

BONJOUR et BIENVENUE

Intervenants : **Eric DAVALLE**, Dr Ingénieur civil EPFL

Chef du Service de l'électricité de la Ville de Lausanne



avec les assistants du LSMS

Programme des semaines 5 à 8

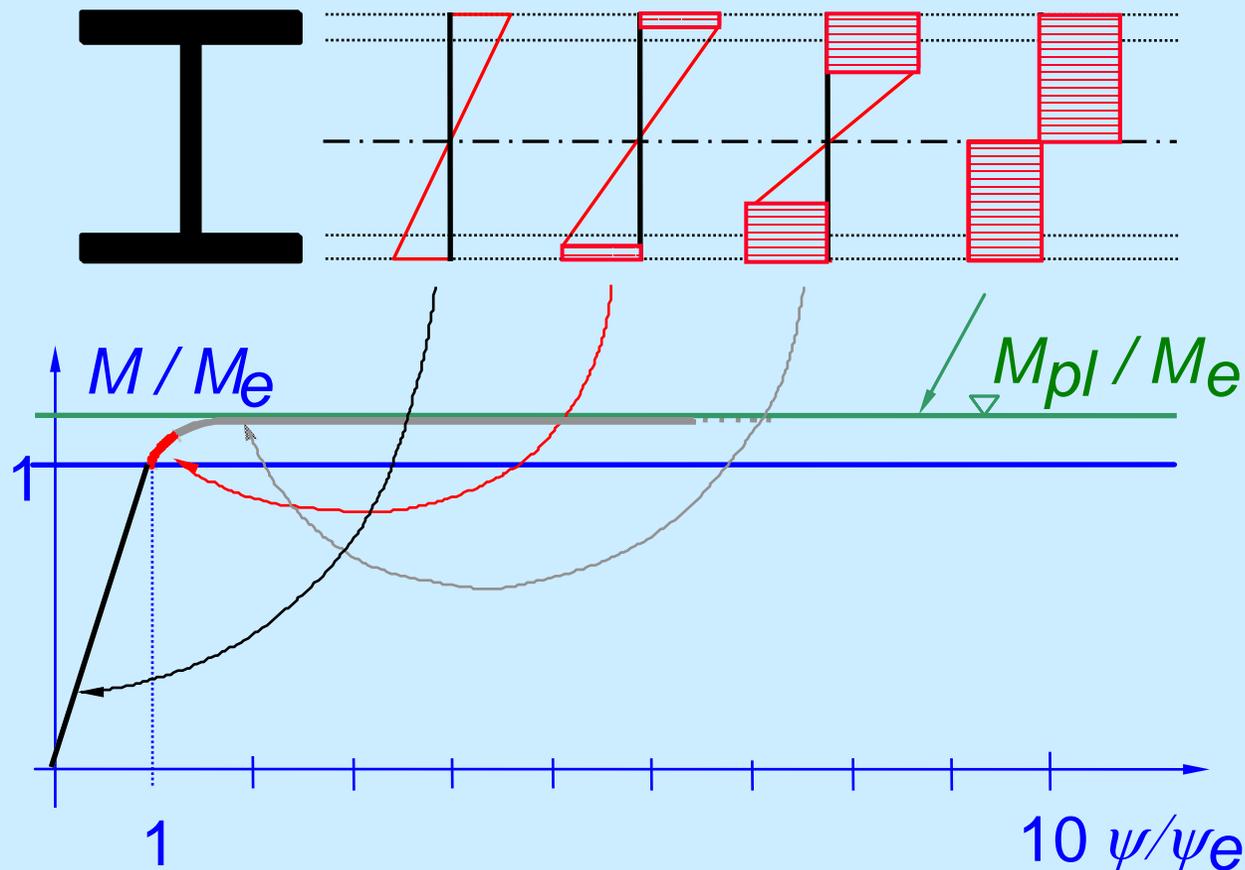
5	Mardi	11,1 12.1 - 12.5 et 12.7	Sollicitations composées Principe des travaux virtuels et calcul des déplacements
	Jeudi	12.6 , 12.8 - 12.9	Principe des travaux virtuels et calcul des déplacements
6	Mardi	16.1 - 16.7 17.1 -17.5	Calcul de la charge limite des structures hyperstatiques simples Théorèmes fondamentaux de l'analyse limite
	Jeudi	17.6 -17.10	Théorèmes fondamentaux de l'analyse limite
7	Mardi	20.1 - 20.3	Flambement des poutres
	Jeudi	20.4 - 20.5	Flambement des poutres
8	Mardi	20,8	Flambement des poutres
	Jeudi	compléments / révisions	

