

BONJOUR et BIENVENUE

Intervenants : **Eric DAVALLE**, Dr Ingénieur civil EPFL

Chef du Service de l'électricité de la Ville de Lausanne



avec les assistants du LSMS

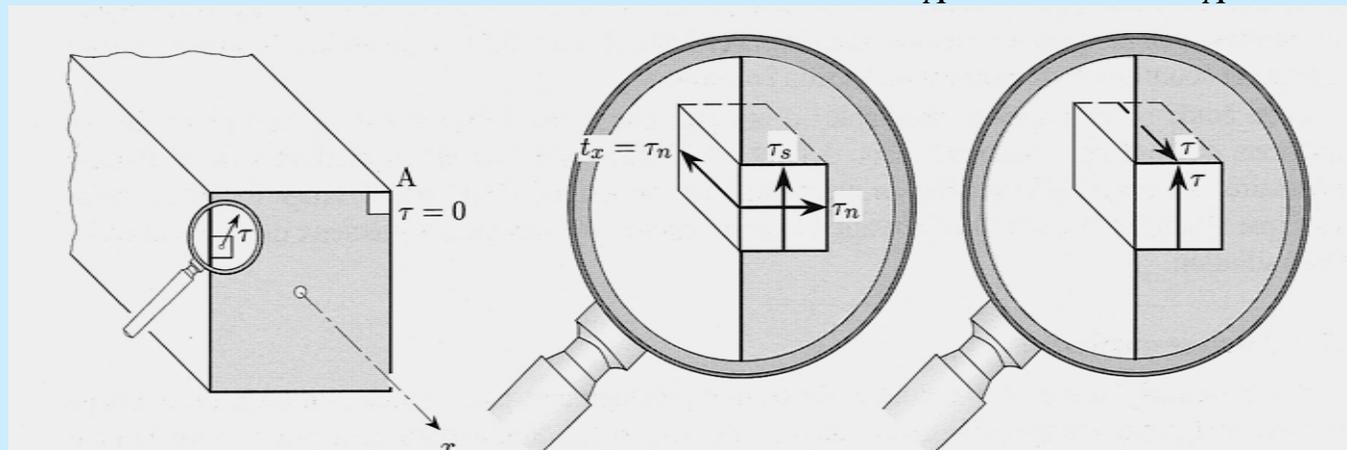
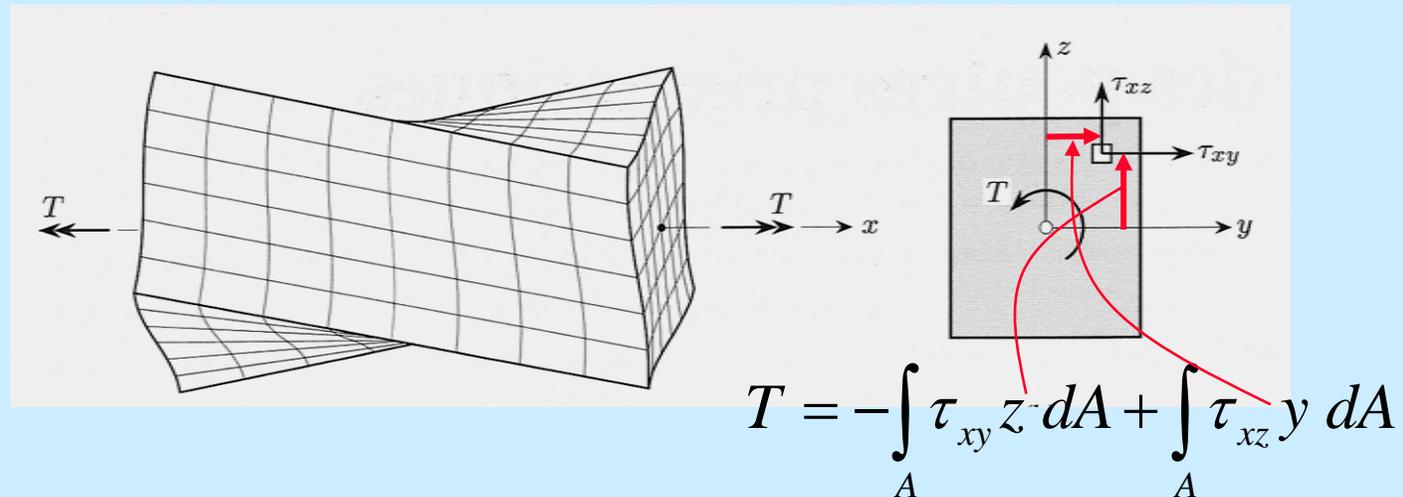
Programme des semaines 1 à 4

