarrow 1$:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2(1-\beta)}} \Leftrightarrow \frac{1}{1-\beta} \simeq 2\gamma^2$$

En introduisant ce résultat dans l'équation (4.18) :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= A \frac{\theta^2}{\left(\frac{1}{2\gamma^2} + \frac{\theta^2}{2}\right)^5} = \frac{2^5 A \gamma^8 (\theta\gamma)^2}{(1 + (\theta\gamma)^2)^5} \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{q^2}{\varepsilon_0 c^3} \gamma^8 \frac{(\theta\gamma)^2}{(1 + (\theta\gamma)^2)^5} \end{aligned}$$

On peut voir que $\theta^* = 1/\gamma$ est la « bonne unité de mesure » pour θ . De plus, on a un pic d'émission à $\theta \simeq (2\gamma)$ (voir figure 4.3).

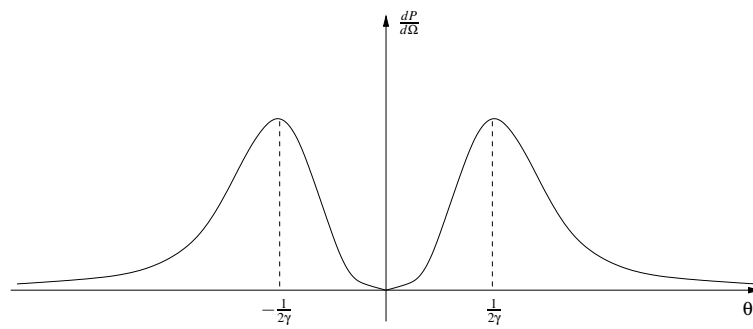


FIGURE 4.3 – Distribution angulaire de la Puissance émise par radiation d'une particule chargée accélérée linéairement

Chapitre 5

Expansion en multipôles

L'idée de l'expansion en multipôles est la suivante : Tout objet ayant une quelconque structure peut être vu comme ponctuel à une très grande distance. De même, l'interaction entre un objet de taille caractéristique L et une onde de longueur d'onde λ peut être très bien décrit en traitant l'objet de manière ponctuelle (de manière élémentaire) lorsque $L \ll \lambda$ (voir figure 5.1).

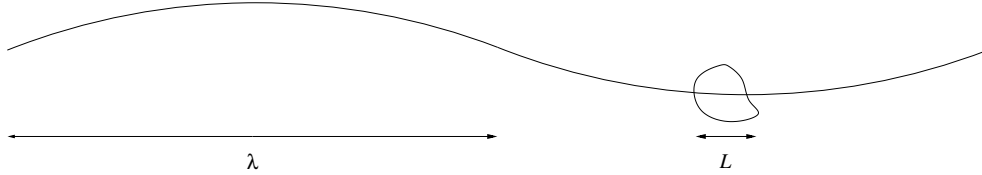


FIGURE 5.1 – Principe de l'expansion en multipôles. On considère l'objet de manière ponctuelle lorsque $L \ll \lambda$.

L'expansion en multipôle est une réalisation systématique et *quantitative* de l'idée *qualitative* ci-dessus.

5.1 Cas électrostatique

On commence par le cas le plus simple, c'est à dire le cas de l'électrostatique. On considère un objet ayant une densité de charge ρ . Un observateur se place dans un point \mathbf{x} et considère le champs électrique (il regarde l'objet à travers le champ électrique qu'il génère). On a déjà trouvé au chapitre 2 que le potentiel scalaire engendré par un tel objet est donné par :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

De plus, on considère que $x' \equiv |\mathbf{x}'| \ll x \equiv |\mathbf{x}|$ pour tous les points où $\rho(\mathbf{x}') \neq 0$, c'est à dire que l'observateur se trouve très loin de l'objet. Dans la région où $\rho \neq 0$, on peut donc développer $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1}$ en une série de Taylor¹ en x' :

1. Cette expression n'est qu'une généralisation du développement de Taylor d'une fonction à plusieurs variables dans la convention d'Einstein (avec $H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ la matrice Hessienne) :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)) &= f(\mathbf{a}) + \nabla(f(\mathbf{a})) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^t H(f(\mathbf{a}))(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \mathcal{O}(|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^3) \\ &= f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}(f(\mathbf{a}))(x_i - a_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (x_j - a_j) H_{ij}(f(\mathbf{a}))(x_i - a_i) + \mathcal{O}(|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^3) \end{aligned}$$

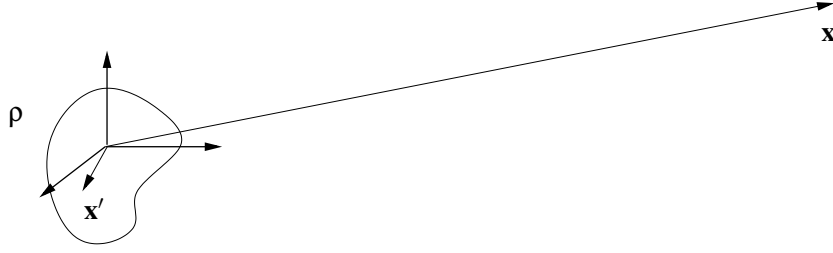


FIGURE 5.2 – Cas considéré lors de l'expansion en multipôles d'un objet de densité de charge ρ .

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x'_{i_1} \cdots x'_{i_n} \frac{\partial}{\partial x'_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x'_{i_n}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \Big|_{\mathbf{x}'=0}$$

Les indices i_1, i_2, \dots sont des indices allant de 1 à 3 sommés dans la convention d'Einstein. Dans les calculs qui suivent, on définit $\partial'_i = \frac{\partial}{\partial x'_i}$. On a donc :

$$\partial'_i \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = - \frac{x'_i - x_i}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \xrightarrow{\mathbf{x}'=0} \frac{x_i}{x^3}$$

En redérivant par rapport à x'_j , on a :

$$\begin{aligned} \partial'_j \partial'_i \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \partial'_j \left(- \frac{x'_i - x_i}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) = \frac{3(x'_j - x_j)(x'_i - x_i) - \delta_{ij} |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^5} \\ &\xrightarrow{\mathbf{x}'=0} \frac{3x_j x_i - \delta_{ij} x^2}{x^5} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Par récurrence, on peut finalement trouver que :

$$\partial'_{i_1} \cdots \partial'_{i_n} \frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \Big|_{\mathbf{x}'=0} = \frac{(2n-1)!! (x_{i_1} \cdots x_{i_n}) - A_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{x})}{x^{2n+1}}$$

Avec la double factorielle définie par :

$$n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1 & \text{si } n \text{ impair} \\ n(n-2)(n-4) \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 & \text{si } n = -1, 0 \end{cases}$$

Le terme $A_{i_1 \dots i_n}$ contient des deltas de Kronecker (voir pour exemple (5.1)) de telle manière que

$$T_{i_1 \dots i_n} = (2n-1)!! (x_{i_1} \cdots x_{i_n}) - A_{i_1 \dots i_n}$$

est à *trace nulle*, c'est-à-dire que :

$$T_{i_1 \dots i_n} \delta_{i_k i_l} = 0 \quad \forall k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$$

(Attention, il y a toujours une somme sur les indices répétés). Ceci peut être compris en observant que $\partial'_i \partial'_i (1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = 0$ lorsque $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$. Par la propriétés de la commutation des dérivées, ceci est valable pour tous les indices. Ainsi, chaque terme de la série peut s'écrire :

$$(x'_{i_1} \cdots x'_{i_n}) ((2n-1)!! (x_{i_1} \cdots x_{i_n}) - A_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{x})) = \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{(2n-1)!!} [(2n-1)!! (x'_{i_1} \cdots x'_{i_n}) - A_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{x}')] [(2n-1)!! (x_{i_1} \cdots x_{i_n}) - A_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{x})] \quad (5.3)$$

Ceci vient du fait que $A_{i_1 \dots i_n}$ contient au moins une delta de Kronecker, qui donne trivialement 0 lorsqu'elle est sommée avec le terme entre crochets de droite. Pour la même raison, le terme $A_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{x})$ dans le crochet de droite de la dernière ligne de (5.3) donne zéro lorsqu'il est contracté avec le crochet de gauche. Finalement, le dénominateur du potentiel scalaire est donnée à grande distance par :

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{n>0} \frac{1}{n!} \underbrace{((2n-1)!! (x'_{i_1} \dots x'_{i_n}) - A_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{x}'))}_{=T_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{x}')} \frac{x_{i_1} \dots x_{i_n}}{x^{2n+1}} \quad (5.4)$$

Avec $T_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{x}')$ donné pour les 3 premiers ordres par :

$$\begin{aligned} T &= 1 \\ T_i &= x'_i \\ T_{ij} &= 3x'_i x'_j - x'^2 \delta_{ij} \\ &\dots \end{aligned}$$

On peut maintenant revenir au potentiel. En utilisant l'équation 5.4, il est judicieux de définir les *multipôles* :

$$Q_{i_1 \dots i_n} = \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') T_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{x}') \quad (5.5)$$

Avec cette définition, le potentiel s'écrit de manière simple comme une somme de multipôles :

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n>0} \frac{1}{n!} Q_{i_1 \dots i_n} \frac{x_{i_1} \dots x_{i_n}}{x^{2n+1}} = \sum_{n>0} \Phi^{(n)}$$

Par exemple, si l'objet est un ensemble de charges de valeurs fixes (e.g. un nombre fixe d'électrons) localisées dans une région de taille a , la densité de charge depends de a selon la relation $\rho \sim \frac{1}{L^3} \sim \frac{1}{a^3}$. Selon (5.5) la dépendance des multipôles de a est donc

$$Q_{i_1 \dots i_n} \sim a^n \quad (5.6)$$

La contribution du $n^{\text{ième}}$ multipôle au potentiel Φ est alors :

$$\Phi^{(n)} \sim \left(\frac{a}{x}\right)^n \frac{1}{x}$$

On remarque que la contribution des multipôles devient de plus en plus petite lorsque n augmente. Les termes dominants sont donnés dans le tableau 5.1. Si $Q = 0$, le terme dominant est en général un dipôle. De plus, si $\rho(\mathbf{x})$ est telle que $Q_i = 0$, le terme dominant est Q_{ij} , etc. . .

n	nom	expression analytique
0	monopôle	$Q = \int d^3x \rho(\mathbf{x})$
1	dipôle	$Q_i = \int d^3x \rho(\mathbf{x}) x_i$
2	quadripôle	$Q_{ij} = \int d^3x \rho(\mathbf{x}) (3x_i x_j - x^2 \delta_{ij})$
3	octopôle	$Q_{ijk} = \dots$

TABLE 5.1 – Premiers termes de l'expansion en multipôles.

En ayant la valeur du potentiels, on peut très facilement en déduire la valeur du champ électrique :

$$\mathbf{E}^{(0)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \sim \frac{1}{r^2}$$

$$\mathbf{E}^{(1)} = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\mathbf{r} (\mathbf{Q}^{(1)} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{Q}^{(1)}}{r^5} \sim \frac{1}{r^3}$$

Exemple : On considère une distribution de charge donnée par :

$$\rho(\mathbf{x}) = q\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_0) - q\delta^{(3)}(\mathbf{x} + \mathbf{r}_0)$$

En utilisant les expressions résumées à la table 5.1, on trouve immédiatement :

$$Q = \int d^3x \rho = q - q = 0$$

$$Q_i = \int d^3x q x_i \left(\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_0) - \delta^{(3)}(\mathbf{x} + \mathbf{r}_0) \right) = 2q(r_0)_i$$

$$\mathbf{Q}^{(1)} = 2q\mathbf{r}_0$$

$$\dots$$

5.2 Magnétostatique

On passe maintenant au cas de la magnétostatique, et à l'étude des multipôles magnétiques. Le potentiel vecteur est donné par :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int d^3x' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

Si \mathbf{J} est localisée dans une petite région, on peut refaire le même processus que pour l'électrostatique. Par la suite, on se restreint au deuxième ordre dominant (dipôle) :

$$A_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\frac{1}{x} \int d^3x' J_i(\mathbf{x}') + \frac{x_j}{x^3} \int d^3x' J_i(\mathbf{x}') x'_j + \dots \right]$$

On est dans le cas statique, donc $\dot{\rho}(\mathbf{x}) = 0$. Par l'équation de continuité, cela implique $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. De plus :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V d^3x x_i \partial_j J_j = \int_V d^3x \partial_j (x_i J_j) - \partial_j x_i J_j \\ &= \int_V d^3x \left(\partial_j (x_i J_j) - J_i \right) \\ &= \int_{\partial V} \mathbf{dS} \cdot \mathbf{J} x_i - \int_V d^3x J_i \\ &= - \int_V d^3x J_i \end{aligned}$$

Où on a utilisé le théorème de la divergence et le fait que \mathbf{J} est localisé près de l'origine, donc le terme de bord tombe lorsque $\partial V \rightarrow \infty$.

On voit que le terme lié au monopôle est nul. De manière similaire, on peut prouver que :

$$\int d^3x (x_i J_j + x_j J_i) = 0$$

Le terme lié au dipôle devient alors :

$$\begin{aligned} x_j \int d^3x' J_i(\mathbf{x}') x'_j &= \frac{1}{2} x_j \int d^3x' (J_i(\mathbf{x}') x'_j - J_j(\mathbf{x}') x'_i) \\ &= \frac{1}{2} x_j \int d^3x' \varepsilon_{ijk} (\mathbf{J} \wedge \mathbf{x}')_k \\ &\equiv -\frac{1}{2} \left(\mathbf{x} \wedge \int d^3x' (\mathbf{x}' \wedge \mathbf{J}) \right)_i \end{aligned}$$

Ce résultat mène à définir la *densité de moment magnétique* (aussi appelé *magnétisation*) comme :

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{J}(\mathbf{x})) \quad (5.7)$$

On peut également définir le *moment magnétique total* comme :

$$\mathbf{m} = \int d^3x \mathbf{M}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int d^3x \mathbf{x} \wedge \mathbf{J}(\mathbf{x}) \quad (5.8)$$

Avec ces définitions, le potentiel vecteur prend alors une forme relativement compact au premier ordre :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \left(\frac{\mathbf{m} \wedge \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} + \underbrace{\mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-3})}_{\text{quadrupôle}} \right) \quad (5.9)$$

A nouveau, cette approximation marche dans le cas où a , la taille caractéristique de l'objet, est négligeable par rapport à $|\mathbf{x}|$.

5.3 Expansion en multipôles dans le cas dynamique

On cherche maintenant à décrire le comportement des potentiels à longues distances dans le cas dynamique, c'est-à-dire pour :

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \int d^3x' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \end{aligned}$$

A cette fin, il convient tout d'abord d'établir ce que veut dire longues distances dans ce cas. i.e. quelles sont les échelles du problème.

Longueur : Pour un objet de taille a , on peut associé un temps $\tau = a/c$, qui représente le temps que la lumière met à traverser le système.

Temps : ρ et \mathbf{J} vont dépendre du temps avec un temps caractéristique T , défini grossièrement par $\dot{\rho} \sim \rho/T$. Par exemple :

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}) \cos(\omega t) \Rightarrow \omega \sim \frac{1}{T}$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_1(\mathbf{x}) \cos(\omega_1 t) + \rho_2(\mathbf{x}) \cos(\omega_2 t) \Rightarrow \omega_1, \omega_2 \sim \frac{1}{T}$$

De manière générale, en passant dans l'espace de Fourier pour le temps :

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \hat{\rho}(\omega, \mathbf{x})$$

on dit T le temps caractéristique si $\hat{\rho}(\omega, \mathbf{x})$ est significativement non nulle autour de $\omega \sim 1/T$. On peut également associer une longueur à T :

$$\lambda = cT$$

Une variation sera lente si $\lambda \gg a$, ou de manière équivalente $T \gg \tau$. On notera que puisque $T \sim \frac{1}{\omega} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\omega}$, λ représente la longueur d'onde des ondes électromagnétiques émises. On a ainsi deux possibilités :

1. Dans un cas où $\lambda \gg a$, (figure 5.3(a)), on s'attend à ce que l'expansion en multipôles existe. Les ondes « perçoivent » l'émetteur comme un point. Par exemple, dans le cas d'un atome, on a $\lambda \gg a$.
2. Dans un cas où $\lambda \ll a$, (figure 5.3(b)), il n'y a pas d'expansion en multipôles utile du champ radiatif. C'est le cas par exemple du soleil et des rayons qu'il émet.