16. Calcul de la charge limite des structures hyperstatiques simples



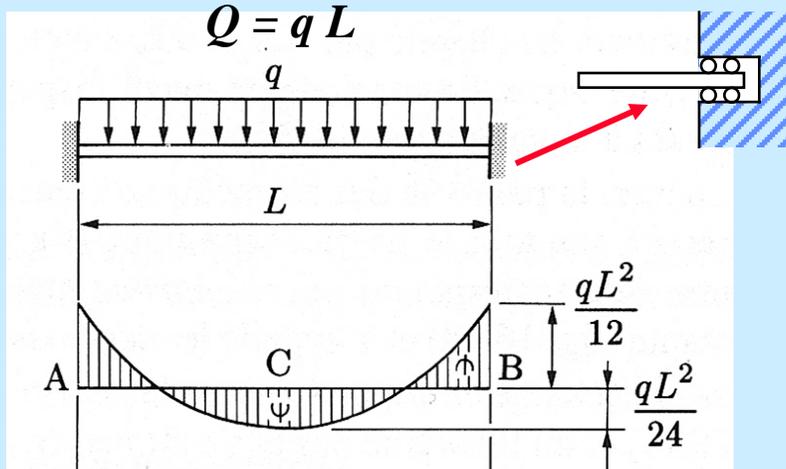
Propriété de la loi moment-courbure

La loi (M, ψ) peut être simplifiée par deux droites. Exemple poutre laminée I



$$M_{pl} / M_e = 1,15$$

Cas d'une poutre bi-encastée chargée uniformément



! On augmente la charge !

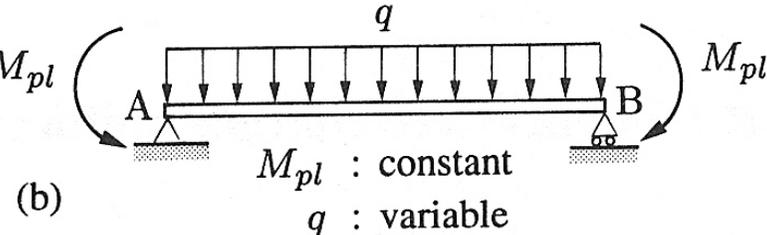
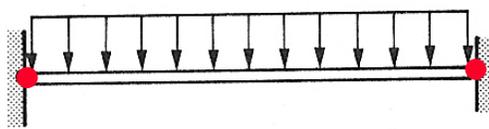
Cas élastique :

$$M_{\max} = \frac{qL^2}{12} = \frac{QL}{12} = M_e$$

d'où

$$Q_e = 12 \frac{M_e}{L} \quad \text{avec } Q = qL$$

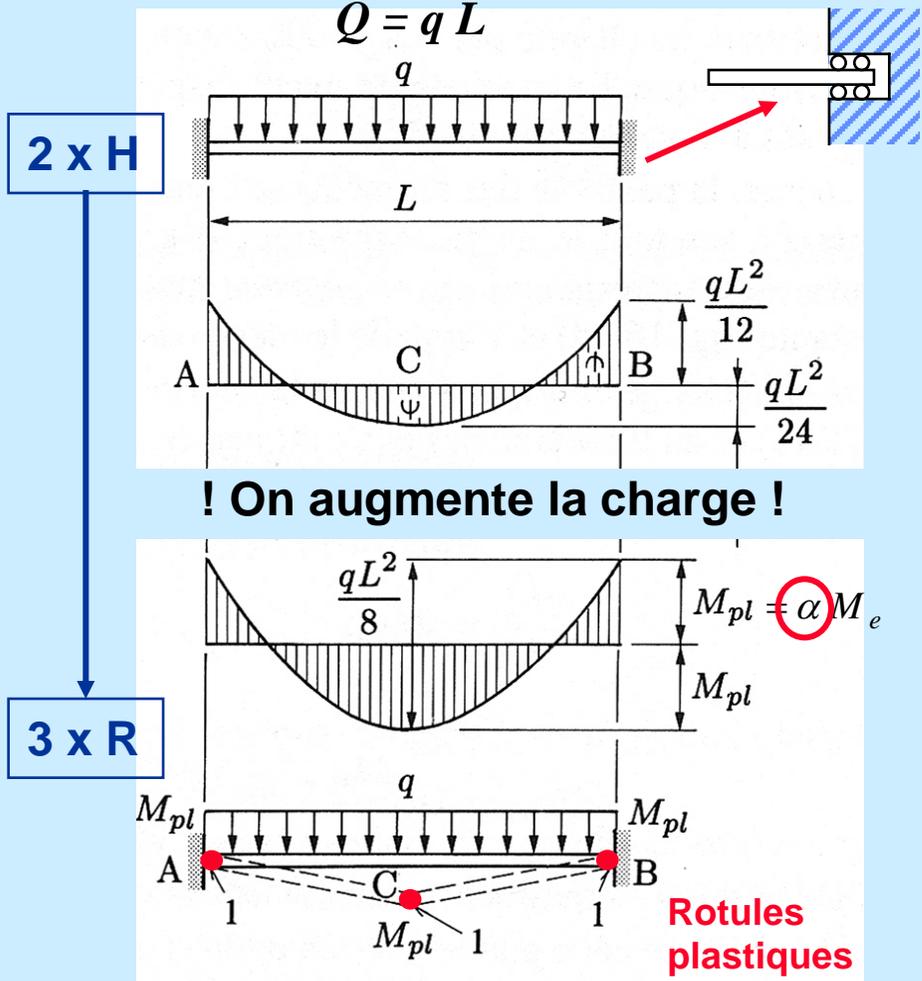
(a)