Semaines N°		Chapitres	Titres
1	Mardi	7.10 et suivants 14.1 - 14.3	Propriétés mécaniques des matériaux Traction plastique
	Jeudi	15,4 15.5 - 15.9	Flexion plastique plane Flexion plastique plane
2	Mardi	8.1 - 8.7	Torsion uniforme
	Jeudi	8.8 - 8.10	Torsion uniforme
		9.1 - 9.3	Contraintes dues à l'effort tranchant
3	Mardi	9.4 - 9.8	Contraintes dues à l'effort tranchant
	Jeudi	9.9 - 9.12 MS (V3) 7.1 - 7.10	Contraintes dues à l'effort tranchant Formes intégrales d'équilibre et cinématique - Travaux virtuels
4	Mardi	13.1 - 13.6 10.1 - 10.2	Énergie (forces et déformations associées) Déformation des poutres soumises à la flexion simple
	Jeudi	10.3	Déformation des poutres soumises à la flexion simple

8. Torsion uniforme



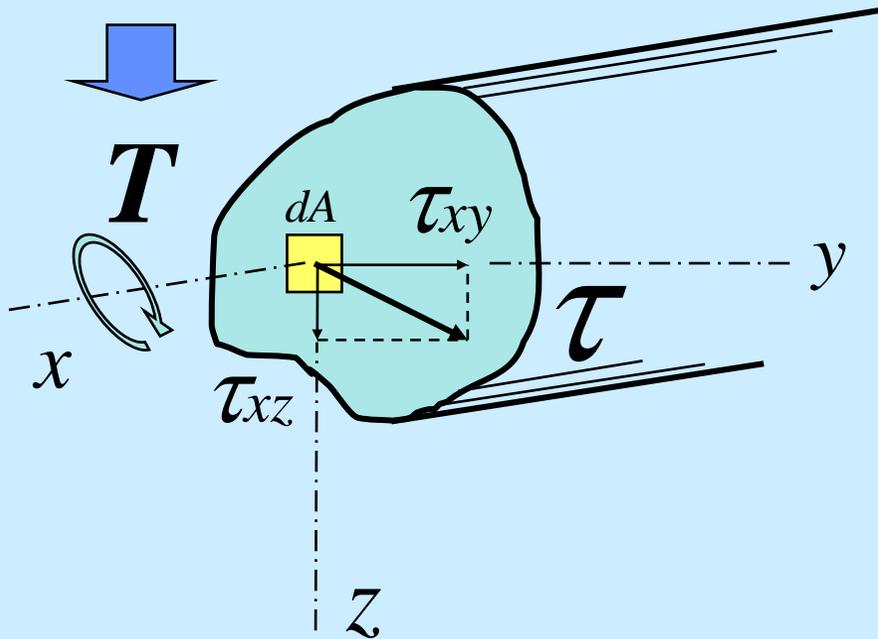
TORSION pure en mécanique des structures



TORSION pure en mécanique des structures

On recherche :

Seul et constant



G : module de glissement (N/cm^2)
 J : constante de torsion (cm^4)

a) STATIQUE

- Diagramme des contraintes tangentielles
- soit : $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau$ (max?)

b) CINÉMATIQUE

- L'angle de torsion par unité de longueur
- soit : $\chi \Rightarrow \chi = \frac{d\theta_x}{dx}$ (Khi)

c) LOI CONSTITUTIVE

- Une relation de type Hooke
- soit : $T = GJ \chi$

Parallèle avec la flexion $M_e = EI \psi_e$

TORSION pure en mécanique des structures

Analogies !

	Traction-compression	Flexion	Torsion
Loi constitutive (Hooke)	$N = EA\varepsilon$	$M = EI \frac{1}{r}$	$T = GJ \chi$
Cinématique	$\varepsilon = \frac{du}{dx}$	$\psi = \frac{1}{r} = \frac{d\theta}{dx}$	$\chi = \frac{d\theta_x}{dx}$
Déplacements	$du = \frac{N}{EA} dx$	$d\theta = \frac{M}{EI} dx$	$d\theta_x = \frac{T}{GJ} dx$
Contraintes-déformations	$\sigma, \underline{\varepsilon}$	$\sigma, \underline{\varepsilon}$	$\tau, \underline{\gamma}$
Constantes	EA	EI	GJ
Structure comparable	N, ε, u	M, ψ, θ	T, χ, θ_x

TORSION pure en mécanique des structures

Poutre à section lentement variable
et/ou $T(x)$ est variable :

$$\chi = \frac{d\theta_x}{dx} \quad \text{et} \quad \chi = \frac{T}{GJ}$$

$$d\theta_x = \chi dx = \frac{T dx}{GJ} \Rightarrow$$

$$\theta_x = \int_0^L \chi dx = \int_0^L \frac{T dx}{GJ}$$

Poutre prismatique de longueur L :

$$\theta_x = \chi L = \frac{TL}{GJ}$$

TORSION (poutre à section circulaire "arbres")

Hypothèse cinématique :

symétrie de révolution et conservation des sections planes (loi de Bernoulli)