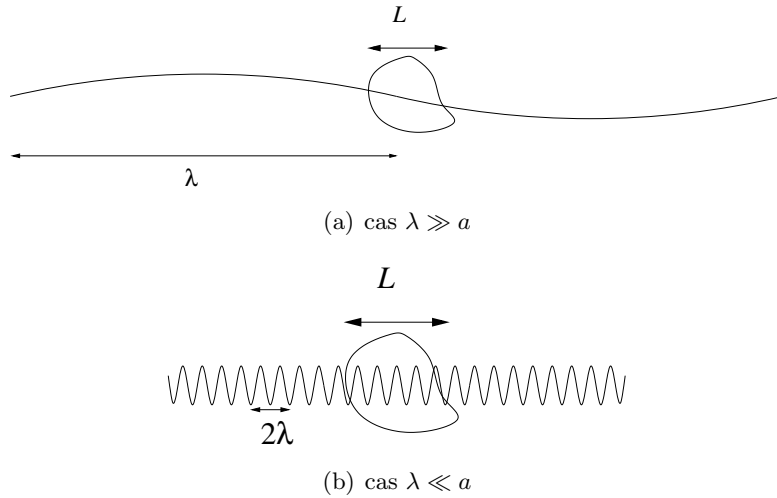


FIGURE 5.3 – Différents cas possible pour le cas dynamique.

A partir de la discussion précédente, on peut déduire qu'être à longue distance d'une source dynamique veut dire qu'on doit avoir la condition :

$$|\mathbf{x}| \gg \max(a, \lambda)$$

On étudie maintenant les champs de radiations à longue distance sans faire de distinctions entre les cas 1) et 2). Pour le potentiel scalaire, on a :

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

En utilisant le fait que $|\mathbf{x}'| = x' \ll x = |\mathbf{x}|$, on peut faire un développement de Taylor :

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| &= x - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \mathcal{O}\left(\frac{x'^2}{x}\right) \\ &= x - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}' + \mathcal{O}\left(\frac{x'^2}{x}\right) \end{aligned}$$

On a deux dépendances en \mathbf{x} pour Φ :

1. Le dénominateur :

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{x} \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{x}} = \frac{1}{x} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{x'}{x}\right) \right)$$

dans la limite $x \gg x'$ on peut bien approximer le denominator avec $1/x$

2. La dépendance de ρ du temps

$$\rho(\mathbf{x}', t - \frac{x}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c} + \mathcal{O}(\frac{x'^2}{x}))$$

Maintenant le terme en $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'/c$ ne peut pas être négligé. Puisque l'origine du temps est arbitraire, comparer $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'/c$ et $t - x/c$ ne fait pas de sens, cependant $\dot{\rho}$ est important :

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(\mathbf{x}', t - x/c) + \dot{\rho}(\mathbf{x}', t - x/c) \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c} + \dots \\ &= \rho(\mathbf{x}', t - x/c) \left(1 + \underbrace{\frac{\dot{\rho} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{\rho c}}_{\mathcal{O}(\frac{a}{T})} + \dots \right) \end{aligned}$$

Le second terme est d'ordre $\mathcal{O}(a/T)$ et est fini lorsque $x \rightarrow \infty$, on doit donc le garder pour être consistant avec l'approximation à grandes distances. Par contre on peut bien voir que les termes d'ordre $\mathcal{O}(\frac{x'^2}{x})$ sont négligeables dans la limite $x \rightarrow \infty$.

Ainsi, avec les approximations que l'on a fait, les potentiels sont donnés par :

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}', t - x/c + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'/c) \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{x} \int d^3x' \mathbf{J}(\mathbf{x}', t - x/c + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'/c) \end{aligned}$$

Les champs électriques et magnétiques décroissent donc en x^{-1} , donc pour le vecteur de Poynting on a $S \sim x^{-2}$. La Puissance émise par unité de temps est finie :

$$\frac{dP}{dt} = \int \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} d\sigma \sim \frac{1}{x^2} 4\pi x^2 = \mathcal{O}(1)$$

De plus, on s'attend à ce que les champs soient tels que :

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{n}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}$$

Plus en détails :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \wedge \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{x} \int d^3x' \nabla \left(-\frac{x}{c} \right) \wedge \dot{\mathbf{J}} + \mathcal{O}(x^{-2}) \\ &\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{x} \int d^3x' \frac{-\mathbf{n} \wedge \dot{\mathbf{J}}}{c} \\ &\simeq \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \wedge \mathbf{n} \end{aligned}$$

On peut également facilement vérifier que

$$\mathbf{E} = \mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \dot{\mathbf{A}})$$

Il est maintenant intéressant de voir comment se comportent les champs de radiation lorsque ρ, \mathbf{J} varient lentement, c'est-à-dire lorsque :

$$\begin{aligned} T &\gg \tau \\ \lambda &\gg a \end{aligned}$$

On peut remarquer qu'on doit s'attendre à ce que T soit associé avec la vitesse des charges, ie :

$$vT \sim a \Leftrightarrow T \sim \frac{a}{v}$$

La condition que $T \gg a/c$ implique donc que $v \ll c$. Les particules chargées doivent donc se mouvoir à des vitesses faibles.

5.4 Radiation du dipôle

Dans le cas où $T \ll \tau$, on peut développer ρ, \mathbf{J} en une série de Taylor en puissance de $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'/c$. Il est clair que

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t - \frac{x}{c} - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c}) \longrightarrow \sum_{n>0} \mathbf{J}^{(n)} \left(\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c} \right)^n$$

est une expansion en multipôle. Au premier ordre, pour le potentiel vecteur :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{x} \int d^3x' \mathbf{J}(\mathbf{x}', t - x/c)$$

En définissant :

$$\mathbf{d}(t') = \mathbf{Q}^{(1)} = \int d^3x' \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}', t - x/c)$$

La dérivée de \mathbf{d} est donnée par :

$$\begin{aligned}
\dot{d}_i &= \int d^3x' x'_i \dot{\rho}(\mathbf{x}', t - x/c) = \int d^3x' x'_i (-\partial'_j J_j) \\
&= \int d^3x' [(\partial'_j x'_i) J_j + \partial'_j (-x'_i J_j)] \\
&= \int d^3x' J_i + \oint dS'_j (-x'_i J_j) \\
&= \int d^3x' J_i(\mathbf{x}', t - x/c)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'équation de continuité à la première ligne, et le fait que \mathbf{J} est nul aux bords après avoir utilisé le théorème de la divergence. De là, on peut déduire rapidement :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{x} \dot{\mathbf{d}} \\
\mathbf{B} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{x} \ddot{\mathbf{d}} \wedge \mathbf{n} \\
\mathbf{E} &= c\mathbf{B} \wedge \mathbf{n}
\end{aligned}$$

Le vecteur de Poynting vaut donc :

$$\mathbf{S} = \epsilon_0 c^3 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} \right)^2 \frac{1}{x^2} |\ddot{\mathbf{d}} \wedge \mathbf{n}|^2$$

D'où la puissance par unité d'angle solide :

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} |\ddot{\mathbf{d}}|^2 \sin^2(\theta)$$

où θ est défini comme l'angle entre $\ddot{\mathbf{d}}$ et \mathbf{n} . En intégrant sur l'angle solide, on retrouve bien la formule de Larmor :

$$P = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{|\ddot{\mathbf{d}}|^2}{c^3} \quad (5.10)$$

5.4.1 Structure des champs

On considère maintenant la structure des champs électriques et magnétiques générés par des distributions ρ, \mathbf{J} localisée et variant *lentement* dans le temps. Comme vu dans la section 5.3, c'est le cas si :

$$\lambda = cT \gg a$$

On peut alors distinguer 3 régions différentes :

1. La région presque statique, où l'on a :

$$a \ll x \ll \lambda \Leftrightarrow \frac{R}{c} \sim \frac{x}{c} \ll T$$

Dans ce cas, le champ électrique est donné par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) &= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left(\nabla_{\mathbf{x}} \int d^3x' \frac{\rho(t - R/c, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x' \frac{\mathbf{J}(t - R/c, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \\
&= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \left(\rho(t - R/c, \mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{\dot{\rho}(t - R/c, \mathbf{x}')}{R} \frac{\nabla_{\mathbf{x}}(R)}{c} + \frac{\dot{\mathbf{J}}(t - R/c, \mathbf{x}')}{c^2 R} \right) \\
&\sim \frac{\rho}{R^2} - \frac{\rho}{Tc} + \rho \frac{v}{T} \frac{1}{c^2 R} \\
&\sim \frac{\rho}{R^2} \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{R}{Tc} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{R}{Tc} \frac{v}{c} \right) \right) \\
&\sim \frac{\rho}{R^2} \left(1 + \underbrace{\mathcal{O} \left(\frac{R}{\lambda} \right)}_{\ll 1} + \underbrace{\mathcal{O} \left(\frac{R}{\lambda} \frac{v}{c} \right)}_{\ll 1} \right)
\end{aligned}$$

Dans l'approximation faite, on peut négliger les deuxième et troisième termes. Similairement, le pour le champ magnétique, on a :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int d^3x' \nabla \wedge \frac{\mathbf{J}(t - R/c, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

On néglige les dépendance en R/c dans \mathbf{J} à l'ordre le plus bas. Ainsi, en négligeant les termes de taille relative R/λ , les potentiels peuvent se réécrire :

$$\begin{cases} \phi(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{R}{\lambda} \right) \right) \\ \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int d^3x' \frac{\mathbf{J}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{R}{\lambda} \right) \right) \end{cases} \quad \text{si } a \ll x \ll \lambda \quad (5.11)$$

On peut voir que les potentiels sont quasi stationnaires : ils varient lentement dans le temps, mais sont de nature statique. Les champs associé varient donc comme $E, B \sim R^{-2} = |\mathbf{x}|^{-2}$. Les champs quasi stationnaires peuvent être soumis à une expansion en multipôles de la même manière que dans le cas statique.

2. La région intermédiaire, ou zone d'induction où l'on a :

$$|\mathbf{x}| \sim \lambda$$

Dans ce cas, il n'existe pas d'expansion en multipôles utile.

3. La zone de radiation, où l'on a :

$$a \ll \lambda \ll x$$

Cette région a déjà été étudiée. Les champs électrique et magnétique sont dominés par la dépendance en temps de ρ et \mathbf{J} , et ont un comportement en $|\mathbf{x}|^{-1}$. Ce sont des champs radiatifs transverse.

Chapitre 6

Relativité restreinte

Une approche purement Newtonienne des équations de Maxwell n'est pas suffisante pour décrire correctement l'électrodynamisme. Cette inconsistance a poussé Albert Einstein en 1905¹ à proposer un nouveau paradigme : la *relativité restreinte*².

6.1 Symétries et mécanique Newtonienne

On considère tout d'abord un système typique de la mécanique Newtonienne : un système de N particules interagissant par paires. Le Lagrangien d'un tel système est donné par :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 - \underbrace{\sum_{i \neq j} U_{ij}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)}_V \quad (6.1)$$

En faisant une transformée de Legendre de ce Lagrangien, on obtient l'Hamiltonien associé :

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{p}_i^2}{m_i} + \sum_{i \neq j} U_{ij}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) \quad (6.2)$$

Les équations du mouvement correspondantes sont :

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = -\nabla_{\mathbf{x}_i} V \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (6.3)$$

Ces équations du mouvement ont un certain nombre de symétries, c'est-à-dire qu'il existe un changement de référentiel qui les laissent invariantes. Dans ce cas particulier, on a :

Translation spatiale : En effet, si on fait le changement de coordonnées

$$\mathbf{x}_i \longrightarrow \mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i + \mathbf{a} \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$$

Cette transformation implique :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}'_i &= \ddot{\mathbf{x}}_i \\ \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j &= \mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j \\ \frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}_i} &= \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^\beta_i} \frac{\partial x^\beta_i}{\partial x'^{\alpha}_i} = \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial}{\partial x^\beta_i} \delta_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha_i} \end{aligned}$$

1. ALBERT EINSTEIN, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik **322** (10), 1905, pp. 891-921
2. Special relativity en anglais.

Avec x_i^α (resp. x_i^β) la coordonnée α (resp. β) du vecteur \mathbf{x}_i . Les équations du mouvement sont bien inchangées.

Translation temporelle : En faisant la transformation

$$t \longrightarrow t + t_0$$

les équations du mouvement sont les mêmes si l'on a :

$$\mathbf{x}'_i(t') = \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}_i(t' - t_0)$$

Rotations : Soit une matrice orthogonale³ $R \in O(3)$. Une rotation revient à faire la transformation :

$$x_i^\alpha \longrightarrow x_i'^\alpha = \sum_{\beta=1}^3 R_{\alpha\beta} x_i^\beta \quad (6.4)$$

La norme ne change pas :

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2 &= |R(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)|^2 = |R|^2 \cdot |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2 = R^t R |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2 \\ &= |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2 \end{aligned}$$

Le gradient quant à lui se transforme comme :

$$\frac{\partial}{\partial x_i'^\alpha} = \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i^\beta} \frac{\partial x_i^\beta}{\partial x_i'^\alpha} = \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i^\beta} R_{\alpha\beta}$$

ou on a utilisé l'inverse de la transformation en eq. (6.4)

$$x_i^\beta = \sum_{\alpha=1}^3 R_{\alpha\beta} x_i'^\alpha$$

La matrice R ne dépendant pas du temps, l'accélération $\ddot{\mathbf{x}}_i$ se transforme trivialement comme le vecteur \mathbf{x} . A nouveau, les équations du mouvement restent inchangées.

Boosts Galiléens : Les équations du mouvement sont aussi invariantes sous la transformation :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i & \longrightarrow \mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i + \mathbf{v}_i t \\ t & \longrightarrow t' = t \end{cases} \quad (6.5)$$

La démonstration est similaire à celle des translations.

Il n'y a donc aucune manière, à partir des équations du mouvement, de dire si un observateur a :

- Une position absolue (homogénéité spatiale)
- Une origine du temps absolue (homogénéité temporelle)
- Une vitesse constante absolue
- Une orientation absolue (isotropie spatiale)

3. Le groupes des matrices orthogonale de taille $n \times n$ est défini comme

$$O(n) = \{ R \in \text{Mat}(n, n, \mathbf{R}) \mid R^t R = \mathbb{I} = R R^t \}$$

Par contre, on peut remarquer que la séparation temporelle entre deux événements est absolue, ie elle est la même pour tous les observateurs. L'ensemble de ces transformations forment un groupe, appelé *groupe de Galilée*, qui transforme (t, \mathbf{x}) comme :

$$\begin{cases} \mathbf{x} & \longrightarrow \mathbf{x}' = R\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{x}_0 \\ t & \longrightarrow t' = t + t_0 \end{cases} \quad t_0 \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v}, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3, \quad R \in O(3) \quad (6.6)$$

Le groupe de Galilée est de dimension 10 :

- 3 degrés de liberté pour R (3 angles d'Euler)
- 3 degrés de liberté pour \mathbf{x}_0 (translations dans l'espace)
- 3 degrés de liberté pour \mathbf{v} (boosts de Galilee)
- 1 degré de liberté pour t_0

L'invariance de la mécanique d'une particule ponctuelle sous le groupe de Galilée est cependant à contraster avec le cas de la dynamique d'une onde, eg d'une onde sonore, qui est décrit par l'équation :

$$\left(\frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \psi(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (6.7)$$

où ψ représente le niveau de compression en t, \mathbf{x} dans le cas d'une onde sonore. On considère maintenant la transformation de Galilée suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{x} & \longrightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v}t \\ t & \longrightarrow t' = t \end{cases}$$

Puisque le niveau de compression est le même pour tous les observateurs (ie dans tous les systèmes de coordonnées), on a la condition :

$$\psi'(t', \mathbf{x}') = \psi(t, \mathbf{x})$$

Cela revient à comprendre comment $\frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ se transforme. Pour simplifier, on suppose que la vitesse est selon la direction x , c'est-à-dire $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$. Trivialement, on a $\partial'_y = \partial_y$, $\partial'_z = \partial_z$. Pour le temps et la coordonnée x :

$$\begin{aligned} \partial_x &= \sum_{i=1}^3 \partial_{x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial x} + \partial'_t \frac{\partial t'}{\partial x} = \partial_{x'} \\ \partial_t &= \sum_{i=1}^3 \partial_{x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial t} + \partial'_t \frac{\partial t'}{\partial t} = -v \partial_{x'} + \partial_{t'} \end{aligned}$$

Les dérivées secondes se transforme alors comme :

$$\begin{aligned} \partial_x^2 &= \partial_{x'}^2 \\ \partial_t^2 &= v^2 \partial_{x'}^2 - v \partial_{x'} \partial_{t'} + \partial_{t'}^2 \end{aligned}$$

finalemt, l'opérateur différentiel de l'équation d'onde (6.7) se transforme comme :

$$\frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \nabla_{\mathbf{x}'}^2 - \frac{v}{v_s} \partial_{x'} \partial_{t'} + \left(\frac{v}{v_s} \right)^2 \partial_{x'}^2$$

L'opérateur différentiel n'est pas invariant, car le troisième terme et le quatrième ne sont pas nuls en general.