(b)

M_{pl} : constant
 q : variable

Cas d'une poutre bi-encastrée chargée uniformément



Cas élastique :

$$M_{\max} = \frac{qL^2}{12} = \frac{QL}{12} = M_e$$

d'où

$$Q_e = 12 \frac{M_e}{L}$$

Cas élasto-plastique :
(théorème des 2 moments)

$$2M_{pl} = \frac{qL^2}{8}$$

d'où

$$Q_{\lim} = 16 \frac{M_{pl}}{L}$$

Gain par l'hyperstaticité

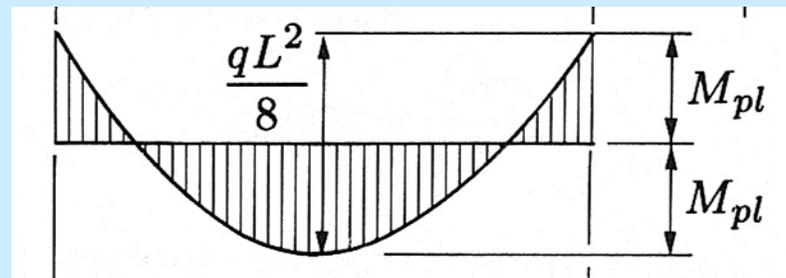
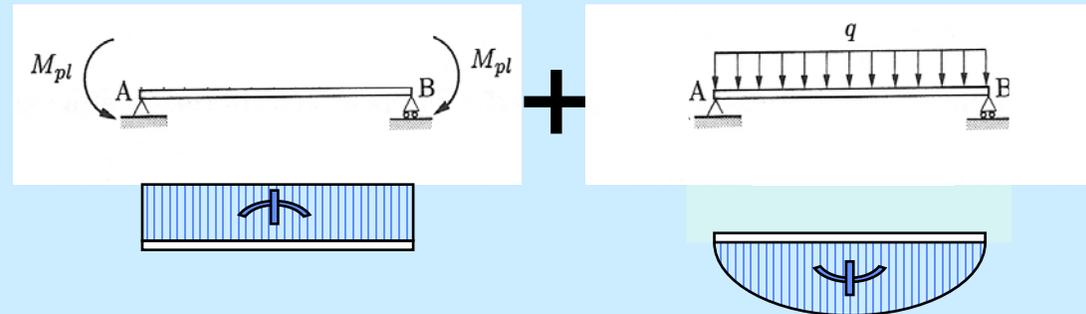
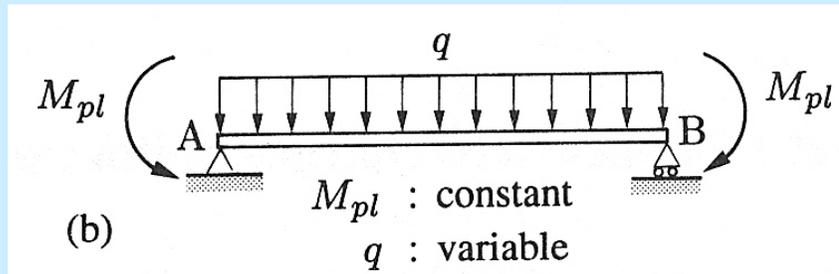


On a créé un mécanisme de ruine

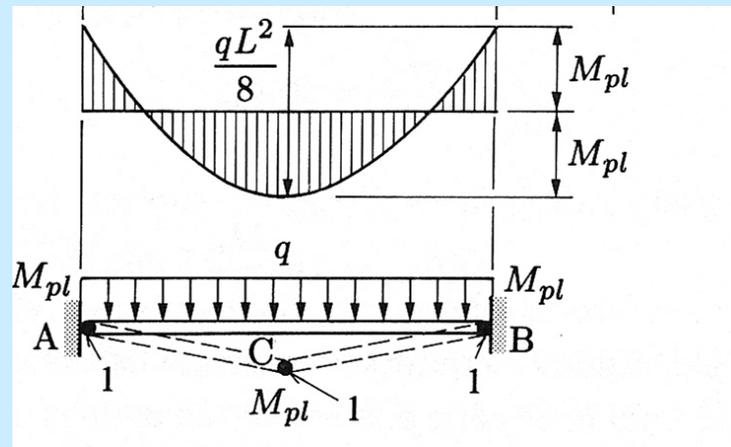
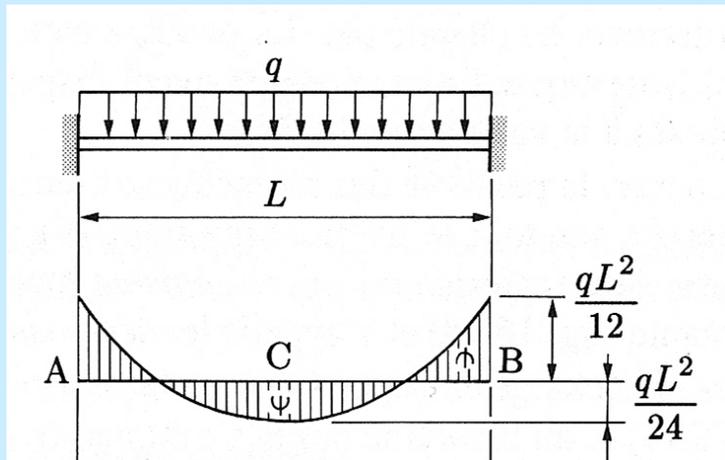
Cas d'une poutre bi-encastée chargée uniformément