Les sections planes tournent rigidement

$$\theta_x = \chi L = \frac{TL}{GJ}$$

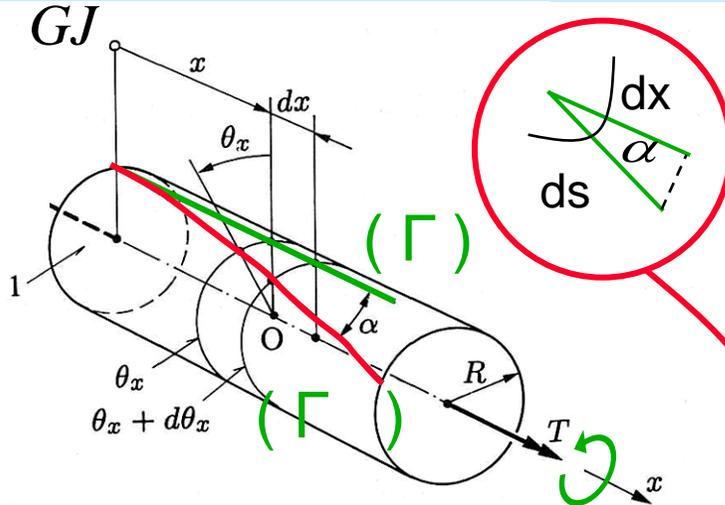


Fig. 8.1 Torsion d'un arbre cylindrique (1 : section origine).

Génératrice (Γ) \rightarrow hélice (Γ'), longueur de l'axe inchangée comme en flexion car :

$$\alpha \rightarrow \text{petit} \rightarrow \cos \alpha = 1 - \alpha^2/2 + \dots \cong 1 \Rightarrow ds \cong dx \Rightarrow \varepsilon = 0$$

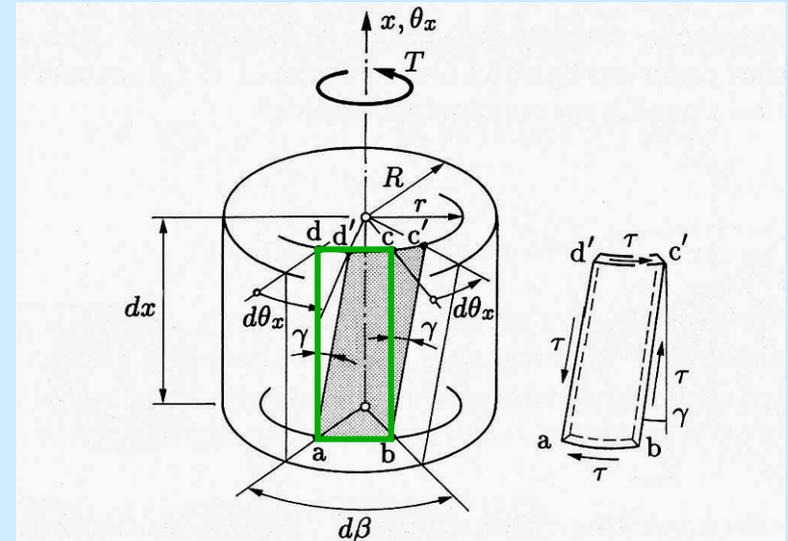


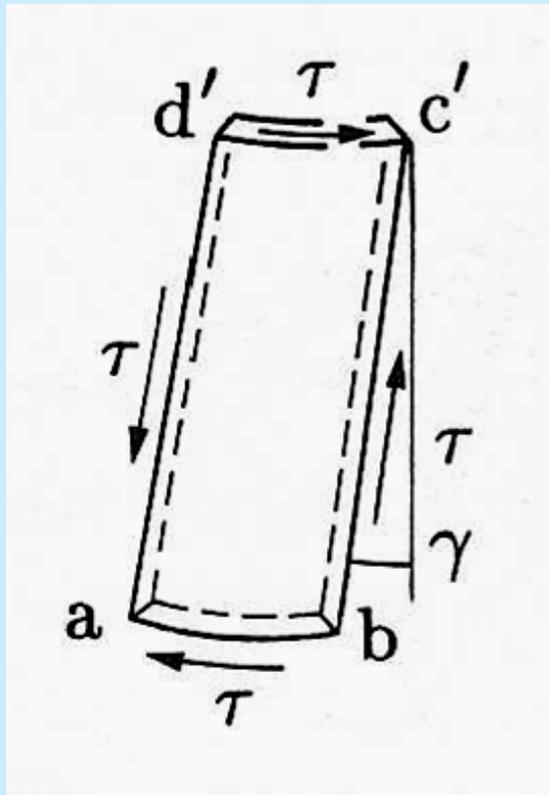
Fig. 8.2 Cinématique en torsion (section circulaire).