6.2 Transformations de Galilée des équations de Maxwell dans le vide

On considère à présent les équations de Maxwell dans le vide, c'est à dire :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ c^2 \nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{0} \\ \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

A partir de ces équations, on peut voir que \mathbf{E} et \mathbf{B} satisfont tous deux l'équations de D'Alembert :

$$\begin{aligned}\square \mathbf{E} &= \mathbf{0} \\ \square \mathbf{B} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

On peut donc définir un vecteur à 6 composantes $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ satisfaisant :

$$\square \mathbf{V} = 0 \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

On peut se demander s'il existe une transformation de \mathbf{V} sous le groupe de Galilée qui laisse l'équation (6.8). La réponse est non. Par exemple, la transformation :

$$\mathbf{V}'(t', \mathbf{x}') = C \mathbf{V}(t, \mathbf{x}) \quad (6.9)$$

où C est une matrice constante, ne marche pas. En effet :

$$\square_{(t, \mathbf{x})} \mathbf{V}'^A(t', \mathbf{x}') = \sum_{i=1}^6 C_{AB} \square_{(t, \mathbf{x})} \mathbf{V}(t, \mathbf{x}) = 0$$

Comme on l'a démontré précédemment, on a $\square_{(t, \mathbf{x})} \neq \square_{(t', \mathbf{x}')}$ et donc l'équation satisfaite par $V'(x', t')$ n'est pas $\square_{(t', \mathbf{x}')} \mathbf{V}'^A(t', \mathbf{x}') = 0$. Par conséquent l'équation (6.8) n'est pas pas invariant sous la transformation (6.9). Peut-on trouver de manière systématique une transformation plus generale? Une telle transformation doit être *locale*, c'est-à-dire :

$$\mathbf{V}'(t', \mathbf{x}') = f(\mathbf{V}(t, \mathbf{x}), \partial \mathbf{V}(t, \mathbf{x}), \partial \partial \mathbf{V}(t, \mathbf{x}), \dots) \quad (6.10)$$

$$= \mathcal{P}(\partial) \mathbf{V}(t, \mathbf{x}) \quad (6.11)$$

avec $\mathcal{P}(\partial)$ un polynôme d'ordre fini dépendant des dérivées. On peut démontrer qu'il n'existe aucune transformation dans la classe 6.11 qui laisse l'éq. (6.8) invariante.

En considérant le manque d'invariance des équations de Maxwell sous le groupe de Poincaré, les physiciens du début du XIX^{ième} siècle ont été face à 3 possibilités :

1. Les équations de Maxwell sont fausses. La théorie correcte est invariante sous le groupe de Galilée.

2. La relativité Galiléenne est correcte en mécanique, mais ne s'applique pas aux phénomènes électromagnétiques : Il existe un système de coordonnées préférentiel, celui où l'*éther* est au repos.
3. Il existe un principe de relativité qui s'applique à la fois à la mécanique et à l'électromagnétisme. Cela implique que les lois de la mécanique doivent être modifiées.

Les possibilités 1) et 2) étaient cependant difficiles à réconcilier avec les expériences, malgré le fait que certaines grandes sommités (Poincaré, Lorentz) insistaient que la possibilité 2) soit la bonne.

Ce fut le jeune Einstein qui fut le premier à réaliser que la troisième était la plus simple et la plus évidente –à l'heure actuelle– des possibilités.

6.3 Equations de D'Alembert et transformations de Lorentz

Dans cette section, on cherche une transformation qui laisse les équations de Lorentz invariante, en refaisant les étapes effectuées par Einstein dans les années 1900.

6.3.1 Considérations générales

Etant donné les coordonnées spatio-temporelles d'un observateur \mathcal{O} , on cherche à trouver le changement de coordonnées d'un observateur \mathcal{O}' se déplaçant à une vitesse constante v par rapport à \mathcal{O} .

Il est utile de grouper les coordonnées spatiales et le temps dans un *quadrivecteur*

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

En principe, on pourrait considérer la transformation la plus générale

$$\hat{\mathbf{x}}' = \hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}})$$

où $\hat{\mathbf{f}}$ représente quatre fonctions de (ct, x, y, z) mise en forme de quadrivecteur (avec une notation évidente). A priori ces fonctions pourraient être compliquées. Cependant, on cherche une généralisation des transformations de Galilé. En particulier, on voudrait à imposer l'*homogénéité espace-temps* : tous les points de l'espace (ct, x, y, z) sont équivalents, ou autrement dit la translation de l'origine n'a aucun effet physique. On peut donc demander que le changement d'origine dans le système \mathcal{O}

$$\begin{cases} x & \longrightarrow & x \rightarrow x + x_0 \\ t & \longrightarrow & t \rightarrow t + t_0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\mathbf{x}} \longrightarrow \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}_0$$

ne soit qu'un simple déplacement de l'origine du système \mathcal{O}' . La fonction $\hat{\mathbf{f}}$ recherchée est donc telle que :

$$\hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}_0) = \hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{b}}$$

avec $\hat{\mathbf{b}}$ quadrivecteur constant. Cela implique que la fonction recherchée est linéaire :

$$\hat{\mathbf{x}}' = \hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}) = \Lambda \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{a}} \quad (6.13)$$

avec Λ une matrice 4×4 et $\hat{\mathbf{a}}$ quadrivecteur constant.

On peut maintenant étudier la transformation de l'équation $\square\Phi = 0$ sous le change de coordonnées en (6.13) et considérer le cas simple d'une seule dimension spatiale $\hat{\mathbf{x}} = (ct, x)$ (et $\hat{\mathbf{a}} = 0$). Le but est de trouver Λ telle que $\square\Phi = 0$ est invariant. L'équation (6.13) devient :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Avec ces définitions, les opérateurs différentiels se transforment de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + c \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \\ &= \Lambda_{22} \frac{\partial}{\partial x'} + \Lambda_{12} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{1}{c} \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + c \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \\ &= \Lambda_{21} \frac{\partial}{\partial x'} + \Lambda_{11} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \end{aligned}$$

On peut donc dire que l'équivalent spatio-temporel du gradient se transforme comme :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{21} \\ \Lambda_{12} & \Lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial x'} \end{pmatrix} = \Lambda^t \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial x'} \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

On peut maintenant trouver facilement la transformation du D'Alembertien. Sous forme matricielle, cet opérateur différentielle peut s'écrire

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \eta \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sa transformation est donc donnée par :

$$\square' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \Lambda \eta \Lambda^t \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Demander que le D'Alembertien soit invariant revient donc à demander que Λ satisfasse :

$$\Lambda^t \eta \Lambda = \eta \quad (6.15)$$

En développant, on obtient :

$$\begin{aligned} \Lambda \eta \Lambda^t &= \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{21} \\ \Lambda_{12} & \Lambda_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{21} \\ -\Lambda_{12} & -\Lambda_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Lambda_{11}^2 - \Lambda_{12}^2 & \Lambda_{11}\Lambda_{21} - \Lambda_{12}\Lambda_{22} \\ \Lambda_{21}\Lambda_{11} - \Lambda_{22}\Lambda_{21} & \Lambda_{21}^2 - \Lambda_{22}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour satisfaire les conditions d'invariance, les composantes de la matrice Λ satisfassent donc les 3 équations suivantes :

$$\begin{aligned} \Lambda_{11}^2 - \Lambda_{12}^2 &= 1 \\ \Lambda_{11}\Lambda_{21} - \Lambda_{12}\Lambda_{22} &= 0 \\ \Lambda_{21}^2 - \Lambda_{22}^2 &= -1 \end{aligned} \quad (6.16)$$

On a 3 équations pour 4 inconnues. On devrait donc trouver une famille de solutions à 1 paramètre.

$$\begin{aligned}(\Lambda_{11} - \Lambda_{12})(\Lambda_{11} + \Lambda_{12}) &= 1 \Rightarrow \Lambda_{11} \pm \Lambda_{12} = e^{\mp\chi} \\ (\Lambda_{22} - \Lambda_{21})(\Lambda_{22} + \Lambda_{21}) &= 1 \Rightarrow \Lambda_{22} \pm \Lambda_{21} = e^{\mp\xi}\end{aligned}$$

En utilisant la troisième équation de (6.16), on peut réduire les deux paramètres χ, ξ à un seul :

$$\begin{aligned}(\Lambda_{11} - \Lambda_{12})(\Lambda_{12} + \Lambda_{21}) &= (\Lambda_{11} + \Lambda_{12})(\Lambda_{12} - \Lambda_{21}) \\ e^{\chi}e^{-\xi} &= e^{-\chi}e^{\xi}\end{aligned}$$

On en déduit ainsi que $\xi = \chi$, et en retournant les résultats des deux équations précédentes, on trouve finalement la valeur de la matrice Λ :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh(\chi) & -\sinh(\chi) \\ -\sinh(\chi) & \cosh(\chi) \end{pmatrix}$$

Maintenant que la matrice Λ est connue, on en déduit facilement l'expression de la transformation :

$$\begin{cases} ct' &= \cosh(\chi)ct - \sinh(\chi)x \\ x' &= \cosh(\chi)x - \sinh(\chi)ct \end{cases}$$

On peut à présent se demander quelle est l'interprétation de χ . Pour ce faire, on considère la trajectoire dans le référentiel de l'observateur \mathcal{O} d'un point au repos dans le référentiel de l'observateur \mathcal{O}' . Pour exemple en considérant le point $x' = 0$ on a :

$$x = \frac{\sinh(\chi)}{\cosh(\chi)}ct$$

On déduit la vitesse v de \mathcal{O}' par rapport à \mathcal{O}

$$v = c \frac{\sinh(\chi)}{\cosh(\chi)} = c \tanh(\chi). \quad (6.17)$$

En définissant

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{v}{c} \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\end{aligned}$$

on peut en déduire la valeur des fonctions hyperboliques en terme de β :

$$\begin{aligned}\cosh(\chi) &= \gamma \\ \sinh(\chi) &= \beta\gamma\end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\chi = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \quad (6.19)$$

χ est appelé la *rapidité* du changement de coordonnées. Il faut noter que dans le limite de petite vitesse ($\beta \ll 1$) on a $\chi \sim \beta$. En utilisant ces résultats, ce changement de coordonnées peut s'écrire :

$$\begin{cases} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \end{cases} \quad (6.20)$$

Il est très aisé de vérifier que la transformée inverse est obtenue en changeant le signe de la vitesse, c'est-à-dire en faisant le changement $\beta \rightarrow -\beta$. On notera que c'est précisément ce qui se passe dans le cas d'une transformation de Galilée, où la transformée inverse est obtenu par le changement $v \rightarrow -v$.

Il existe également une voie plus algébrique de le voir : en remarquant que la matrice Λ peut être obtenue grâce à une exponentiation de matrice⁴ :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh(\chi) & -\sinh(\chi) \\ -\sinh(\chi) & \cosh(\chi) \end{pmatrix} = e^{-\chi \mathbb{K}} \quad \mathbb{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'inverse de Λ est donc simplement $\exp(+\chi \mathbb{K})$. Cela revient à faire la transformation $\chi \rightarrow -\chi$. Par les propriétés de parité des fonctions hyperboliques, cela équivaut à faire $\beta \rightarrow -\beta$.

On conclue enfin que la forme de « l'équation d'onde »

$$\square \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0$$

ne change pas si l'on transforme les variables par :

$$\begin{cases} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ \Phi'(t', x') &= \Phi(t, x) \end{cases} \quad (6.21)$$

Une telle transformation est dite *transformation de Lorentz*. Ce résultat est trivialement généralisé à l'espace-temps quadridimensionnel. Par exemple

$$\begin{cases} ct' &= \gamma(ct - \beta z) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases} \quad (6.22)$$

correspond à une tranformation avec vitesse $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$. De même, le D'Alembertien à 1 dimension temporelle et 3 dimensions spatiales est évidemment invariant :

$$\square' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = \square$$

Pour une vitesse arbitraire \mathbf{v} , on peut toujours décomposer le vecteur position \mathbf{x} dans sa composante parallèle et orthogonale comme :

$$\mathbf{x}_{\parallel} = (\mathbf{x} \cdot \frac{\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\beta}|}) \frac{\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\beta}|}$$

$$\mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel}$$

En appliquant l'eq.(6.22) ($x \equiv \mathbf{x}_{\parallel}$, $(y, z) \equiv \mathbf{x}_{\perp}$), la transformation de Lorentz pour une vitesse arbitraire $c\boldsymbol{\beta}$ entre \mathcal{O} et \mathcal{O}' est alors :

$$\begin{cases} ct' &= \gamma(ct - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}'_{\parallel} &= \gamma(\mathbf{x}_{\parallel} - \boldsymbol{\beta} ct) \\ \mathbf{x}'_{\perp} &= \mathbf{x}_{\perp} \end{cases} \quad (6.23)$$

4. On rappelle que l'exponentiation d'une matrice A est définie par le développement de Taylor de l'exponentielle :

$$e^A = \sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$$

Le postulat de relativité d'Einstein revient à déclarer que la transformation ci-dessus, et non la transformation de Galilée (6.5), correspond à une symétrie de toutes les lois de la physique.

Maintenant que l'on connaît la forme des transformations des coordonnées, on peut se demander comment se transforment les quantités physiques, ie (ρ, \mathbf{J}) , (Φ, \mathbf{A}) et (\mathbf{E}, \mathbf{B}) .

En ce qui concerne (ρ, \mathbf{J}) , (Φ, \mathbf{A}) on note une similarité avec (t, \mathbf{x}) . La conjecture naturelle est donc que ces quantités forment aussi des quadrivecteurs. Plus précisément on peut raisonner que $(c\rho, \mathbf{J})$ et $(\Phi, c\mathbf{A})$ transforment comme le quadrivecteur (ct, \mathbf{x}) . En effet, en reprenant l'expression de la transformée de Lorentz (6.20), dans le limite $\beta \ll 1$ on a :

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) \longrightarrow x' = x - vt + \mathcal{O}(\beta^2) \\ ct' &= \gamma(ct - \beta x) \longrightarrow t' = t - \frac{v}{c^2}x + \mathcal{O}(\beta^2) \end{aligned}$$

Lorsque $c \rightarrow \infty$, v fixé, cette transformation devient une transformation de Galilée!⁵ Or la transformation de ρ et \mathbf{J} sous le groupe de Galilée est :

$$\begin{aligned} \rho(t, \mathbf{x}) &\longrightarrow \rho'(t', \mathbf{x}') = \rho(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) &\longrightarrow \mathbf{J}'(t', \mathbf{x}') = \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{v}\rho(t, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

Cette transformation est précisément la même que celle de (t, \mathbf{x}) dans la limite Galiléenne. Si le couple $(c\rho, \mathbf{J})$ transforme comme (ct, \mathbf{x}) , alors il satisfait la limite Galiléenne. On postule alors :

$$\begin{cases} c\rho' &= \gamma(c\rho - \beta\mathbf{J}) \\ \mathbf{J}'_{\parallel} &= \gamma(\mathbf{J}_{\parallel} - \beta c\rho) \\ \mathbf{J}'_{\perp} &= \mathbf{J}_{\perp} \end{cases} \quad (6.24)$$

Concernant la transformation des potentiels, on peut remarquer que, dans la jauge de Lorenz :

$$\square \begin{pmatrix} c\Phi \\ c^2\mathbf{A} \end{pmatrix} = \frac{1}{\varepsilon_0} \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{J} \end{pmatrix}$$

Le D'Alembertien étant invariant, on s'attend à ce que $(\Phi, c\mathbf{A})$ se transforme de la même manière que (ct, \mathbf{x}) :

$$\begin{cases} \Phi' &= \gamma(\Phi - \beta c\mathbf{A}) \\ c\mathbf{A}'_{\parallel} &= \gamma(c\mathbf{A}_{\parallel} - \beta\Phi) \\ c\mathbf{A}'_{\perp} &= c\mathbf{A}_{\perp} \end{cases} \quad (6.25)$$

Exemple : Transformation de Lorentz d'un potentiel pour une charge ponctuelle. On peut immédiatement tester nos raisonnements en considérant les potentiels d'une charge ponctuelle se déplaçant à vitesse constante.