Cas élasto-plastique :
(théorème des 2 moments, STATIQUE APPLIQUÉE, page 148)

$$2M_{pl} = \frac{qL^2}{8}$$



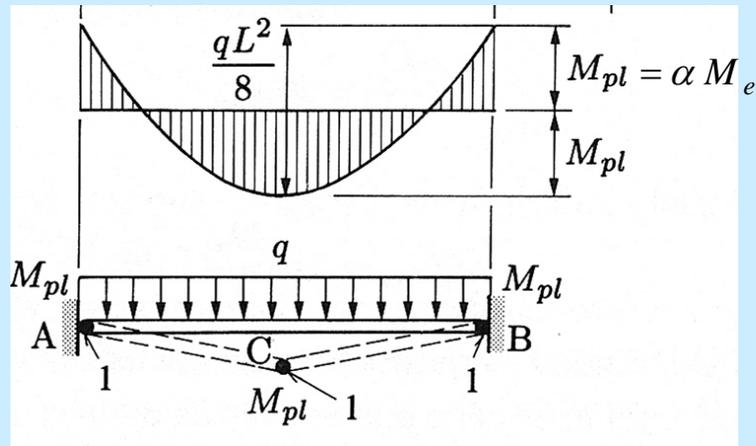
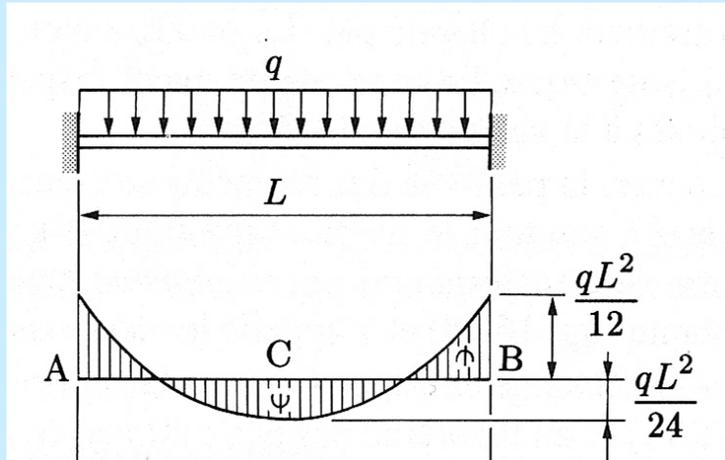
Cas d'une poutre bi-encastée chargée uniformément



En résumé 1a :

- l'hyperstaticité permet une redistribution des efforts dans la poutre si on continue à la charger (réserve de résistance)
- le moment plastique M_{pl} est une caractéristique de la section (connu et $f(Z, \sigma_e)$), non affecté par N ni V
- les rotules plastiques se forment successivement là où les moments sont les plus importants

Cas d'une poutre bi-encastée chargée uniformément



En résumé 1b : les GAINS

Gain 1 : du fait de la plastification de la section

$$\alpha = \frac{M_{pl}}{M_e} = \frac{Z}{W}$$

(α est le **facteur de forme**, gain lié à la plastification de la section droite)

$$\text{Gain 2 : } \frac{Q_{lim}}{Q_e} = \frac{16}{12} \frac{M_{pl}}{M_e} = 1,33 \alpha$$

Ruine d'une structure hyperstatique

Donnée : structure hyperstatique de degré h

Hypothèses : plasticité avec les principaux éléments suivants :

- $M_{pl} = Z \sigma_e$ (plastification de la section droite)
- à l'apparition de chaque rotule plastique, le d d'hyperstaticité de la structure se réduit d'une unité