Le rectangle **abcd** devient un parallélogramme **abc'd'**
Seuls les angles droits varient \rightarrow glissement seul

$$rd\theta_x = \gamma dx \Rightarrow \gamma = r \frac{d\theta_x}{dx} = r\chi \rightarrow \text{cisaillement pur !}$$

TORSION (poutre à section circulaire "arbres")

Hypothèse loi constitutive : le matériau obéit à la loi de Hooke



Cisaillement pur

$$\tau = G\gamma \Rightarrow \tau = G\chi r$$

τ en distribution linéaire selon le rayon

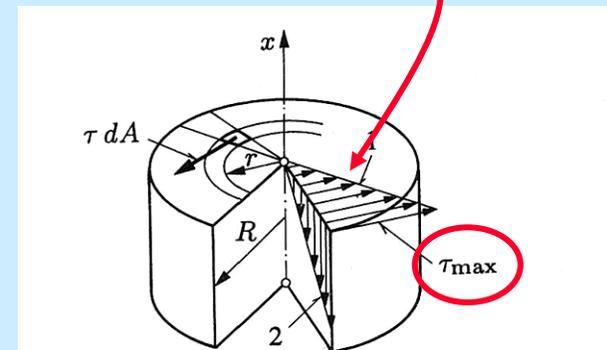
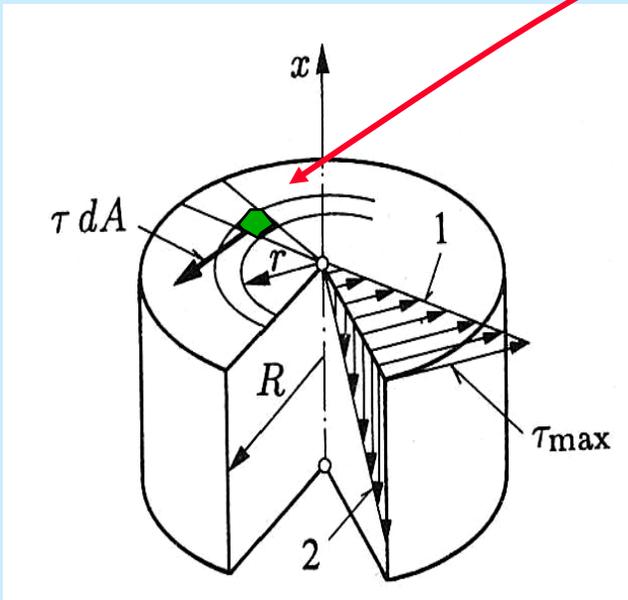


Fig. 8.3 Contraintes tangentielles τ d'une section circulaire (1 : τ agissant sur la section droite ; 2 : τ agissant longitudinalement entre les fibres, par réciprocité).

TORSION (poutre à section circulaire "arbres")

Equations statiques : le principe d'équivalence (efforts intérieurs - contraintes)



$$T = \int_A r \tau dA \Rightarrow T = \int_A r G \chi r dA = G \chi \int_A r^2 dA = G \chi I_p$$

avec pour une section circulaire : $I_p = \pi R^4 / 2$

seul cas !

$$\chi = \frac{T}{G I_p} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{T}{I_p} r \quad \text{avec} \quad \tau_{\max} \quad \text{pour} \quad r = R$$

TORSION (poutre à section circulaire "arbres")

Généralisation : Couronne ou section circulaire creuse

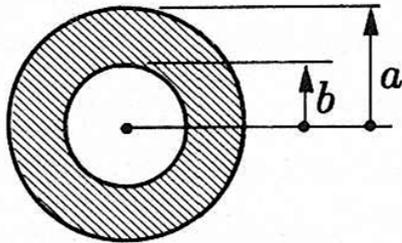


Fig. 8.4 Section circulaire creuse.

$$I_p = \frac{\pi}{2} (a^4 - b^4)$$

On retrouve les résultats selon St-Venant :

- sections planes
- contraintes τ linéaires
- constante de torsion $J \equiv I_p$ inertie polaire

En effet, on se souvient que :

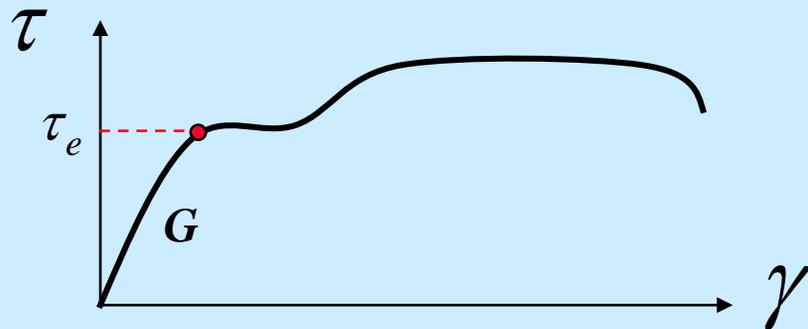
$$T = GJ \chi$$

Essai de résistance à la TORSION

Conditions : Éprouvette cylindrique et calcul de "G"
module de glissement ou dit de Coulomb

$$G = \frac{T L}{\theta_x I_p}$$

1. Matériaux ductiles (métaux)



où θ_x est l'angle de torsion total

$$\left(G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow \text{calcul de } \nu \right)$$