Dans le référentiel où la charge est au repos, on a :

$$\begin{cases} \rho &= q\delta^{(3)}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{J} &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \mathbf{A} &= 0 \end{cases}$$

5. Ce résultat nous encourage puisque on voudrait bien récupérer la physique Newtonienne dans le limite de vitesses $\ll c$.

Si l'on effectue une transformée de Lorentz dans la direction x , par les propriétés des équations (6.21) et (6.25), on a :

$$\begin{aligned}\Phi'(t', \mathbf{x}') &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2(x' + vt)^2 + y'^2 + z'^2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x' + vt)^2 + (1 - \beta^2)(y'^2 + z'^2)}}\end{aligned}$$

Quant au potentiel vecteur, il se transforme comme :

$$\mathbf{A}'(t', \mathbf{x}') = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\beta}{\sqrt{(x' + vt)^2 + (1 - \beta^2)(y'^2 + z'^2)}}$$

Pour l'observateur \mathcal{O}' , la particule se déplace à vitesse $-\beta c = (-v, 0, 0)$. Ces résultats coïncident avec les calculs directs dérivés en exercice comme application des potentiels de Liénard-Wiechert, ce qui justifie à nouveau la postulation faite à l'équation (6.25).

En utilisant les symétries, on a obtenu ce résultat avec pratiquement aucun effort. Le fait est que d'après le principe de relativité, une particule chargée au repos et la même particule à vitesse constante représente simplement deux points de vue différents de la même situation.

6.4 Transformation de Lorentz générale : le groupe de Lorentz

On a déjà trouvé l'ensemble des transformation de Lorentz paramétrisée par un vecteur \mathbf{v} laissant le D'Alembertien \square invariant. On aimerait cependant connaître quelle est la transformation la plus générale. Un 4-vecteur

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

se transforme de la manière suivante sous la transformation de Lorentz Λ :

$$\hat{\mathbf{x}}' = \Lambda \hat{\mathbf{x}} \Leftrightarrow x'^a = \Lambda^{ab} x^b \quad (6.26)$$

avec la somme sur les indices répétés sous-entendue. En composante, les dérivées se transforment quant à elle comme :

$$\frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{\partial}{\partial x'^b} \frac{\partial x'^b}{\partial x^a} = \Lambda^{ba} \frac{\partial}{\partial x'^b}$$

En notation matricielle, la transformation des dérivées est donc

$$\hat{\partial} = \Lambda^T \hat{\partial}'$$

ou mieux, l'analogue de (6.26) pour $\hat{\partial}$ est

$$\hat{\partial}' = \Lambda^{-1T} \hat{\partial} \quad (6.27)$$

On voit ainsi que contrairement aux coordonnées, la transformation des dérivées est donnée par la matrice inverse transposée Λ^{-1T} .

Avec cette notation, le D'Alembertien s'écrit comme

$$\square = \hat{\boldsymbol{\theta}}^T G \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'invariance du D'Alembertien revient donc à demander que :

$$\square' = \hat{\boldsymbol{\theta}}'^T G \hat{\boldsymbol{\theta}}' = \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \Lambda G \Lambda^T \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^T G \hat{\boldsymbol{\theta}} = \square$$

L'ensemble des transformations de Lorentz est alors l'ensemble des matrices Λ satisfaisant

$$\Lambda G \Lambda^T = G \quad (6.28)$$

Cet ensemble forme un groupe, appelé le *groupe de Lorentz*, noté $O(1, 3)$:

$$O(1, 3) = \{ \Lambda \in \text{Mat}(4, \mathbb{R}) \mid \det(\Lambda) \neq 0 \text{ et } \Lambda G \Lambda^T = G \} \quad (6.29)$$

Il est aisé de vérifier que $O(1, 3)$ forme bien un groupe :

1. **Associativité** : Soient $\Lambda_1, \Lambda_2 \in O(1, 3)$. Par les propriétés de la transposée :

$$(\Lambda_1 \Lambda_2) G (\Lambda_1 \Lambda_2)^T = G$$

On a bien $(\Lambda_1 \Lambda_2) \in O(1, 3)$

2. **Existence d'un élément neutre** : Trivialement, $\Lambda = \mathbf{1}$ laisse G invariante, donc l'identité $\mathbf{1} \in O(1, 3)$.

3. **Existence d'un inverse** : Soit $\Lambda \in O(1, 3)$, on a :

$$\Lambda G \Lambda^T = G \Leftrightarrow G = \Lambda^{-1} G (\Lambda^{-1})^T$$

Donc l'inverse Λ^{-1} (tel que $\Lambda^{-1} \Lambda = \mathbf{1}$) appartient aussi à $O(1, 3)$.

On peut se demander combien de paramètres décrivent le groupe de Lorentz. Intuitivement on s'attend à 3 paramètres liés aux rotations et 3 aux boosts. Plus formellement, une transformation générale Λ est une matrice 4×4 , soit 16 paramètres. Cependant l'équation (6.15) contraint 10 paramètres. à cause de la symétrie de G . On a bien $16 - 10 = 6$ paramètres.

Note : Dans la littérature, il existe plusieurs conventions pour G . En particulier, il existe de nombreux livres et articles utilisant la convention $G = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Dans ce cas, le groupe de Lorentz, est dénoté par $O(3, 1)$. Ces conventions ne changent pas fondamentalement le formalisme introduit, mis à part l'apparition de signes moins dans les expressions.

En plus des transformations de Lorentz, on a vu que les équations de Maxwell sont également invariantes sous translation spatio-temporelle, c'est-à-dire par la transformation :

$$\hat{\mathbf{x}} \longleftarrow \hat{\mathbf{x}}' = \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{b}} \quad \hat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} ct_0 \\ \mathbf{x}_0 \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

L'ensemble des translations forme également un groupe ayant 4 paramètres.

Avec les transformations de Lorentz, la transformation

$$\hat{\mathbf{x}} \longleftarrow \hat{\mathbf{x}}' = \Lambda \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{b}} \quad \hat{\mathbf{b}}$$

laisse également le D'Alembertien invariant. Il est aussi possible de prouver que l'ensemble de ces transformations forme un groupe à $6 + 4 = 10$ paramètres, appelé *groupe de Poincaré*.

Le groupe de Poincaré est le groupe des symétries relativistes remplaçant le groupe de Galilée. On peut noter que les deux groupes sont générés par 10 paramètres.

Chapitre 7

Formulation covariante de l'Electrodynamique

Le but de ce chapitre est de formuler l'électrodynamique et la mécanique d'une manière *manifestement covariante*, c'est-à-dire d'une manière qui fait que l'invariance sous transformation de Lorentz est manifeste.

Une analogie peut être faite avec \mathbb{R}^3 et la symétrie de rotation. En effet, en considérant une matrice 3×3 orthogonale

$$O \in O(3) = \{O \in \text{Mat} \mid \det(O) \neq 0, O^T O = \mathbf{1} = O O^T\}$$

et un vecteur

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

se transformant sous rotation comme

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = O\mathbf{A}, \quad (7.1)$$

la quantité $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ est invariante sous rotation :

$$\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' = \mathbf{A}'^T \mathbf{B}' = \mathbf{A}^T O^T O \mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ est appelé un *scalaire*. Il convient donc de différencier les *vecteurs*, qui se transforment selon l'équation (7.1), et les *scalaires* qui sont invariants sous cette transformation. Par exemple :

- $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur.
- $\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$ est un vecteur.
- $\nabla \cdot \mathbf{A}$ est un scalaire.
- $\nabla \Phi$ est un vecteur $\nabla \wedge \mathbf{A}$ et $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ sont tous deux des vecteurs.

Exemple : La mécanique Newtonienne est manifestement invariante sous rotation :

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V$$

$\ddot{\mathbf{x}}$ et ∇ étant tous deux des vecteurs et V un scalaire, le membre de gauche et celui de droite de l'équation se transforment de la même manière sous rotations.

7.1 Vecteurs contravariants et covariants

Le but est maintenant de faire la même chose pour le groupe de Lorentz $O(1,3)$. Puisque la matrice G n'est pas la matrice unité, il est utile de garder la trace des indices. On peut alors différencier deux types de vecteurs.

Le premier type de vecteur est le vecteur dit *contravariant* :

$$x^\mu \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

On notera que l'indice μ d'un vecteur contravariant est toujours écrit en haut. Un tel vecteur se transforme comme :

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (7.3)$$

A nouveau, la somme est sous-entendue sur l'indice répété ν . Cette expression n'est rien d'autre que la notation en composante de l'équation $\hat{\mathbf{x}}' = \Lambda \hat{\mathbf{x}}$.

Un quadrivecteur contravariant est donc un ensemble de quatre quantités se transformant comme l'équation (7.3).

Par exemple, le *quadrivecteur*

$$J^\mu \equiv \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{J} \end{pmatrix}$$

et le *quadripotential*

$$A^\mu \equiv \begin{pmatrix} \Phi \\ c\mathbf{A} \end{pmatrix}$$

sont tous deux des quadrivecteurs contravariants. Dans la même logique, on dit qu'un tenseur contravariant $T^{\mu\nu}$ est un ensemble de 16 quantités transformant comme :

$$T^{\mu\nu} \longrightarrow T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma T^{\rho\sigma}$$

Ce tenseur transforme donc selon l'équation (7.3) pour chaque indice.

Deuxièmement, un vecteur *covariant* V_μ est un ensemble de 4 quantités se transformant sous le groupe de Lorentz comme :

$$V_\mu \longrightarrow V'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu V_\nu \quad (7.4)$$

Encore une fois, cette expression n'est rien d'autre que la notation en composante de $\hat{\mathbf{V}}' = (\Lambda^{-1})^T \hat{\mathbf{V}}$. Cependant, on notera la position des indices. Un vecteur covariant est toujours écrit avec ses indices placés en bas. De plus, la position des indices de Λ sera également importante par la suite. Cette différence dans la position des indices n'était pas importante dans le cas tridimensionnels. Pour les matrices orthogonales, on a $(O^{-1})^T = O$: tous les vecteurs transforment dans la même façon, et donc il n'y a pas besoin de distinguer entre vecteurs contravariants et vecteurs covariants.¹

1. Une petite remarque de théorie des groupes. Considérons deux référentiels \mathcal{O} et \mathcal{O}' reliés par la transformation Λ_1 , et un troisième référentiel \mathcal{O}'' relié à \mathcal{O}' par Λ_2 . Pour un vecteur contravariant, en utilisant, $\hat{\mathbf{V}}' = \Lambda_1 \hat{\mathbf{V}}$ et $\hat{\mathbf{V}}'' = \Lambda_2 \hat{\mathbf{V}}'$, on déduit $\hat{\mathbf{V}}'' = \Lambda_2 \Lambda_1 \hat{\mathbf{V}}$. Le changement de référentiel entre \mathcal{O} et \mathcal{O}'' est donc décrit par le produit $\Lambda_2 \Lambda_1$. Pour un vecteur covariant $\hat{\mathbf{W}}$, en utilisant, $\hat{\mathbf{W}}' = (\Lambda_1^{-1})^T \hat{\mathbf{W}}$ et $\hat{\mathbf{W}}'' = (\Lambda_2^{-1})^T \hat{\mathbf{W}}'$, on en déduit $\hat{\mathbf{W}}'' = (\Lambda_2^{-1})^T (\Lambda_1^{-1})^T \hat{\mathbf{W}} = ((\Lambda_2 \Lambda_1)^{-1})^T \hat{\mathbf{W}}$. Également dans ce cas, on trouve que la combinaison de deux transformations est correctement décrite par $\Lambda_2 \Lambda_1$ (son inverse transposé) : on voit que la multiplication du groupe est satisfaite dans la transformation d'un vecteur covariant. Plus techniquement, on dit que la transformations des vecteurs contravariants et covariants fournissent deux différentes *représentations* du groupe de Lorentz. On notera, par contre, que d'autres lois de transformation comme $\hat{\mathbf{V}}' = \Lambda_1^T \hat{\mathbf{V}}$ ou $\hat{\mathbf{V}}' = \Lambda_1^{-1} \hat{\mathbf{V}}$ ne représentent pas le groupe. Pourquoi ?

La matrice G est quant à elle indiquée en composantes par $G^{\mu\nu}$, avec :

$$G^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$G^{\mu\nu}$ est appelé la *métrique de Minkovski*. La condition $\Lambda G \Lambda^T = G$ devient donc² :

$$\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma G^{\rho\sigma} = G^{\mu\nu}$$

Cela implique que la métrique est un tenseur invariant d'ordre deux. De manière équivalente, on a :

$$(\Lambda^T)^{-1} G^{-1} \Lambda^{-1} = G^{-1} \quad (7.5)$$

Il faut noter que G étant diagonale, avec que des 1's et -1's on a $G = G^{-1}$. On indique $G^{-1} \equiv G_{\mu\nu}$ et donc, en composantes, (7.5) devient

$$(\Lambda^T)^{-1}{}^\rho{}_\mu (\Lambda^T)^{-1}{}^\sigma{}_\nu G_{\rho\sigma} = G_{\mu\nu}$$

On utilisera aussi les relations $\Lambda G = G(\Lambda^T)^{-1}$ et $(\Lambda^T)^{-1} G^{-1} = G^{-1} \Lambda$ qui s'écrivent en composantes respectivement comme

$$\Lambda^\mu{}_\rho G^{\rho\nu} = G^{\mu\sigma} (\Lambda^T)^{-1}{}^\nu{}_\sigma \quad \text{et} \quad (\Lambda^T)^{-1}{}^\rho{}_\mu G_{\rho\nu} = G_{\mu\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu \quad (7.6)$$

Ayant définis les vecteurs covariants et contravariants, on peut se demander s'il existe une possibilité de passer de l'un à l'autre. Cette possibilité existe grâce à la métrique. Etant donné un vecteur contravariant V^μ ,

$$V_\mu = G_{\mu\nu} V^\nu \quad (7.7)$$

est un vecteur covariant.

Démonstration. Afin de le prouver, il faut vérifier la loi de transformation de V_μ . On a :

$$\begin{aligned} V'_\mu &= G_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho V^\rho \\ &= (\Lambda^T)^{-1}{}^\nu{}_\mu G_{\nu\rho} V^\rho \\ &= (\Lambda^T)^{-1}{}^\nu{}_\mu V_\nu \end{aligned}$$

On retrouve bien la loi de transformation du vecteur covariant (équation (7.4)).³

□

Vice-versa, étant donnée un vecteur covariant A_ν , on peut prouver de manière équivalente que

$$A^\mu = G^{\mu\nu} A_\nu$$

transforme comme un vecteur contravariant.

2. Puisque l'on travaille en composante, l'ordre n'a plus d'importance, chaque composante étant un nombre réel, ie $\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma G^{\rho\sigma} = \Lambda^\nu{}_\sigma \Lambda^\mu{}_\rho G^{\rho\sigma} = \Lambda^\nu{}_\sigma G^{\rho\sigma} \Lambda^\mu{}_\rho$

3. Pour ceux ayant de la peine avec les indices : on peut indiquer un vecteur covariant comme $\tilde{\mathbf{V}}$ et écrire (7.7) comme $\tilde{\mathbf{V}} = G^{-1} \hat{\mathbf{V}}$. Le changement de référentiel s'écrit $\tilde{\mathbf{V}}' = G^{-1} \Lambda \hat{\mathbf{V}} = \Lambda^{-1T} G^{-1} \hat{\mathbf{V}} = \Lambda^{-1T} \tilde{\mathbf{V}}$, q.e.d.