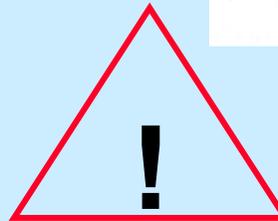
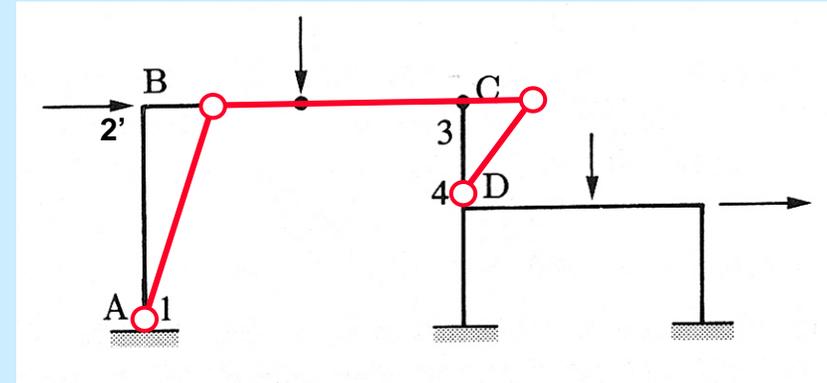
Mécanisme de ruine :

- formation de la $h+1$ rotules plastiques (structure isostatique transformée en un mécanisme articulé)
- mécanisme dit de ruine est à un degré de liberté
- effondrement sous charge constante
- redistribution des efforts intérieurs
- déterminer la sécurité vis-à-vis de la charge limite

Ruine d'une structure hyperstatique

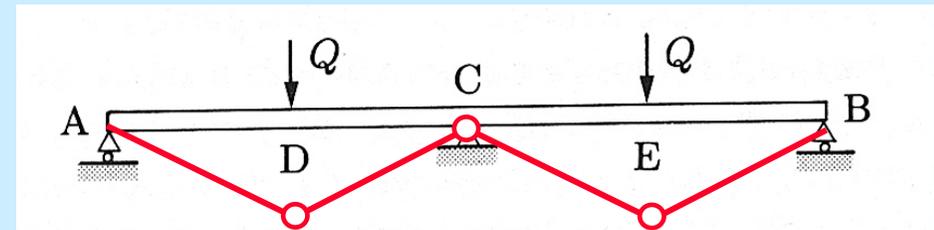
Ruine partielle :

- structure/ portique est 6 fois hyperstatique
- ruine avec l'apparition de **4 rotules plastiques** (1, 2',3 et 4)



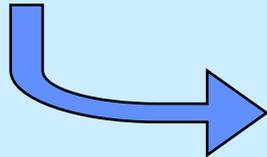
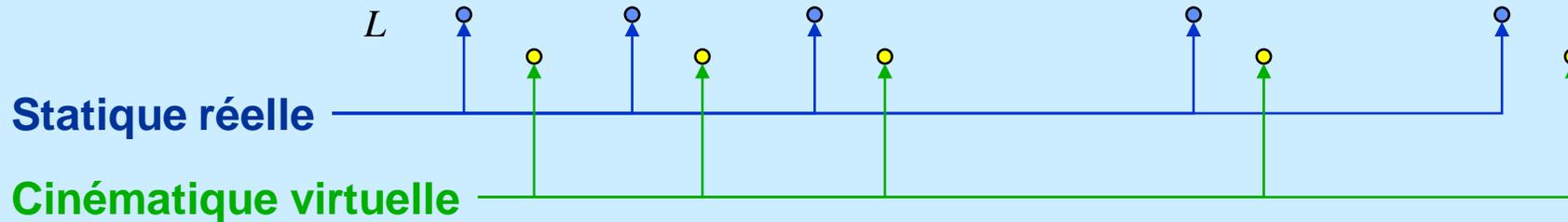
Ruine plus que complète :

- structure 1 fois hyperstatique
- ruine avec l'apparition de **3 rotules plastiques**

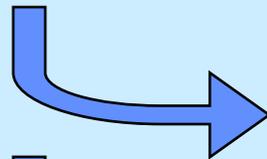


Calcul de la charge limite – Principe des déplacements virtuels

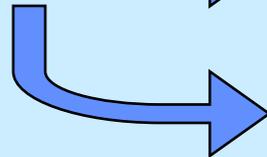
$$\delta W_{\text{int}} = \int_L (N \delta \varepsilon + V \delta \beta + M \delta \psi) dx = \sum F \delta u_F + \sum R \delta u_R = \delta W_{\text{ext}}$$