Selon le critère de **plastification de von Mises**, on a :

$$\tau_e \cong \sigma_e / \sqrt{3}$$

(critères rhéologiques, § 7.10, page 123)



$$\tau \leq \tau_{\text{adm}} = \sigma_{\text{adm}} / \sqrt{3}$$

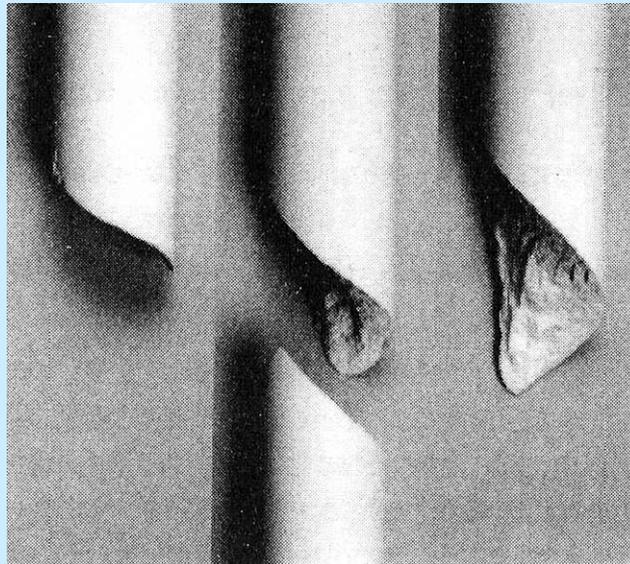
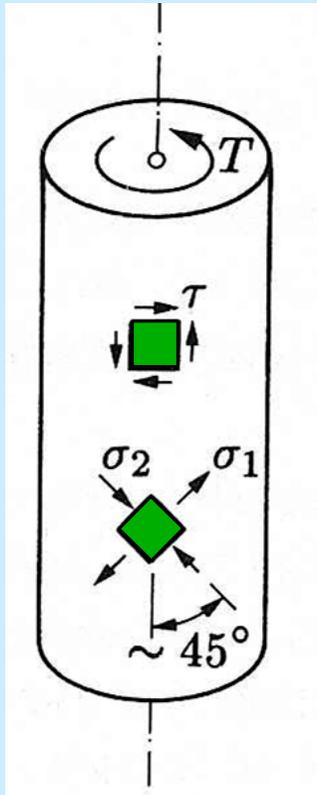
$$\sqrt{3} \tau_d \leq \sigma_{\text{dim}} (= \sigma_e \text{ ou bien } \sigma_{0,2} \dots)$$

Essai de résistance à la TORSION

Conditions : Éprouvette cylindrique et calcul de "G"
module de glissement ou dit de Coulomb

$$G = \frac{T L}{\theta_x I_p}$$

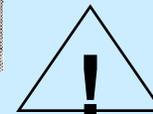
2. Matériaux raides (roches, béton, ...)



Selon le critère de type **courbe intrinsèque** (géotechnique), on a :

$$\tau \leq \tau_{adm} = \tau_u / \gamma$$

$$\tau_d \leq \tau_u$$



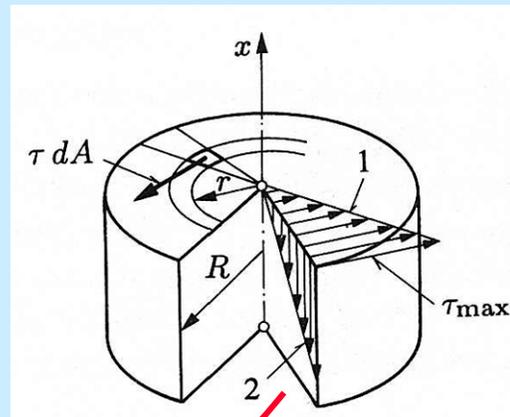
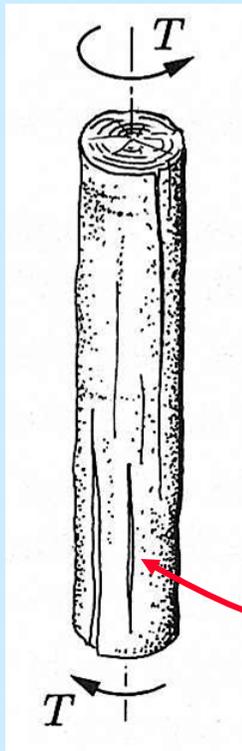
γ est le coefficient de sécurité