$G_{\mu\nu}$ et $G^{\mu\nu}$ peuvent donc être utilisées pour *monter* ou *descendre* les indices. Explicitement, étant donné un vecteur contravariant

$$V^\mu \equiv \begin{pmatrix} V^0 \\ V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{pmatrix},$$

son équivalent covariant sera

$$V_\mu \equiv \begin{pmatrix} V^0 \\ -V^1 \\ -V^2 \\ -V^3 \end{pmatrix},$$

Maintenant que l'on connaît les transformations des différents vecteurs et comment ils sont reliés par la métrique, on peut s'intéresser à construire des scalaires.

Il est très facile de montrer que

$$S = V^\mu W_\mu$$

est un scalaire.

Démonstration. Pour montrer que S est un scalaire, on doit montrer que $S = S'$.

$$\begin{aligned} S' &= V'^\mu W'_\mu \\ &= \Lambda^\mu_\rho V^\rho (\Lambda^{-1})^T{}^\sigma_\mu W_\sigma \\ &= \Lambda^\mu_\rho (\Lambda^{-1})^\sigma_\mu V^\rho W_\sigma \\ &= (\Lambda^{-1})^\sigma_\rho V^\rho W_\sigma \\ &= \delta^\sigma_\rho V^\rho W_\sigma \\ &= V^\rho W_\rho \end{aligned}$$

On a utilisé le fait qu'en notation matricielle

$$S' = V'^T W' = V^T \Lambda^T (\Lambda^{-1})^T W = V^T W$$

De plus, à la dernière ligne on a bien $V^\rho W_\rho = V^\mu W_\mu$, car on rappelle que la somme étant sur les indices répétés, l'appellation de l'indices n'a aucune importance. \square

En particulier $V^\mu V_\mu = V^\mu V^\nu G_{\mu\nu}$ est invariant. Cet objet est appelé la norme invariante de Lorentz d'un vecteur. On peut noter que pour $x^\mu \equiv (ct, \mathbf{x})$, on a :

$$x^\mu x_\mu = x^\mu x^\nu G_{\mu\nu} = (ct)^2 - |\mathbf{x}|^2$$

Cette quantité est la même dans tous les référentiels. On dit que la structure de l'espace temps est causale. Ce sujet sera approfondi plus loin.

7.1.1 Transformation des dérivées

De la même manière que le gradient ∇ est un vecteur, il est possible de mettre $\hat{\partial} = (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla)$ sous la forme d'un quadrivecteur. On a déjà vu à l'équation (6.27) que

$$\hat{\partial} \longrightarrow \hat{\partial}' = (\Lambda^T)^{-1} \hat{\partial}$$

Le vecteur

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (7.8)$$

est appelé *quadrigradient* et se transforme donc comme un quadrivecteur covariant. Il est usuel d'utiliser la notation

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu$$

On notera que puisque ∂_μ est covariant, son indice est en bas.

Remarque : Malgré le fait que le quadrigradient soit covariant, la partie spatiale ne contient pas de signe moins.

Exemple :

- Etant donné un vecteur contravariant V^μ , $\partial_\mu V^\mu$ est un scalaire.
- Etant donné un champ scalaire $\psi(x)$, $\partial_\mu \psi(x)$ est un vecteur covariant. En effet, puisque $\psi(x) = \psi'(x')$, on a :

$$\begin{aligned} V'_\mu &= \partial'_\mu \psi'(x') = (\Lambda_\mu^\nu \partial_\nu) \psi(x) = \Lambda_\mu^\nu (\partial_\nu \psi(x)) \\ &= \Lambda_\mu^\nu V_\nu \end{aligned}$$

7.2 Les équations de Maxwell sous forme covariante

Maintenant que l'on connaît les lois de transformation des différents quadrivecteurs, on peut tenter de trouver une forme covariante des différentes équations régissant l'électrodynamique. Avec les définitions faites à la section précédente, on voit que trouver une formulation covariante revient à trouver une expression telle que si un ou plusieurs indices apparaissent dans le membre de gauche d'une équation, ces mêmes indices doivent apparaître dans le membre de droite, et tous les autres indices doivent être contractés.

Le fait qu'une équation soit covariante ou contravariante n'a pas d'importance, puisqu'on peut baisser ou monter les indices grâce à la métrique. Par exemple,

$$\begin{aligned} A^{\mu\nu} &= \alpha B^{\mu\nu} + \beta C_\kappa D^{\kappa\mu\nu} \Leftrightarrow \\ \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma A^{\rho\sigma} &= \alpha \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma B^{\rho\sigma} + \beta C_\kappa \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma D^{\kappa\rho\sigma} \end{aligned}$$

est manifestement covariante, tandis que

$$A^{\mu\nu} = \alpha B^{\mu\nu} + \beta C^{\kappa\mu\nu}$$

ne l'est pas, κ apparaissant dans le membre de droite mais pas dans celui de gauche.

Afin de trouver les expressions manifestement covariantes de l'électromagnétisme, on peut commencer par l'équation de continuité :

$$0 = \dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} c\rho + \nabla \cdot \mathbf{J} \equiv \partial_\mu J^\mu$$

La conservation du courant prend naturellement la même forme dans tous les référentiels.

D'une manière similaire, on peut trouver l'expression de la jauge de Lorenz :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{c^2} \dot{\Phi} + \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{c} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi + \nabla \cdot (c\mathbf{A}) \right) \\ &= \frac{1}{c} \partial_\mu A^\mu = 0 \end{aligned}$$

A nouveau, la jauge de Lorenz est naturellement invariante de Lorentz dans le formalisme covariant. Si elle est satisfaite dans un référentiel, elle l'est dans tous les référentiels.

Maintenant que l'on connaît l'expression de la jauge de Lorenz dans le formalisme covariant, les équations de Maxwell dans cette jauge (équation (2.12)) prennent une forme manifestement covariante, ie la forme est la même dans tous les référentiels :

$$\begin{cases} \square A^\mu &= \frac{1}{\varepsilon_0 c} J^\mu \\ \partial_\mu A^\mu &= 0 \end{cases}$$

Bien que l'on aie réussi à trouver une formulation invariante de Lorentz des équations de Maxwell, on aimerait également trouver une formulation semblable pour les champs électrique et magnétique.

A cette fin, on est amené à considérer le *tenseur électromagnétique*, ou *tenseur de Maxwell*⁴ :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (7.9)$$

Propriétés :

- $F_{\mu\nu}$ est clairement un tenseur covariant :

$$F_{\mu\nu} \xrightarrow{\text{Lorentz}} F'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu F_{\rho\sigma}$$

- $F_{\mu\nu}$ est trivialement antisymétrique :

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$$

Ce tenseur étant une matrice 4×4 antisymétrique, il a 6 composantes indépendantes.

- $F_{\mu\nu}$ est invariant sous transformation de jauge :

$$\begin{aligned} A_\mu &\xrightarrow{\text{jauge}} A_\mu + \partial_\mu \alpha \\ F_{\mu\nu} &\xrightarrow{\text{jauge}} F_{\mu\nu} + \partial_\nu \partial_\mu \alpha - \partial_\mu \partial_\nu \alpha = F_{\mu\nu} \end{aligned}$$

par les propriétés de commutation des dérivées.

Le fait que le tenseur électromagnétique ait 6 paramètres indépendants, soit invariant de jauge et exprimé par des dérivées des potentiels Φ , \mathbf{A} indique qu'il est composé des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} . En effet, on peut vérifier que

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

Par exemple, on peut voir que :

$$\begin{aligned} F_{0i} &= \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = -\dot{\mathbf{A}}^i - (\nabla \Phi)^i \\ &= (\mathbf{E})^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \partial_i A_j - \partial_j A_i = -c(\nabla_i \mathbf{A}^j - \nabla_j \mathbf{A}^i) \\ &= -c\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij}\nabla_i \mathbf{A}^j \\ &= -c\varepsilon_{ijk}\mathbf{B}^k \end{aligned}$$

4. On notera que $A_\mu = G_{\mu\nu} A^\nu \equiv (\Phi, -c\mathbf{A})$

Ici, les composantes \mathbf{A}^i , $i = 1, 2, 3$ correspondent aux composantes des trivecteurs, alors que les composantes $A^i = -A_i$, $i = 1, 2, 3$ correspondent aux composantes du quadrivecteur.

Une fois le tenseur de Maxwell défini, il est possible de réécrire les équations de Maxwell dans la formulation covariante, peu importe le choix de jauge.

Les équations (MI) et (MII) dépendant des charges peuvent être réécrites :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c\varepsilon_0} J^\nu \quad (7.11)$$

avec l'équivalent contravariant du tenseur de Maxwell (7.10) :

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

On peut noter que seule les composantes du champ électrique changent de signe par rapport à la version covariante.

On peut également remarquer que l'équation (7.11) est sous une forme manifestement covariante. En effet, le seul indice non contracté est ν , et il apparait des deux côté de l'équation.

Quant aux équations homogènes (MIII) et (MIV), elles peuvent être réécrites

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu F_{\rho\sigma} = 0 \quad (7.13)$$

où

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu\nu\rho\sigma \text{ forment une permutation paire de } 0123 \\ -1 & \text{si } \mu\nu\rho\sigma \text{ forment une permutation impaire de } 0123 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.14)$$

est le tenseur complètement antisymétrique (tenseur de Levi-Civita) d'ordre 4. Pour établir l'invariance de l'équation (7.13), on doit montrer que $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ est un tenseur invariant. Une fois cela fait, cette équation de Maxwell est invariante de Lorentz, puisque tous les indices sont contractés. Cette démonstration est laissée en exercice.

Chapitre 8

Formulation covariante de la mécanique Newtonienne

Maintenant que l'on a trouvé une formulation manifestement covariante de l'électrodynamique, le but de ce chapitre est de chercher une formulation équivalente pour la mécanique Newtonienne.

8.1 Structure de l'espace temps

On considère les deux événements x_1^μ et x_2^μ dans le référentiel d'un observateur \mathcal{O} . La *séparation spatio-temporelle* est définie comme :

$$\Delta_{12}^\mu = x_1^\mu - x_2^\mu$$

Sa norme dans l'espace de Minkowski est appelé l'*intervalle* et est donnée par :

$$\begin{aligned} S_{12}^2 &= (\Delta_{12}^\mu)^2 = (x_1^\mu - x_2^\mu)(x_{1\mu} - x_{2\mu}) \\ &= c^2(t_1 - t_2)^2 - (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2 \end{aligned} \quad (8.1)$$

S_{12}^2 ayant tous ses indices contractés, c'est un invariant de Lorentz, ie il est le même dans tous les référentiels. L'intervalle peut prendre 3 catégories de valeurs :

$S_{12}^2 > 0$: Dans ce cas, on a $c|t_1 - t_2| > |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$. On dit qu'il s'agit d'une *séparation de type temps*, c'est-à-dire qu'il est possible d'aller de l'événement 1 à l'événement 2 en ayant une vitesse $v < c$. Les événements 1 et 2 ont une relation causale. Il s'agit de l'intervalle S_{12} sur la figure 8.1.

$S_{12}^2 < 0$: Cette fois, on a $c|t_1 - t_2| < |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$. Il s'agit à présent d'une séparation dite de *type espace*. Les événements 1 et 2 ne peuvent pas être reliés en allant à une vitesse inférieure à celle de la lumière. Ils n'ont pas une relation causale. Il s'agit de l'intervalle S_{13} sur la figure 8.1.

$S_{12}^2 = 0$: Dans ce cas, on parle finalement d'une *séparation de type lumière*. Les événements 1 et 2 ne peuvent être reliés que par un rayon de lumière. Il s'agit de l'intervalle S_{14} sur la figure 8.1.

8.1.1 Temps propre

Il est aisé de remarquer qu'étant donné Δ^μ , la condition $\Delta^2 = \text{const} > 0$ décrit un hyperboloïde dans le cône de lumière, à l'intérieur du cône de lumière et ayant comme asymptote le cône de lumière.

Avec les définitions faites, il semble maintenant naturel de changer le membre de gauche de la force de Lorentz de la manière suivante :

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \longrightarrow mc^2 \frac{d^2 x^\mu}{ds^2}$$

Maintenant que l'on a une expression pour le membre de gauche, on peut s'intéresser au membre de droite.

Grâce au chapitre 7, on sait que les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont englobés dans le tenseur de Maxwell. On devrait donc trouver un quadrivecteur en contractant $F^{\mu\nu}$ avec un autre quadrivecteur. La seule quantité quadrivectorielle de la quelle on dispose est la quadrivitesse. Il faut aussi noter que la vitesse apparait déjà dans la force de Lorents non-relativiste. La quadrivitesse doit être la bonne quantité.

Au premier ordre en $F_{\mu\nu}$, la seule option est ¹

$$F^{\mu\nu} u_\nu$$

En effet, pour $\mu = i \in \{1, 2, 3\}$, on a :

$$\begin{aligned} F^{i\nu} u_\nu &= F^{i0} u_0 + F^{ij} u_j \\ &= -F_{i0} u^0 - F_{ij} u^j \\ &= \mathbf{E}_i \gamma c + \gamma c (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})_i \\ &= \gamma c (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})_i \end{aligned}$$

On retrouve bien l'expression de la force de Lorentz, mis à part une correction « relativiste » due à γ (et le facteur “triviale” c). La généralisation du membre de droite est donc :

$$q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \longrightarrow \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$$

En mettant les deux généralisations ensemble, on trouve la généralisation manifestement covariante de la force de Lorentz, qui se réduit à l'expression (8.6) dans la limite $\beta \ll 1$:

$$mc^2 \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu \quad (8.10)$$

On postule à présent que cette équation est l'expression manifestement covariante des équations du mouvement d'une particule dans des champs. Bien sûr, ce postulat est en accord avec l'expérience. Cependant, il y a une quatrième équation, correspondant à $\mu = 0$. Quel sens à cette équation ?

Pour le comprendre, écrivons chaque composante explicitement :

1. Composante temporelle :

$$\begin{aligned} \frac{mc^2}{\sqrt{c^2 - v^2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \right) &= \gamma \frac{d}{dt} (m\gamma c) = \frac{q}{c} F^{0i} v_i \\ F^{0i} v_i &= F_{0i} v^i = \gamma (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \end{aligned}$$

ce qui peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \underbrace{q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}}_{\text{travail}} = \frac{d\mathcal{W}}{dt} \quad (8.11)$$

1. A l'ordre linéaire en $F^{\mu\nu}$ on peut écrire deux autres quadrivecteurs : $F^{\rho\sigma} u_\rho u_\sigma u^\mu$ et $F^\rho_\sigma u^\sigma$. Ces deux quadrivecteurs sont nuls vu l'anti-symétrie du tenseur de champ ($F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$). Par exemple, étant donné que $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$, on a $F^\rho_\sigma \equiv F^{\rho\nu} G_{\rho\nu} = -F^{\nu\rho} G_{\nu\rho} = -F^{\rho\nu} G_{\rho\nu}$ et donc $F^\rho_\rho = 0$.

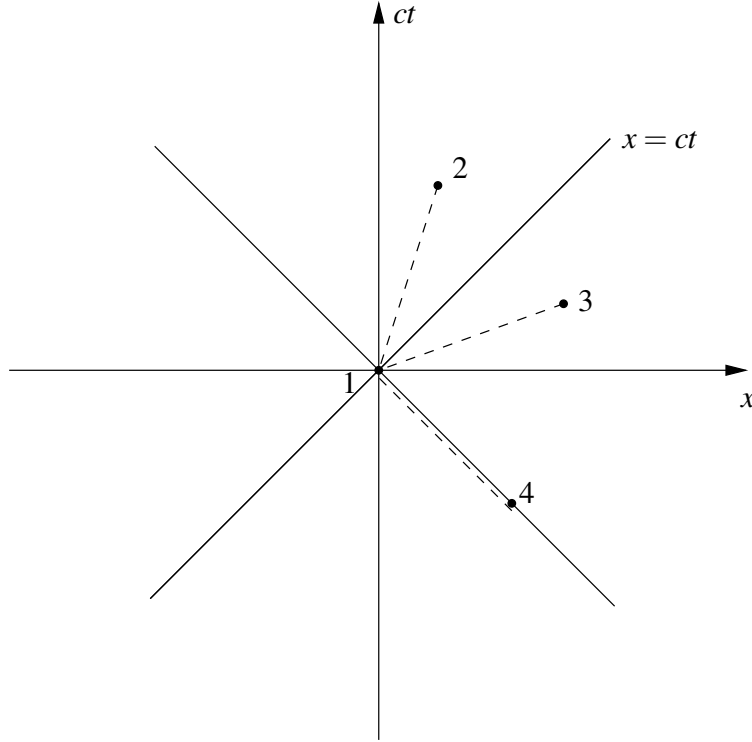


FIGURE 8.1 – Cone de lumière et les différents types de séparations spatio-temporelle. S_{12} est de type temps, S_{13} est de type espace et S_{14} est de type lumière.