En plasticité, choix en relation avec un **mécanisme de ruine**



Seules les zones plastique travaillent

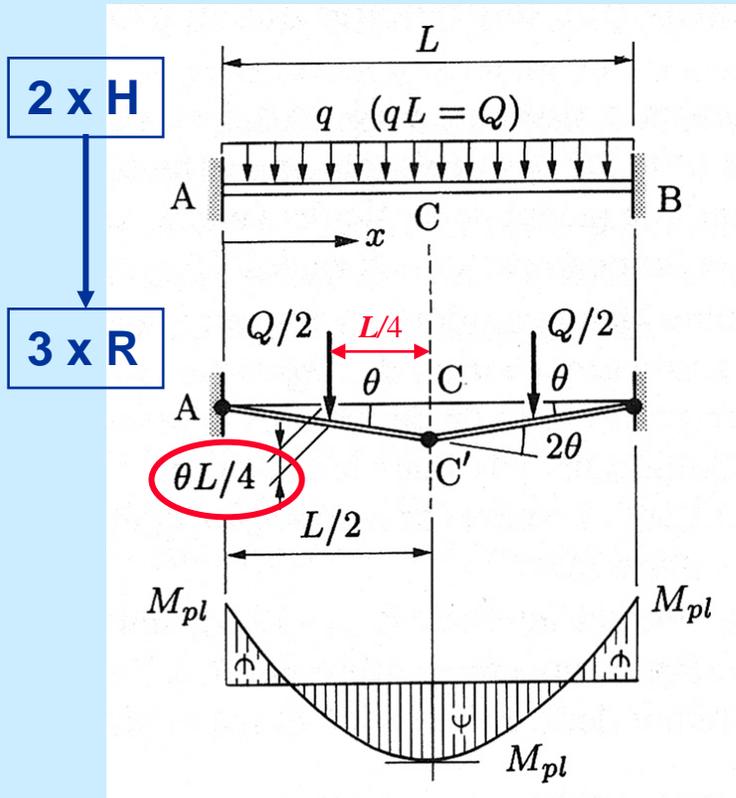


Travail interne = travail aux rotules

$$\sum M_{pl} \delta \theta = \sum F \delta u_F \Rightarrow \sum M_{pl} \theta = \sum F u$$

Fonctions poids

Calcul de la charge limite – Principe des déplacements virtuels



$$\sum M_{pl} \theta = \sum F u$$

$$M_{pl} \theta + M_{pl} 2\theta + M_{pl} \theta = 2 \times \left(\frac{Q}{2} \frac{\theta L}{4} \right)$$