Essai de résistance à la TORSION

Conditions : Éprouvette cylindrique et calcul de "G"
module de glissement ou dit de Coulomb

$$G = \frac{T L}{\theta_x I_p}$$

3. Matériaux fibreux (bois)

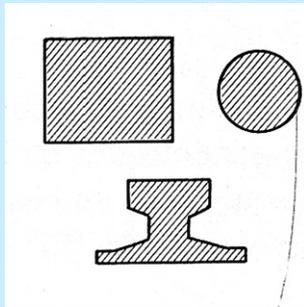


τ sur la section et
 τ longitudinaux entre les fibres

TORSION : types de section droite

!!! Différence essentielle pour le fonctionnement torsionnel

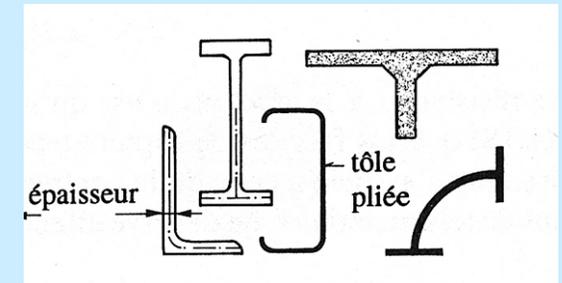
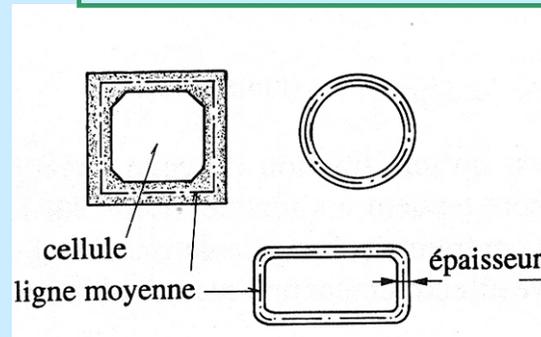
Sections **massives**



Sections à **parois minces**

fermées

ouvertes

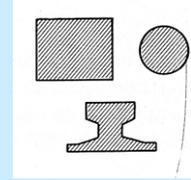


Torsion **uniforme domine**
(même si gauchissement empêché)

Torsion **non uniforme domine**
(si gauchissement empêché)

Torsion uniforme = gauchissement libre et équilibre par seules τ_{xy} OU τ_{xz}

TORSION : sections massives



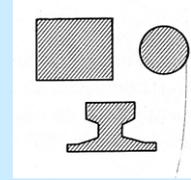
Sans solution analytique mais via l'analogie hydrodynamique : St-Venant a noté que pour une **poutre à section elliptique** :

$$T = J G \chi = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} G \chi \quad (\text{vol. 3, sect. 6.6})$$

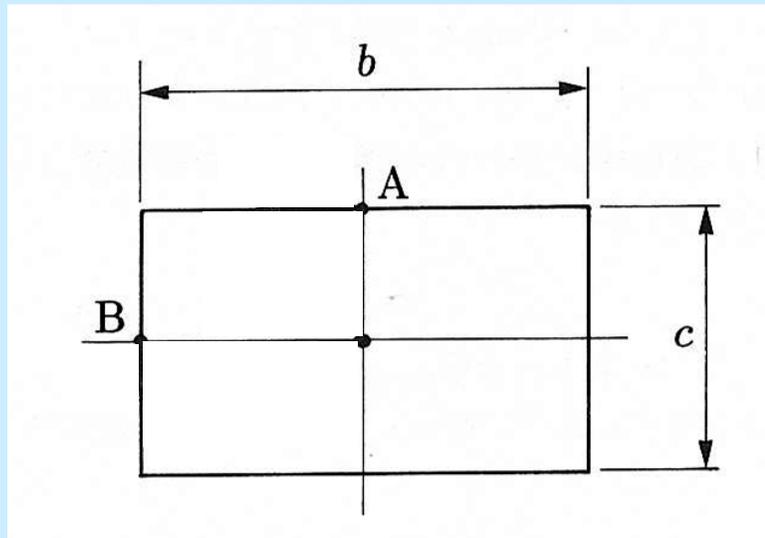
$$J = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} = \frac{A^4}{4\pi^2 I_p} \cong \frac{A^4}{40 I_p}$$

$$A = \pi ab \text{ est l'aire} \quad \text{et} \quad I_p = \frac{(a^2 + b^2)}{A/4}$$

TORSION : sections massives



Pour une section rectangulaire ($b \geq c$) :



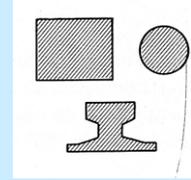
$$\tau_{\max} = \tau_A = \frac{T}{\alpha b c^2}$$