En particulier, étant donné Δ^μ , si $S_{12}^2 > 0$, il existe un référentiel $\tilde{\mathcal{O}}$ où

$$\Delta^\mu = (\pm\sqrt{S_{12}^2}, \mathbf{0}) \quad (8.2)$$

ie où les deux événements sont au même point dans l'espace mais à des temps différents. Dans ce cas, on définit le *temps propre* $\tau = \sqrt{S_{12}^2}/c$.

Il est également possible de définir un intervalle infinitésimal en utilisant un quadrivecteur différentiel $x^\mu \rightarrow dx^\mu$:

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu \quad (8.3)$$

Par exemple, pour une particule ayant une trajectoire

$$\begin{cases} x^0 &= ct \\ x^i &= x^i(t) \end{cases}$$

l'intervalle différentiel est donné par :

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - \dot{x}^2 dt^2 \\ &= \sqrt{c^2 - v^2} dt^2 \end{aligned} \quad (8.4)$$

A partir de là, on peut déduire que le temps dans le référentiel où la particule est instantanément au repos correspond au temps propre

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \frac{dt}{\gamma}. \quad (8.5)$$

8.2 De Newton (et Maxwell) à Einstein

Dans le chapitre précédent, on a discuté de la formulation manifestement covariante de l'électrodynamique. On notera que l'on a en aucun cas modifié les équations de Maxwell. La relativité d'Einstein revient simplement à identifier la symétrie (Les transformations de Lorentz) sous laquelle les équations de Maxwell ont une forme invariante.

Dans le cas de la mécanique Newtonienne, les choses sont différentes. En effet, elles est invariante sous transformations de Galilée, et non de Lorentz. Si l'on veut un principe de relativité englobant à la fois la mécanique et l'électrodynamique, on *doit* modifier la mécanique pour la rendre manifestement covariante sous transformation de Lorentz.

Un bon point de départ est la force de Lorentz. Pour de petites vitesses (limite Newtonienne), on a :

$$m \frac{d\mathbf{x}}{dt} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad (8.6)$$

Le but est de généraliser cette équation dans le cas relativiste. Pour ce faire, l'idée est de l'écrire en termes de quadrivecteurs pour les deux membres de l'équation.

Premièrement, on remarque que $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ et $\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$ se transforment de manière compliquée. Cependant, dx^μ est un quadrivecteur et se transforme donc de manière simple.

Deuxièmement, dt mesure l'histoire de la trajectoire de la particule, mais ce n'est pas un invariant de Lorentz. D'un autre côté,

$$\sqrt{ds^2} = \sqrt{dx^\mu dx_\mu}$$

est à la fois un invariant de Lorentz et se réduit à

$$\sqrt{c^2 dt^2} = c dt$$

dans la limite $\beta \rightarrow 0$. L'intervalle semble donc un candidat naturel pour remplacer dt dans une expression des équations du mouvement manifestement covariantes. En reprenant l'expression (8.4), on déduit :

$$ds = \sqrt{c^2 - v^2} dt = c \frac{dt}{\gamma}$$

Il est maintenant naturel de définir la *quadrivitesse* u^μ :

$$u^\mu = c \frac{dx^\mu}{ds} \equiv \gamma \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

Avec cette définition, on remarque immédiatement que la norme dans l'espace de Minkovski de la quadrivitesse est une constante :

$$u^\mu u_\mu = c^2 \frac{dx^\mu dx_\mu}{ds^2} = c^2$$

De plus, on peut également définir la *quadriaccélération* :

$$a^\mu = c^2 \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = c \frac{du^\mu}{ds} \quad (8.8)$$

On peut voir que pour $\beta \ll 1$, ces quantités se réduisent à :

$$\begin{aligned} u^\mu &\longrightarrow \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \\ a^\mu &\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.9)$$

Il est naturel (on en est vraiment obligé!) d'interpréter cette équation comme l'« expression » de la conservation de l'énergie : le changement d'énergie de la particule $d\mathcal{E}$ est égale au travail $d\mathcal{W}$ fait par le champ. L'énergie est donc donnée par

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m\gamma c^2,$$

et l'équation (8.11) devient $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$. On notera que pour $v = 0$, on trouve la formule bien connue d'Einstein :

$$\mathcal{E} = mc^2$$

2. Pour les composantes spatiales :

$$mc^2\gamma \frac{d}{cdt} \left(\frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{q}{c}\gamma c(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

soit :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{p} &= \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m\gamma\mathbf{v} \end{aligned}$$

Donc $\mathbf{p} \equiv m\gamma\mathbf{v}$ est la forme relativiste de l'impulsion. Il faut remarquer que pour des petites vitesses, on a $\gamma \rightarrow 1$ et on revient à la forme non relativiste $m\mathbf{v}$. Tous ces résultats nous permettent d'introduire le *quadri-vecteur impulsion* :

$$p^\mu = mu^\mu, \quad p^0 = \frac{\mathcal{E}}{c}, \quad p^i \rightarrow \mathbf{p}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2} \\ \mathbf{p} &= m\gamma\mathbf{v} \end{aligned}$$

Il faut noter que $p^\mu p_\mu = m^2c^2 > 0$, qui est invariant, correspond simplement à la masse de la particule. Dans le référentiel de repos de la particule $p^\mu = (mc, \mathbf{0})$. Pour finir, avec la quadri-impulsion, on peut écrire l'équation (8.10) comme

$$c \frac{dp^\mu}{ds} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu. \quad (8.12)$$

8.3 Applications pour des cas simples

Dans cette section, on applique les résultats obtenus précédemment à deux cas simples.

8.3.1 Champ électrique constant

On considère le cas d'un champ électrique orienté suivant l'axe ($\mathcal{O}x$) :

$$\begin{cases} E_x \neq 0 \\ E_y = E_z = 0 \end{cases} \quad (8.13)$$

On suppose également $v_{in}^z = 0$. On a alors les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = qE \\ \frac{dp_y}{dt} = \frac{dp_z}{dt} = 0 \end{cases} \quad (8.14)$$

dont les solutions sont :

$$\begin{cases} p_x = qEt + p_x^0 \\ p_y = p_y^0 \end{cases} \quad (8.15)$$

L'expression de l'énergie est donc :

$$\mathcal{E} = \sqrt{m^2c^4 + (p_y^0)^2c^2 + (qEt + p_x^0)^2c^2}$$

Quant à la vitesse, on a :

$$\mathbf{v} = c^2 \frac{\mathbf{p}}{\mathcal{E}} = \frac{[(qEt + p_x^0)\mathbf{e}_x + p_y^0\mathbf{e}_y] c^2}{\sqrt{m^2c^4 + (p_y^0)^2c^2 + (qEt + p_x^0)^2c^2}}$$

On peut noter que pour $c \rightarrow \infty$, on trouve :

$$\mathbf{v} = c^2 \frac{\mathbf{p}}{\mathcal{E}} = \frac{[(qEt + p_x^0)\mathbf{e}_x + p_y^0\mathbf{e}_y] c^2}{mc^2} = \left(v_x^0 + \frac{qEt}{m}\right) \mathbf{e}_x + v_y^0 \mathbf{e}_y = \mathbf{v}_0 + \frac{q\mathbf{E}t}{m}$$

qui est l'expression de la vitesse non-relativiste.

La trajectoire est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = c^2 \frac{qEt + p_x^0}{\sqrt{m^2c^4 + (p_y^0)^2c^2 + (qEt + p_x^0)^2c^2}} \\ \frac{dy}{dt} = c^2 \frac{p_y^0}{\sqrt{m^2c^4 + (p_y^0)^2c^2 + (qEt + p_x^0)^2c^2}} \end{cases}$$

On observe que pour $t \rightarrow \infty : v \rightarrow c$. L'équation pour dx/dt a comme solution (avec une certaine condition initiale) :

$$x = \frac{1}{qE} \sqrt{m^2c^4 + (p_y^0)^2c^2 + (qEt + p_x^0)^2c^2}$$

Donc si $t \rightarrow \infty$, $x = ct$.

En utilisant les trois dernières équations, on peut aussi écrire :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{(qEx)^2 - \mathcal{E}_0^2}}{cp_y^0} \quad \mathcal{E}_0^2 = m^2c^4 + (p_y^0)^2c^2$$

qui lorsqu'intégrée donne l'équation de la trajectoire (on a choisi la trajectoire passant par le point $(x, y) = (0, 0)$)

$$x(y) = \frac{\mathcal{E}_0}{qE} \left(\cosh\left(\frac{qEy}{cp_y^0}\right) - 1 \right). \quad (8.16)$$

Dans la limite $c^2 \rightarrow \infty$, on retrouve le résultat Newtonien (utiliser $\mathcal{E}_0 \rightarrow mc^2$ et développer le cosinus hyperbolique).

$$x(y) = \frac{qEm}{2(p_y^0)^2} y^2. \quad (8.17)$$

8.3.2 Champ magnétique constant suivant ($\mathcal{O}z$)

Dans ce cas, on a l'expression pour la quantité de mouvement :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Par contre on trouve que l'énergie de la particule est constante (et donc la norme de sa vitesse est aussi constante) :

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow v = \text{cst} , \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{cst}$$

L'accélération est alors donnée par :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \times \omega_B , \omega_B = \frac{q\mathbf{B}}{\gamma m} = \frac{q\mathbf{B}c^2}{\mathcal{E}}$$

Où ω_B est appelé la *fréquence cyclotron*. On obtient les équations suivantes pour la vitesse :

$$\begin{cases} \frac{dv_z}{dt} = 0 \\ \frac{dv_x}{dt} = v_y \omega_B \\ \frac{dv_y}{dt} = -v_x \omega_B \end{cases} , \quad (8.18)$$

qui ont pour solution :

$$\begin{cases} v_x = v_{\perp} \sin(\omega_B t + \phi) \\ v_y = v_{\perp} \cos(\omega_B t + \phi) \end{cases} \quad (8.19)$$

ce qui donne pour les coordonnées (avec une certaine condition initiale) :

$$\begin{cases} z = v_z t \\ x = -\frac{v_{\perp}}{\omega_B} \cos(\omega_B t + \phi) \\ y = \frac{v_{\perp}}{\omega_B} \sin(\omega_B t + \phi) \end{cases} \quad (8.20)$$

Le mouvement obtenu est une spirale, représentée à la figure 8.2. Finalement, dans le cas où

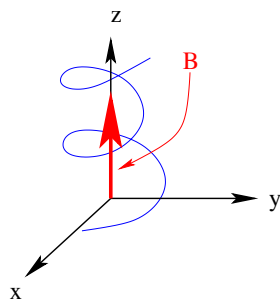


FIGURE 8.2 – Mouvement d'une particule dans un champ magnétique constant.

$v_z = 0$, le rayon est donné par : $r_B = \frac{vm}{qB\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v}{\omega_B}$.

8.4 Généralisation relativiste de la formule de Larmor

Au chapitre 4, on a déjà trouvé une solution « exacte » des champs associés aux potentiels de Liénard-Wiechert (équations (4.11) et (4.12)). Avec l'expression du vecteur de Poynting, on devrait en principe être capable de calculer la puissance émise P par une particule chargée en mouvement arbitraire. On l'a déjà fait dans le cas particulier –et plus simple– d'une particule linéairement accélérée, mais on n'a pas effectué de calcul général.

On peut noter qu'une particule accélérée émet de la quantité de mouvement tridimensionnelle. Ce peut être prouvé en utilisant l'expression –compliquée– du flux de quantité de mouvement tridimensionnel transporté par un champ électromagnétique (c'est un analogue du vecteur de Poynting pour la quantité de mouvement).

Cependant, on peut trouver la forme de l'expression de la formule de Larmor en utilisant l'invariance relativiste pour à la fois l'énergie et la quantité de mouvement. On peut organiser notre raisonnement en étapes :

1. Pour une particule se déplaçant à faible vitesse, on a trouvé l'expression (4.13) :

$$P = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{v}^2 \quad (8.21)$$

L'expression que l'on cherche doit donc réduire à celle-ci dans le cas $v \ll c$. Pour la discussion qui suit, il est plus intéressant d'écrire l'équation (8.21) sous forme différentielle :

$$d\mathcal{E} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{v}^2 dt \quad (8.22)$$

2. A partir de la forme des champs de radiations de Liénard-Wiechert, linéaires selon l'accélération $\dot{\mathbf{v}}$, et du fait que le vecteur de Poynting est quadratique en \mathbf{E}, \mathbf{B} , on sait que le résultat exact doit être quadratique selon l'accélération.
3. On doit donc généraliser l'équation (8.22) en utilisant l'expression manifestement covariante de $\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, \dots$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\longrightarrow u^\mu = c \frac{dx^\mu}{ds} \\ \dot{\mathbf{v}} &\longrightarrow a^\mu = c^2 \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = c \frac{du^\mu}{ds} \end{aligned}$$

On peut observer que depuis l'équation (8.9), pour de faibles vitesses, on a $a_\mu a^\mu \rightarrow -\mathbf{a}^2$. Il sera aussi utile par la suite d'utiliser la relation

$$a^\mu u_\mu = \frac{c}{2} \frac{d}{ds} (u^\mu u_\mu) = \frac{c}{2} \frac{d}{ds} (c^2) = 0$$

4. L'énergie $d\mathcal{E}$ ($\equiv P dt$) et l'impulsion $d\mathbf{p}$ émis sous forme de radiation le long d'un « morceau » dx^μ le long de la trajectoire doivent former un quadrivecteur

$$dP^\mu = \left(\frac{d\mathcal{E}}{c}, d\mathbf{p} \right)$$

En utilisant les quadrivecteurs à disposition (a^μ et dx^μ), on peut écrire l'expression covariante la plus générale qui soit quadratique en a^μ et généralisant l'équation (8.22)

$$dP^\mu = c_1 \left(\frac{du^\nu}{ds} \frac{du_\nu}{ds} \right) dx^\mu + c_2 \frac{du^\mu}{ds} \left(\frac{du_\nu}{ds} dx^\nu \right)$$

Où c_1, c_2 sont des constantes. Cependant, le deuxième terme (proportionnel à c_2) est identiquement nul. En effet, on peut remarquer que

$$\frac{du^\nu}{ds} dx^\nu = \frac{du^\nu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} ds = a^\nu u_\nu ds = 0$$

De plus, en fixant la limite non relativiste, on a une condition sur la constante :

$$c_1 = -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

On a bien trouvé la *généralisation manifestement covariante de la formule de Larmor* :

$$dP^\mu = -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{du^\nu}{ds} \frac{du_\nu}{ds} \right) dx^\mu \quad (8.23)$$

la composante temporelle $\mu = 0$ de cette équation donne bien l'énergie émise par radiation. De plus, on trouve que la puissance émise $d\mathcal{E}/dt$ est une quantité scalaire (car tous les indices sont contractés)

$$P = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = c^2 \frac{dP^0}{dx^0} = -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{du^\nu}{ds} \frac{du_\nu}{ds} \right) \quad (8.24)$$

La puissance émise P sur une portion de la trajectoire dx^μ est un invariant de Lorentz. On note cependant que si le terme proportionnel à c_2 n'était pas nul, ce ne serait pas le cas. On aurait en effet la somme d'un scalaire et d'un tenseur d'ordre deux, qui n'est pas invariant.

Remarque : Dans l'expression ci-dessus, dt réfère à la trajectoire de la particule, et non à l'observateur placé à l'infini. Dans les calculs fait à la section 4.3.1, cet intervalle était indiqué par dt' .