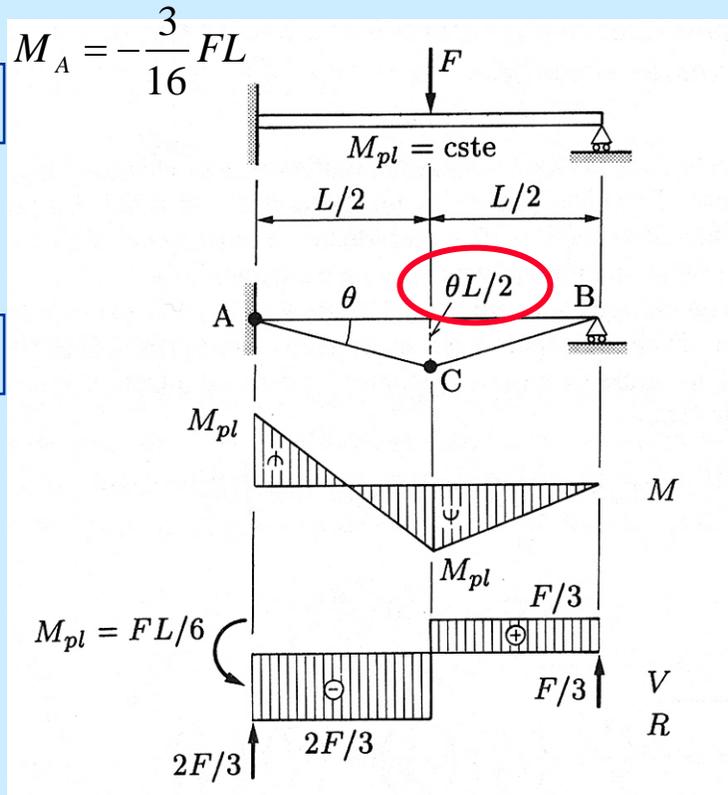
Au niveau des 3 rotules plastiques



$$Q_{lim} = 16 \frac{M_{pl}}{L}$$

1 x H

2 x R



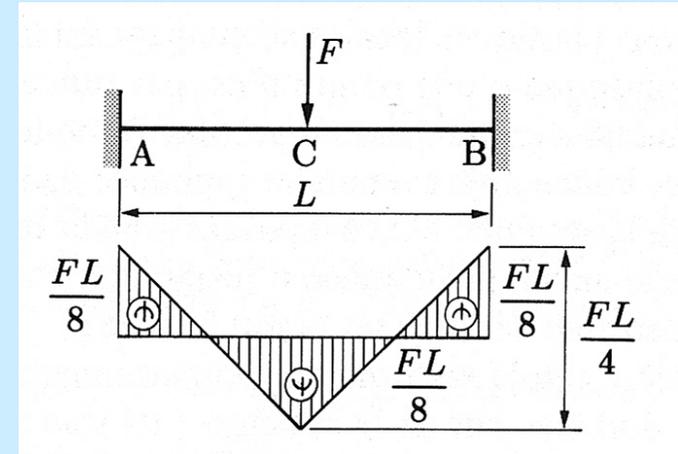
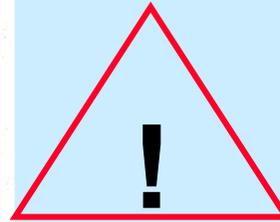
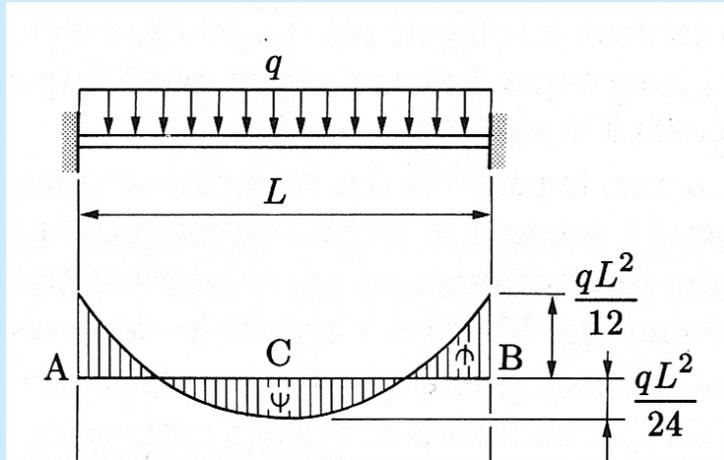
$$M_{pl} \theta + M_{pl} 2\theta = F \frac{\theta L}{2}$$

Au niveau des 2 rotules plastiques

$$F_{\text{lim}} = 6 \frac{M_{pl}}{L} = Q_{\text{lim}}$$

$$\text{Gain} : \frac{F_{\text{lim}}}{F_e} = \frac{6 M_{pl}}{L} \frac{3L}{16 M_e} = \frac{9}{8} \alpha = 1,13 \alpha$$

Bénéfice dû à la plasticité



Les rotules plastiques apparaissent simultanément en A, B et C (pas de redistribution)

$$\text{Gain: } \frac{Q_{\text{lim}}}{Q_e} = \frac{16 M_{pl}}{12 M_e} = 1,33 \alpha$$

$$\text{Gain: } \frac{F_{\text{lim}}}{F_e} = \frac{8 M_{pl}}{8 M_e} = 1 \alpha$$

En général, il y a toujours un gain !