$$\tau_B = \frac{T}{\beta b c^2}$$

$$J = \gamma b c^3$$

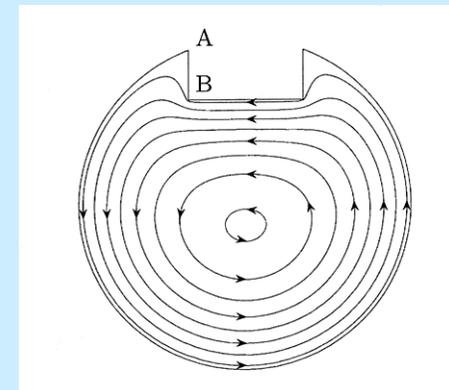
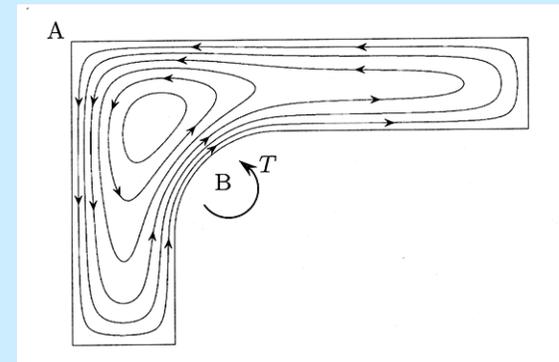
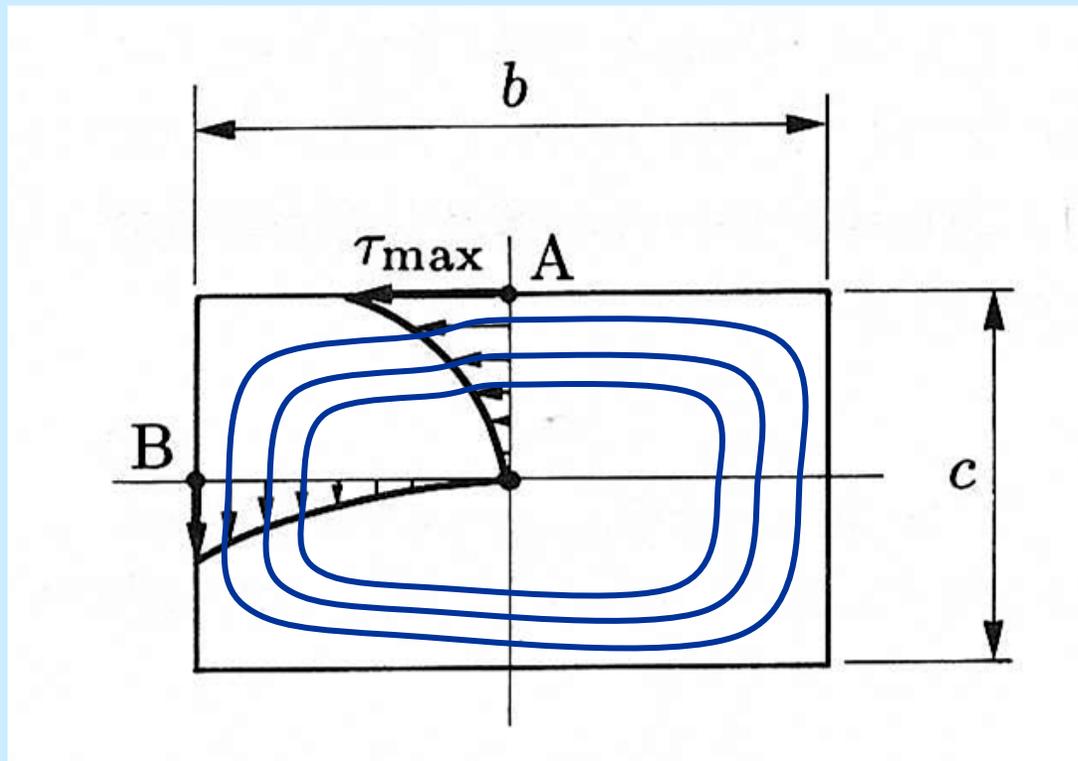
(α , β et γ dans table
via des développements en série)