Avec ce résultat, en calculant $(du^\mu/ds)(du_\mu/ds)$ avec un petit effort, on trouve la puissance émise par une particule en mouvement arbitraire! On a

$$c \frac{du^\mu}{ds} = \gamma \frac{d}{dt} \gamma(c, \mathbf{v}) = \gamma^4 c \left(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}, (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \boldsymbol{\beta} + \dot{\boldsymbol{\beta}}/\gamma^2 \right) \quad (8.25)$$

d'où avec quelques manipulations élémentaires² on trouve :

$$\frac{du^\nu}{ds} \frac{du_\nu}{ds} = \gamma^6 \left[|\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 - |\boldsymbol{\beta} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 \right] \quad (8.26)$$

et donc

$$P = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c} \gamma^6 \left[|\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 - |\boldsymbol{\beta} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 \right] \quad (8.27)$$

On est heureux de vérifier que, par exemple pour le cas d'une particule linéairement accélérée, on reproduit les résultats déjà obtenu. Dans le cas $\boldsymbol{\beta} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}} = 0$ et on retrouve l'équation (4.17).

Remarque : l'équation (8.23) donne automatiquement l'expression pour la quantité de mouvement émise en prenant $\mu \equiv i = 1, 2, 3$. On trouve $dP^i \propto v^i$ avec une constante de proportionnalité strictement positive. On en déduit que l'émission est faite selon la direction du mouvement, correspondant au fait que la particule est freinée par l'émission de radiations.

Pour finir il est intéressant d'écrire (8.24) en remplaçant $\frac{d^2 x^\mu}{ds^2}$ grâce aux équations du mouvement (8.10). Nous obtenons alors :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{1}{6\pi\epsilon_0 c} \frac{q^4}{m^2 c^4} F^{\mu\nu} u_\nu F_{\mu\rho} u^\rho \quad (8.28)$$

2. Il faut se rappeler que $|\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$.

8.5 Les accélérateurs

Il s'agit ici de reprendre les calculs effectués à la section ci-dessus, et de les appliquer aux cas des accélérateurs.

8.5.1 Accélérateur linéaire

Dans le cas d'un accélérateur linéaire, on a $\mathbf{E} \parallel \mathbf{v}$. On peut donc écrire :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{q^4}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^5} [F^{01}u_1 F_{01}u^1 + F^{10}u_0 F_{10}u^0] = -\frac{q^4}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^5} E^2 (v^2 - c^2) \gamma^2$$

en simplifiant, on obtient :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{q^4 E^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3}$$

qui ne dépend pas de l'énergie de la particule !

8.5.2 Radiation synchrotron

Pour un synchrotron, on est dans le cas où le champ magnétique \mathbf{B} est perpendiculaire à la vitesse de déplacement de la particule. Dans ce cas, le calcul est le suivant :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{q^4}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^5} [F^{12}u_2 F_{12}u^2 + F^{21}u_1 F_{21}u^1] = \frac{q^4}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3} \gamma^2 B^2 v^2$$

Ce qui se simplifie en :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{q^4 B^2 v^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3 \underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

Dans cette dernière expression, le facteur souligné rappelle que la radiation augmente lorsque $v \rightarrow c$. Ce qui implique que les accélérateurs circulaires ne sont pas efficaces pour de hautes énergies.

En effet, la particule perd de l'énergie en émettant des photons dans une direction tangente à sa trajectoire. On note toutefois que la radiation synchrotron a des caractéristiques particulières qui la rendent intéressante pour d'autres applications.

Chapitre 9

Champs électrique et magnétique dans un milieu macroscopique

9.1 Les équations de Maxwell macroscopiques

L'objectif de ce chapitre est de dériver les équations de l'électrodynamique macroscopique (qui ont été données par Lorentz en 1902).

Pour ce faire, on part des équations microscopiques :

$$\nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{\eta}{\epsilon_0} \quad (9.1)$$

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla \wedge \mathbf{b} - \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} \quad (9.2)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (9.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (9.4)$$

où les champs *microscopiques* sont représentés par des lettres minuscules. On rappelle également la relation

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2.$$

Pour les milieux continus, \mathbf{e} et \mathbf{b} sont, en général, des fonctions compliquées de \mathbf{x} et de t à des échelles très petites :

La distance typique de variation est la taille de l'atome est $a \sim 10^{-8} \text{cm}$, le temps typique est donc de l'ordre de

$$\tau = \frac{a}{c} = \frac{10^{-8} \text{cm}}{3 \cdot 10^{10} \text{cm/s}} \sim 10^{-18} \text{s}.$$

Expérimentalement, les ordres de grandeurs sont :

$$t \gg 10^{-18} \text{s}$$

$$L \gg 10^{-8} \text{cm}.$$

On est donc amené à introduire des quantités *macroscopiques* :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{z}) = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{e}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x} - \mathbf{z}) = \langle \mathbf{e}(\mathbf{z}) \rangle \\ \mathbf{B}(\mathbf{z}) = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{b}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x} - \mathbf{z}) = \langle \mathbf{b}(\mathbf{z}) \rangle, \end{cases} \quad (9.5)$$

où $f(\mathbf{x})$ est une fonction qui tend vers zéro lorsque $|\mathbf{x}| \geq R$, avec R grand devant les distances inter-atomiques, mais petit devant la taille de la région d'observation, comme par exemple :

1.

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi R^3}, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

2.

$$f(\mathbf{x}) = (\pi R^2)^{-3/2} e^{-r^2/R^2}$$

On notera que dans les deux cas, si $R \rightarrow 0$, on retrouve une fonction δ .

Les champs définis à l'équations (9.5) satisfont deux relations qui seront très utiles par la suite. Premièrement, en intégrant par partie :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{z}} \langle \mathbf{e}(\mathbf{z}) \rangle &= \int d^3x \mathbf{e}(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{z}} f(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \\ &= \int d^3x \mathbf{e}(\mathbf{x}) (-\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x} - \mathbf{z})) = \int d^3x (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x} - \mathbf{z})) \\ &= \langle \nabla \cdot \mathbf{e} \rangle(\mathbf{z}) \end{aligned} \quad (9.6)$$

Deuxièmement, les dérivées partielles temporelles et l'intégration commutent :

$$\frac{\partial \langle \mathbf{e} \rangle}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \right\rangle \quad (9.7)$$

Les équations de Maxwell macroscopiques sont obtenues en prenant la moyennes des équations microscopiques (9.1) à (9.4) :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\langle \eta \rangle}{\epsilon_0} \quad (9.8)$$

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\langle \mathbf{j} \rangle}{\epsilon_0} \quad (9.9)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (9.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (9.11)$$

Où l'on a utilisé les relations (9.6) et (9.7). Il reste maintenant à déterminer ce que sont les quantités $\langle \eta \rangle$ et $\langle \mathbf{j} \rangle$, c'est-à-dire les moyennes de la densité de charges microscopique η et de la densité de courant microscopique \mathbf{j} .

Dans le cas la densité de charge, on peut considérer qu'elle due aux porteurs de charges (particules chargées), par exemple :

- Des électrons libres dans un métal,
- Des ions dans un gaz.
- Les atomes et les molécules.

Chaque particule n a sa propre densité de charge $\eta_n(\mathbf{x})$ localisée dans une région de la taille de la particule, par exemple $a \sim 10^{-18}$ cm dans le cas d'un atome. On a donc :

$$\eta(\mathbf{z}) = \sum_n \int d^3x \eta_n(\mathbf{x}) f(\mathbf{x} - \mathbf{z})$$

Cependant la fonction $f(\mathbf{x}-\mathbf{z})$ est régulière sur des échelles d'ordre a . Afin de calculer l'intégrale, on peut faire une expansion en série de Taylor autour de $\mathbf{x} = \mathbf{x}_n$, où \mathbf{x}_n est le centre de la particule :

$$\begin{aligned}\eta(\mathbf{z}) &= \int d^3x \eta_n(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}-\mathbf{z}) \\ &= \int d^3y \eta_n(\mathbf{x}) \left(f(\mathbf{x}_n-\mathbf{z}) + y_i \nabla_i f + \frac{y_i y_j}{2} \nabla_i \nabla_j f + \dots \right) \\ &= \int d^3y \eta_n(x_n + y) (f(x_n - z) + y_i \nabla_i f + \dots) \\ &= q_n f(\mathbf{x}_n - \mathbf{z}) - d_n^i \nabla_{\mathbf{z}}^i f(\mathbf{x}_n - \mathbf{z}) + \dots\end{aligned}$$

Où l'on a utilisé $\mathbf{x} = \mathbf{x}_n + \mathbf{y}$ à la deuxième ligne, et la convention d'Einstein. On définit maintenant

$$\rho(\mathbf{z}) = \sum_n q_n f(\mathbf{x}_n - \mathbf{z}) \quad (9.12)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{z}) = \sum_n \mathbf{d}_n f(\mathbf{x}_n - \mathbf{z}) \quad (9.13)$$

$\mathbf{P}(\mathbf{z})$ est une densité de dipôle, ce qu'on appelle aussi "polarisation électrique du milieu", $\rho(\mathbf{z})$ est la densité de charge libre. La moyenne de la densité de charge totale est donc :

$$\langle \eta \rangle = \rho(\mathbf{z}) - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{z}) + \dots$$

Les termes d'ordre supérieurs, tel que le quadrupôle, sont dans la majorité des cas négligeable. Une illustration du résultat obtenu est donnée par un medium composé de molécules neutres, ie $q_n = 0 \forall n$. La densité de charge libre définie à l'équation (9.12) vaut donc $\rho = 0$. Dans ce cas, $\langle \eta \rangle$ est purement due à la polarisation :

$$\langle \eta \rangle = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

Par exemple, dans le cas de la configuration donnée à la figure 9.1, on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(z) &= \mathbf{P}_0 \theta(z+L) \theta(z-L) \\ \Rightarrow \langle \eta \rangle &= \mathbf{P}_0 (-\delta(z+L) + \delta(z-L))\end{aligned}$$

La polarisation constant induit une densité superficielle de charge (voir 9.2)

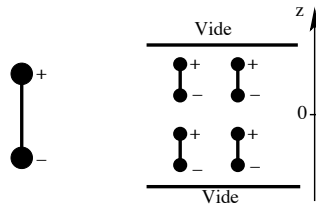


FIGURE 9.1 – Molécule dipolaire, et une distribution possible

D'une manière similaire, il est possible de répéter le calcul pour $\langle \mathbf{j} \rangle$. Le résultat sera

$$\begin{cases} \langle \eta \rangle = \rho(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \mathbf{P} \\ \langle \mathbf{j} \rangle = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \wedge \mathbf{M} , \end{cases} \quad (9.14)$$

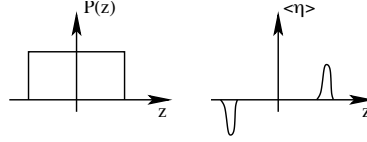


FIGURE 9.2 – Distribution de \mathbf{P} et $\langle \eta \rangle$ pour la fig. 9.1

où on a noté : ρ la densité de charges macroscopique (densité de charges libres) et \mathbf{J} la densité de courant macroscopique (densité de courant de charges libres). Par exemple, ce sont des électrons ou des ions qui peuvent se mouvoir librement. \mathbf{P} est la polarisation macroscopique, qui peut être définie comme la densité de moment dipolaire $\mathbf{p} = e\mathbf{d}$.

Le terme $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ correspond au courant électrique associé à une polarisation \mathbf{P} qui change dans le temps. Dans l'exemple de la figure 9.1, on peut imaginer que les dipôles renversent leur orientation : il y a clairement un courant implique par cette reorientation. Il faut aussi remarquer que les deux termes, $-\nabla \mathbf{P}$ et $\partial_t \mathbf{P}$, qui apparaissent dans la charge et le courant totaux satisfont automatiquement l'équation de conservation

$$\begin{aligned}\partial_t \langle \eta \rangle &= \dots - \partial_t \nabla \cdot \mathbf{P} + \dots \\ \nabla \cdot \langle \mathbf{J} \rangle &= \dots + \nabla \cdot \partial_t \mathbf{P} + \dots\end{aligned}$$

Le terme en $\nabla \wedge \mathbf{M}$ vient du fait que les particules ont également des courants microscopiques internes, par exemple un électron tournant autour du noyau

$$\mathbf{M}_n = \frac{1}{2} \int d^3x \, \mathbf{x} \wedge \mathbf{J}_n$$

Pour comprendre ce terme, on prend l'exemple de la magnétisation macroscopique d'un conducteur circulaire (voir figure 9.3)

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= (0, 0, M_z) \\ M_z &= M_0 \theta(R - r)\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}(\nabla \wedge \mathbf{J})_x &= \partial_y M_z = -\delta(R - r) M_0 \frac{\partial r}{\partial y} = -\delta(R - r) M_0 \sin(\theta) \\ (\nabla \wedge \mathbf{J})_y &= -\partial_x M_z = \delta(R - r) M_0 \frac{\partial r}{\partial x} = \delta(R - r) M_0 \cos(\theta)\end{aligned}$$

La magnétisation constante d'un solide correspond à une densité superficielle de courant. De plus, on notera que $\nabla \wedge \mathbf{M}$ est conservé, car

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{M}) = 0$$

9.2 Equations de Maxwell macroscopiques : les champs \mathbf{H} et \mathbf{D}

En insérant le résultat obtenu à l'équation (9.14) dans les équations de Maxwell macroscopiques (9.8) et (9.9), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \wedge \mathbf{M} \right) \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} - \nabla \cdot \mathbf{P}\end{aligned}$$

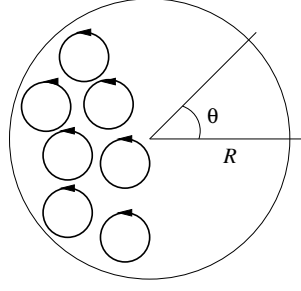


FIGURE 9.3 – Magnétisation macroscopique d'un conducteur circulaire.

Il faut donc sens de définir les deux champs suivants

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (9.15)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (9.16)$$

Avec ces définitions, les équations de Maxwell dépendant des densités deviennent :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (9.17)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} \quad (9.18)$$

Le champ \mathbf{H} est appelé le *champ magnétique*, et le champ \mathbf{D} le *champ de déplacement*. Pour éviter toute confusion entre \mathbf{H} et \mathbf{B} , on appelle ce dernier le *champ d'induction magnétique*.

Quant aux équations de Maxwell homogènes, elles restent toutes deux inchangées :

$$\nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (9.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (9.20)$$

9.3 Solution des équations de Maxwell dans un milieu dense

On ne peut clairement pas résoudre les équations de Maxwell macroscopique sans des contraintes supplémentaires sur (\mathbf{P}, \mathbf{M}) , ou de manière équivalente sur (\mathbf{D}, \mathbf{H}) .

Cependant, en l'absence de champ macroscopique \mathbf{E} et \mathbf{B} , on s'attend à ce que \mathbf{P} et \mathbf{M} soient tous deux nuls, c'est-à-dire que les atomes sont orientés de manière aléatoire.

La relation la plus simple à laquelle on peut s'attendre est linéaire :

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j$$

$$H_i = \mu_{ij} H_j$$

où la permittivité ε et la perméabilité μ qui sont des constantes caractéristiques à chaque matériel. ε et μ sont déterminées soit expérimentalement, soit grâce à des calculs de microphysique.