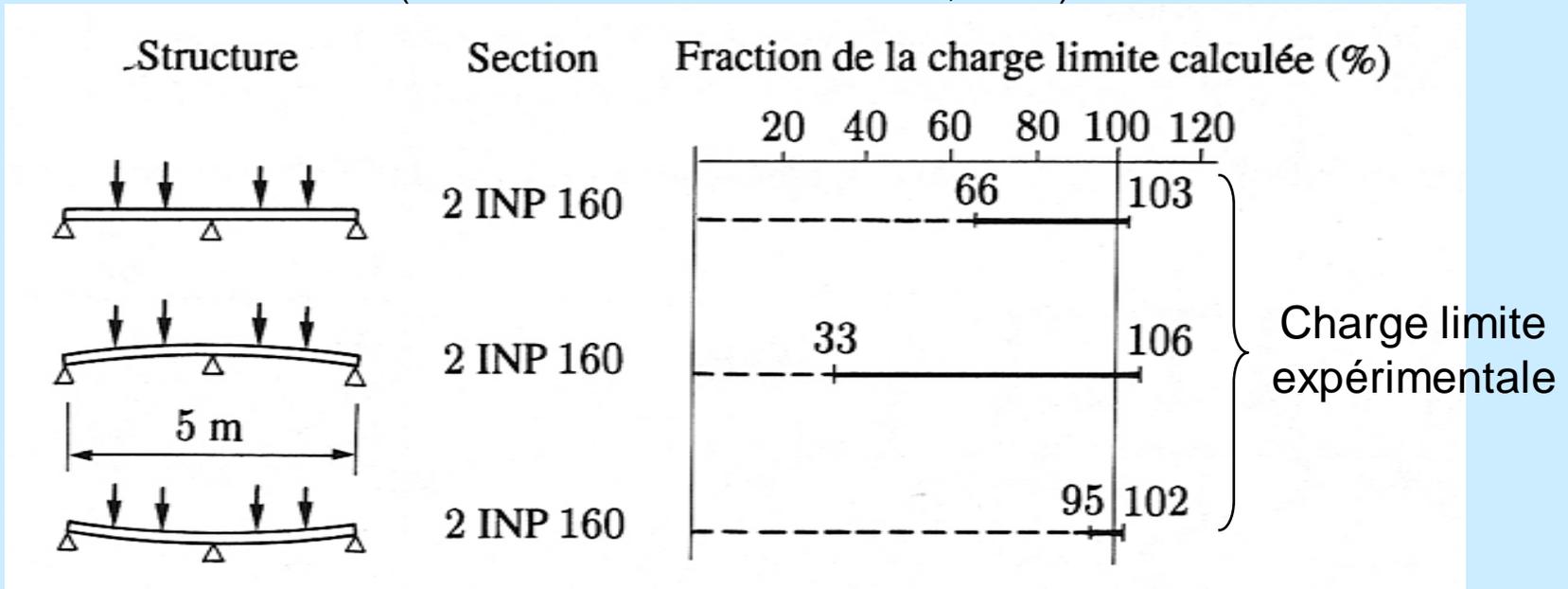
Domaine de validité de l'analyse limite

Les hypothèses suivantes doivent être remplies :

- chaque élément de structure répond à la loi **élastique parfaitement plastique**
- existence de zones propices à la création de **rotules plastiques** (ductilité)
- M_{pl} non affecté par l'influence de N et V
- chargement extérieur **grandissant proportionnellement**
- **déplacements toujours petits** (linéarité géométrique)
- on exclut les **phénomènes d'instabilité** (flambement, ...)
- les **assemblages** dans les structures sont dimensionnés pour M_{pl}
- pas de **fatigue**

Insensibilité de la charge limite vis-à-vis des autocontraintes

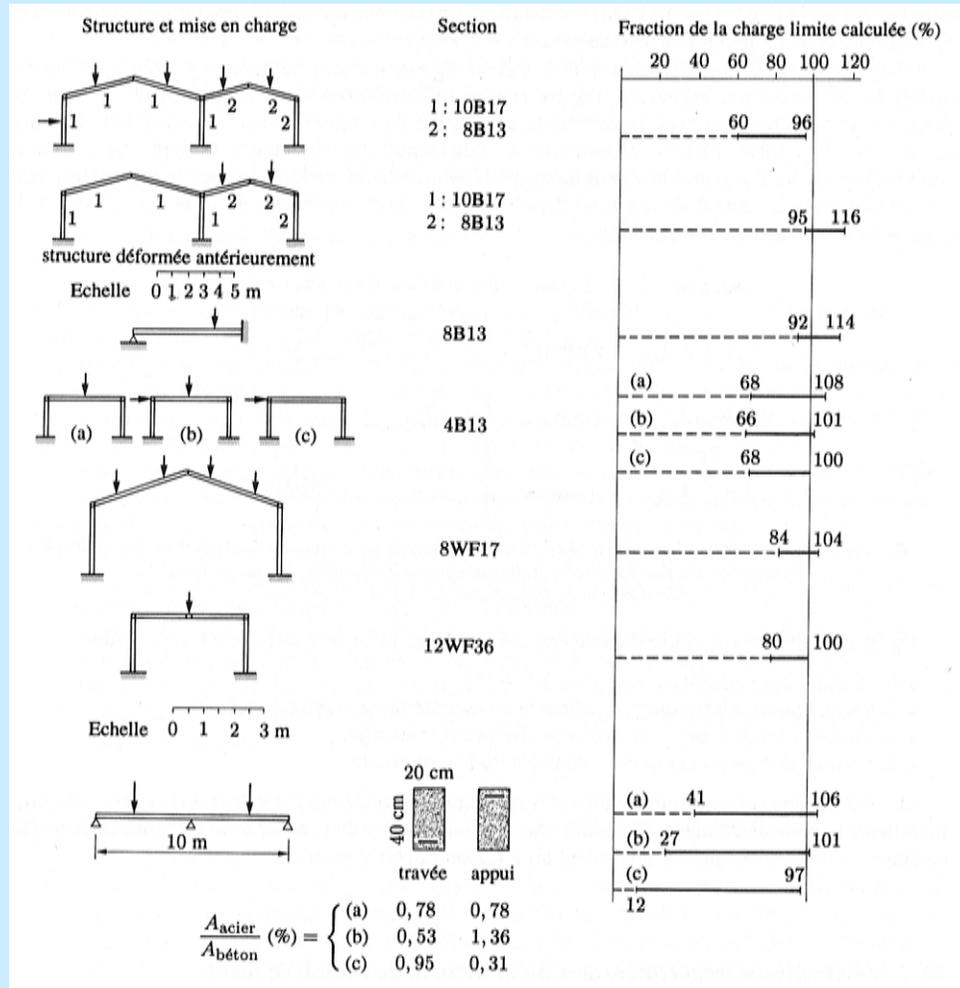
(selon essais de Maier-Leibnitz, 1928)



Les autocontraintes ne modifient que la valeur de la charge élastique maximale, voire l'annulent

Charge limite calculée

Vérification expérimentale de l'analyse limite



Conclusions :

- la charge limite calculée est \leq à la charge limite expérimentale (sécurité assurée)
- la conception élastique de la sécurité **n'est pas fiable**, voire irréaliste