Dans un milieu isotrope, c'est-à-dire dans un milieu pour lequel il n'y a pas de direction préférentielle, on a :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij}$$

$$\mu_{ij} = \mu \delta_{ij}$$

Remarque : Les relations linéaires les plus générales possibles sont données par :

$$\begin{cases} D_i(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{x}' dt' \epsilon_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') E_j(\mathbf{x}', t') \\ B_i(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{x}' dt' \mu_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') H_j(\mathbf{x}', t') \end{cases} \quad (9.21)$$

D'autre part, pour des champs intenses, des termes non-linéaires peuvent apparaître. On a alors

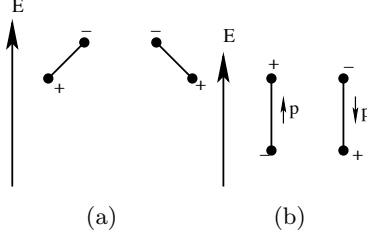


FIGURE 9.4 – a) Distribution quelconque de molécules dipolaires. b) Le dipôle de gauche est énergétiquement plus favorable.

pour le champ de déplacement :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} \Rightarrow (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E} = \mathbf{P} \\ &\Rightarrow \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \mathbf{D} = \mathbf{P} \end{aligned}$$

Et dans le cas du champ magnétique :

$$\left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right) \mathbf{H} = -\mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{B} \frac{1}{\mu_0} \left(1 - \frac{\mu_0}{\mu}\right) = \mathbf{M}$$

9.3.1 Diélectrique

On peut maintenant s'intéresser à la théorie microscopique d'un diélectrique, c'est-à-dire d'un milieu dont les molécules ont un moment dipolaire permanent $\mathbf{d} \equiv p\mathbf{n}$ ou \mathbf{n} est le vecteur unitaire. En l'absence d'un champ extérieur \mathbf{E} , les molécules sont aléatoirement orientées, donc :

$$\mathbf{P} = \frac{1}{V} \sum_n \mathbf{d}_n = 0$$

On peut estimer la polarisation induite en utilisant une distribution de Boltzmann

$$\mathcal{P} \sim e^{-\frac{\mathcal{E}}{kT}}$$

De plus, l'énergie du dipôle en champ électrique est donnée par :

$$\mathcal{E} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{d} = -p\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = -pE \cos \theta$$

Ainsi, certains dipôles sont énergétiquement favorisés, comme c'est le cas dans la figure 9.4(b). On peut définir une quantité globale, la *polarisation moyenne* de chaque dipôle :

$$\langle \mathbf{d} \rangle = \frac{\int p\mathbf{n} e^{\frac{Ep \cos(\theta)}{kT}} d \cos(\theta) d\phi}{\int e^{\frac{Ep \cos(\theta)}{kT}} d \cos \theta d\phi}$$

En supposant que le champ électrique est orienté selon l'axe z , ie $\mathbf{E} = (0, 0, E)$, on trouve $\langle d_x \rangle = \langle d_y \rangle = 0$ et

$$\langle d_z \rangle = \frac{\int p \cos \theta e^{\frac{Ep \cos(\theta)}{kT}} d \cos(\theta) d\phi}{\int e^{\frac{Ep \cos(\theta)}{kT}} d \cos \theta d\phi}$$

En utilisant :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dt e^{\alpha t} &= \frac{2}{\alpha} \sinh(\alpha) \\ \int_{-1}^1 dt t e^{\alpha t} &= \frac{t}{\alpha} e^{\alpha t} \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{\alpha} \int_{-1}^1 e^{\alpha t} \\ &= \frac{2}{\alpha} \cosh(\alpha) - \frac{2}{\alpha^2} \sinh(\alpha) \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \langle d_z \rangle &= p \frac{\cosh(\frac{Ep}{kT}) - \frac{kT}{Ep} \sinh(\frac{Ep}{kT})}{\sinh(\frac{Ep}{kT})} \\ &= p \left(\coth(\frac{Ep}{kT}) - \frac{kT}{Ep} \right) \end{aligned}$$

Pour un champ \mathbf{E} faible, on a donc au premier ordre

$$\mathbf{P} = n \langle \mathbf{d} \rangle = \frac{np^2}{3kT} \mathbf{E}$$

où n est la densité de dipôles. On en déduit alors :

$$D = \epsilon_0 E + \frac{1}{3} p^2 \frac{En}{kT}$$

La permittivité est finalement donnée par :

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(1 + \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{p^2 n}{kT} \right) > \epsilon_0$$

Paramagnétisme

De manière similaire au cas du diélectrique, on peut faire le calcul pour un moment dipolaire magnétique \mathbf{m} , c'est-à-dire en faisant le changement :

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &\longrightarrow \mathbf{m} \\ \mathbf{E} &\longrightarrow \mathbf{B} \\ \mathbf{M} &= \frac{nm^2}{3kT} \mathbf{B} \end{aligned}$$

On obtient alors le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \left(1 - \frac{\mu_0}{\mu} \right) &= \frac{nm^2}{3kT} \\ \Leftrightarrow \mu &= \frac{\mu_0}{1 - \frac{nm^2 \mu_0}{3kT}} > \mu_0 \end{aligned}$$

9.4 Les ondes électromagnétiques dans les milieux continus

On s'intéresse maintenant aux cas des ondes électromagnétiques, and ne considérant que le cas isotrope, donc :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}; \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} .$$

La loi de Faraday se réécrit :

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \quad (9.22)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (9.23)$$

De plus, en utilisant

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 , \quad (9.24)$$

on introduire ce résultat dans l'équation eq9.22, et on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \frac{1}{\epsilon \mu} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \frac{1}{\epsilon \mu} (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B}) \\ &= \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon \mu} \Delta \mathbf{B} = 0 . \end{aligned}$$

où on a utilisé $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Cette équation est une équation de propagation, dont la vitesse de propagation est donnée par :

$$v^2 = \frac{1}{\epsilon \mu} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\epsilon \mu} = c^2 \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\epsilon \mu} \leq c^2 \quad (9.25)$$

La vitesse de propagation d'une onde dans un milieu est donc toujours inférieure à c .

9.4.1 Réflexion d'une onde

On considère ici le problème de la réflexion d'une onde électromagnétique à l'interface de deux matériaux (cf. figure 9.5).

Afin de comprendre la physique de ce phénomène, on doit tout d'abord trouver les conditions aux bords.

Si l'interface est très bien marquée, que doit-on faire avec les dérivées de ϵ et de μ ?

L'idée est d'écrire les équations de Maxwell macroscopiques sous forme intégrale, et de les appliquer à l'interface. On a :

$$\oint d\mathbf{S} \cdot \mathbf{D} = \int \rho \, dV \quad (9.26)$$

$$\oint d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (9.27)$$

$$\int d\ell \cdot \mathbf{E} = -\frac{d}{dt} \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \quad (9.28)$$

$$\int d\ell \cdot \mathbf{H} = \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \quad (9.29)$$

Il ne reste plus qu'à utiliser ces dernières équations pour un volume et un contour spécifiques du type de la figure 9.6.

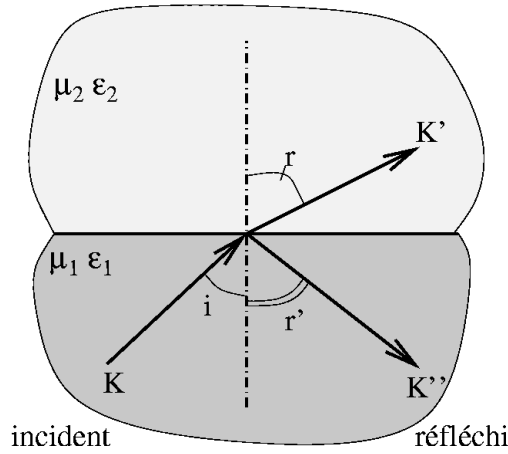


FIGURE 9.5 – propagation d'une onde à une interface

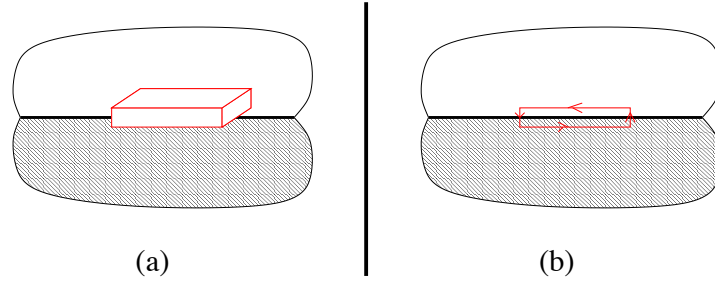


FIGURE 9.6 – (a) petit volume à l'interface; (b) contour autour de l'interface, le vecteur \mathbf{t} venant vers nous.

On suppose que sur la surface, il peut y avoir des densités de charge macroscopiques σ (par unité de surface) et de courant macroscopique \mathbf{K} (par unité de longueur) non-nulles. On utilise alors successivement les équations (9.26) à (9.29) à l'interface :

1. En appliquant l'équation (9.26) au petit volume de la figure 9.6 :

$$\oint d\mathbf{S} \cdot \mathbf{D} = (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} \Delta S = \sigma \Delta S \Rightarrow \quad (9.30)$$

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)_{\perp} = \sigma \quad (9.31)$$

On peut remarquer que la composante normale de \mathbf{D} a un saut égal à la densité de surface de charge.

2. En faisant un développement similaire à l'aide de l'équation (9.27), on obtient un résultat similaire

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)_{\perp} = 0 \quad (9.32)$$

Cela signifie que la composante normale du champ magnétique est continue à l'interface.

3. En appliquant l'équation (9.28) au contour de la figure 9.6, on obtient :

$$\int \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)_{\parallel} = 0 \quad (9.33)$$

La composante tangentielle de \mathbf{E} est continue.

4. Finalement, en appliquant l'équation (9.29) au contour :

$$\begin{aligned}
\int d\mathbf{S} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{H}) &= \oint_C d\ell \cdot \mathbf{H} = (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \Delta l \\
&= \int d\mathbf{S} \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \\
&= \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} = (\mathbf{K} \cdot \mathbf{t}) \Delta l ,
\end{aligned} \tag{9.34}$$

où \mathbf{t} est un vecteur tangent à la surface et \mathbf{K} est la densité de courant de surface.

on a donc obtenu une condition au bord pour la composante tangente du champ magnétique :

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)_{\parallel} \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) = \mathbf{K} \cdot \mathbf{t} . \tag{9.35}$$

Le saut du champ magnétique \mathbf{H} est égal à la densité de courant de surface.

On considère à présent le problème de la réflexion dans un cas simple :

$$\sigma = 0 \quad \mathbf{K} = 0$$

On notera alors l'expression d'une onde sous la forme d'une onde plane :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t] \tag{9.36}$$

où la quantité physique est la partie réelle $\mathbf{E}_{\text{phys}} = \Re(\mathbf{E})$. De plus :

- \mathbf{k} est le vecteur d'onde,
- ω est la fréquence,
- $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{2\pi}{k}$ est la longueur d'onde,
- $v = \frac{\omega}{k}$ est la vitesse de l'onde.

D'autre part, de la loi de Faraday :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 ,$$

on déduit la forme explicite du champ magnétique :

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t) ; \\
-i\omega \mathbf{B}_0 + i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 &= 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{1}{vk} \mathbf{k} \times \mathbf{E} .
\end{aligned}$$

Par la suite, on utilisera la notation suivante :

- i) onde incidente : $E_0, \mathbf{k}, \omega, v$,
- ii) onde transmise : $E'_0, \mathbf{k}', \omega', v'$,
- iii) onde réfléchi : $E''_0, \mathbf{k}'', \omega'', v''$.

On sait également que l'on a :

1. la continuité dans le temps : $\omega = \omega' = \omega''$ i.e. la fréquence ne change pas.
2. si le plan $z = 0$ est le plan de réflexion, alors la continuité à $z = 0$ donne :

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})_{z=0} = (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x})_{z=0} = (\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x})_{z=0}$$

Donc, les trois vecteurs \mathbf{k} , \mathbf{k}' , \mathbf{k}'' se trouvent dans le même plan. En prenant $k_y = 0$, ceci implique

$$k \sin i = k' \sin r = k'' \sin r'$$

Comme $\omega = \omega''$ et $v = v''$, on a $k = k''$, d'où :

$$\sin i = \sin r' \quad (9.37)$$

On en déduit :

$$\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{k}{k'} = \frac{\omega v'}{\omega v} = \frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (9.38)$$

où l'on a introduit les indices de réfraction :

$$n_i = \sqrt{\frac{\epsilon_i \mu_i}{\epsilon_0 \mu_0}}$$

On déduit de l'équation (9.37) que l'angle de réflexion est égal à l'angle de l'onde incidente ($i = r'$), cf. figure 9.7.

L'équation suivante, tirée de [9.38], est la *loi de Snell* :

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \sin r = \frac{n_1}{n_2} \sin i.$$

On remarquera que cette équation n'a pas de solution pour $n_1 > n_2$ si

$$i > i_0 = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

On dit alors qu'il y a *réflexion totale* pour $i \geq i_0$. C'est le cas pour une interface eau-air avec un angle d'incidence de 43° .

Afin de trouver les relations (9.38), on a jamais utilisé la forme explicite des conditions aux bords. Ces dernières permettent de déterminer les amplitudes des ondes transmises et réfléchies.

Si l'on considère un problème général, le nombre total d'équations est $1 + 2 + 2 + 1 = 6$; on a donc 6 inconnues. Il faut cependant être attentif au fait que les 6 équations ne sont pas toutes indépendantes et que, heureusement, on a en réalité que 4 inconnues, car les champs électriques d'une onde électromagnétique est dans le plan orthogonal au vecteur d'onde. La solution au problème est alors unique.

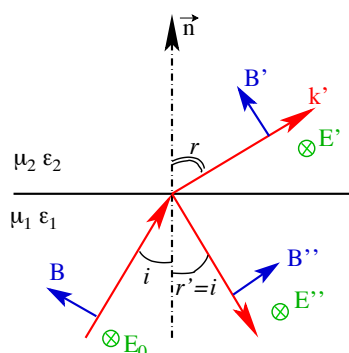


FIGURE 9.7 – Schéma de principe pour la réflexion-transmission d'une onde

On a les conditions suivantes :

1. $(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)_\perp = 0 \Rightarrow (\epsilon_1(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0'') - \epsilon_2\mathbf{E}_0') \cdot \mathbf{n} = 0$
2. $(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)_\perp = 0 \Rightarrow (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0'' - \mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0') \cdot \mathbf{n} = 0$
3. $(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)_\parallel = 0 \Rightarrow (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0'' - \mathbf{E}_0') \times \mathbf{n} = 0$
4. $(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)_\parallel = 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{\mu_1} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0'') - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0' \right] \times \mathbf{n} = 0$

Pour simplifier, on considère la polarisation linéaire de la figure 9.7

En supposant que \mathbf{E} est parallèle à la surface (polarisation TE), il reste deux inconnues à la place de 6. On vérifiera cette supposition dans les équations par la suite. Dans ce cas, les conditions deviennent :

1. Satisfaite automatiquement.
2. On a :

$$|k||E_0| \sin i + |k''||E_0''| \sin i - |k'||E_0'| \sin r = 0$$

D'autre part, comme $|k| = |k''|$, et $|k| \sin i = |k'| \sin r$, on obtient :

$$|E_0| + |E_0''| - |E_0'| = 0 \quad (9.39)$$

3. Idem que le point précédent.
4. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \frac{(kE_0 - kE_0'') \cos i}{\mu_1} - \frac{k'E_0' \cos r}{\mu_2} &= 0 \\ \frac{k}{k'\mu_1} (E_0 - E_0'') \cos i - \frac{E_0'}{\mu_2} \cos r &= 0 \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\frac{k}{k'} = \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2}}$:

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} (E_0 - E_0'') \cos i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E_0' \cos r = 0 \quad (9.40)$$

On a bien 2 équations ((9.39) et (9.40)) pour 2 inconnues (E_0' et E_0'').

Les solutions sont donc :

$$\begin{aligned} \frac{E_0'}{E_0} &= \frac{2n_1 \cos i}{n_1 \cos i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}} \\ \frac{E_0''}{E_0} &= \frac{n_1 \cos i - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}}{n_1 \cos i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}} \end{aligned}$$

et sont appelées *relations de Fresnel*.

Dans la plupart des cas (par exemple pour des fréquences optiques), on peut considérer que $\frac{\mu_1}{\mu_2} \approx 1$ et donc :

$$\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} = n_2 \cos r$$

Et les solutions se simplifient en :

$$\begin{aligned} \frac{E_0'}{E_0} &= \frac{2n_1 \cos i}{n_1 \cos i + n_2 \cos r} \\ \frac{E_0''}{E_0} &= \frac{n_1 \cos i - n_2 \cos r}{n_1 \cos i + n_2 \cos r} \end{aligned}$$

Le cas de la réflexion totale est obtenu pour $\cos r = 0$, c'est-à-dire $E_0 = E_0''$.

Pour calculer le transfert d'énergie, on utilise la densité d'énergie et le vecteur de Poynting pour un milieu :

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \\ \mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} \end{aligned}$$

La dérivation de ces formules se fait de manière similaire à celle pour le vide.