TORSION : sections massives



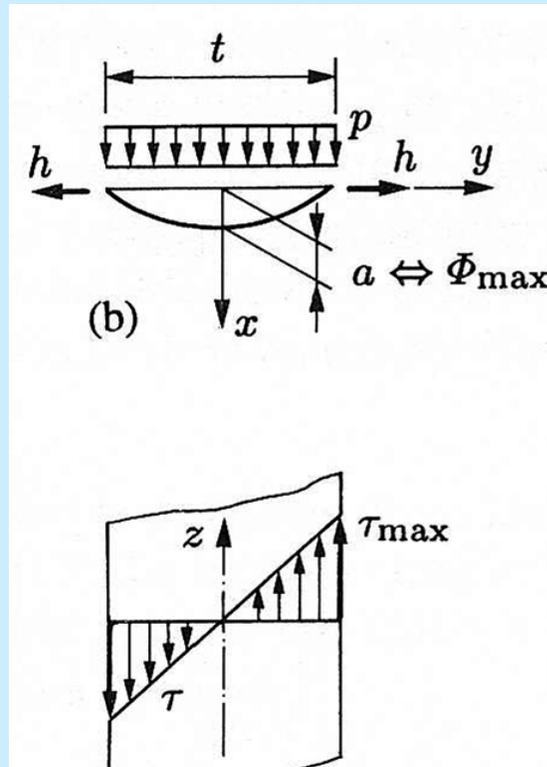
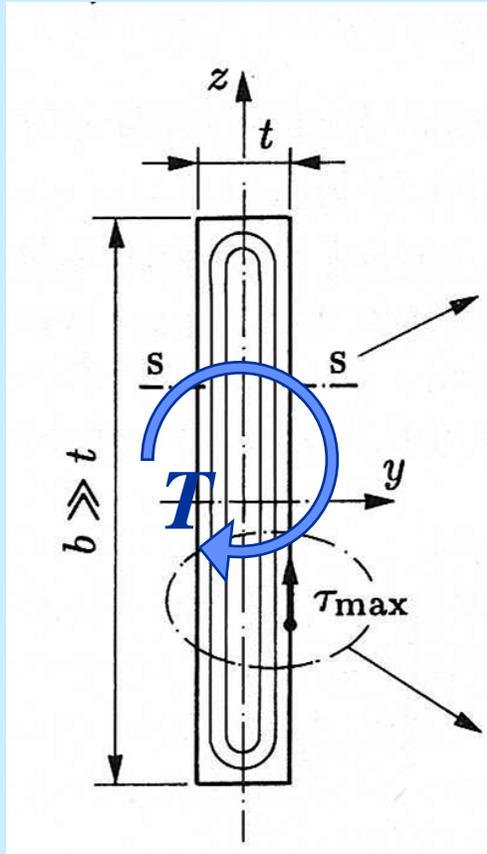
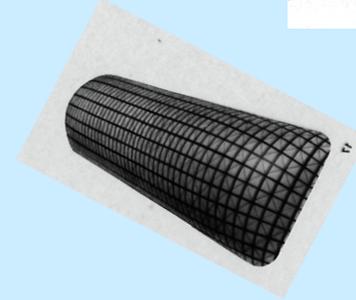
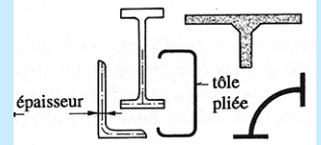
Pour une **section rectangulaire** ($b \geq c$)

Analogie d'un écoulement hydrodynamique (Kelvin et Greenhill):



TORSION : sections ouvertes à parois minces

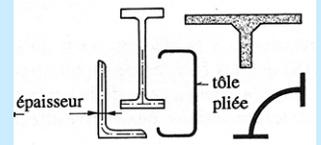
Considérons une section rectangulaire ($b \gg t$, $b \geq 10 t$)



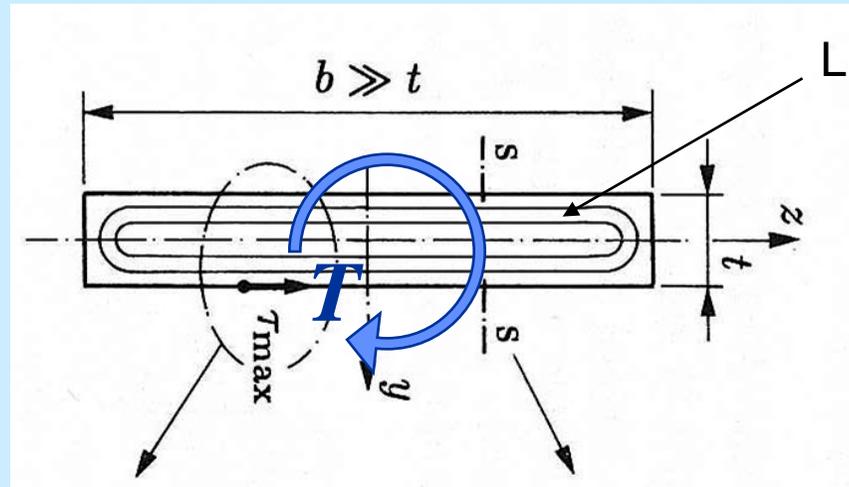
Analogie de la membrane :

- surface cylindrique (sauf aux extrémités, effets négligés)
- en section transversale, cela correspond à l'équilibre d'un câble sous charge uniforme (comportement parabolique)

TORSION : sections ouvertes à parois minces

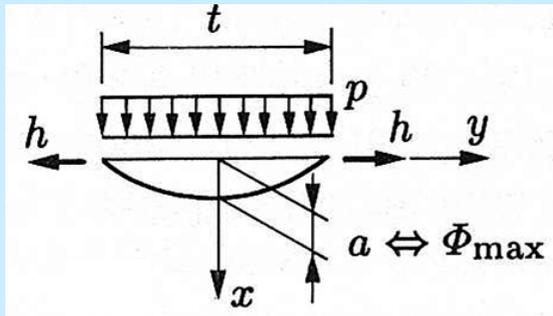


Considérons une section rectangulaire ($b \gg t$, $b \geq 10 t$)



Lignes de cisaillement

1)

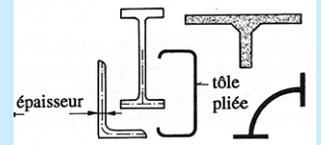


$$a = \frac{p t^2}{8 h} = \frac{p t^2}{h \cdot 8} = 2 G \chi \frac{t^2}{8} \Rightarrow \text{la fct contrainte } \Phi_{\max} = G \chi \frac{t^2}{4}$$

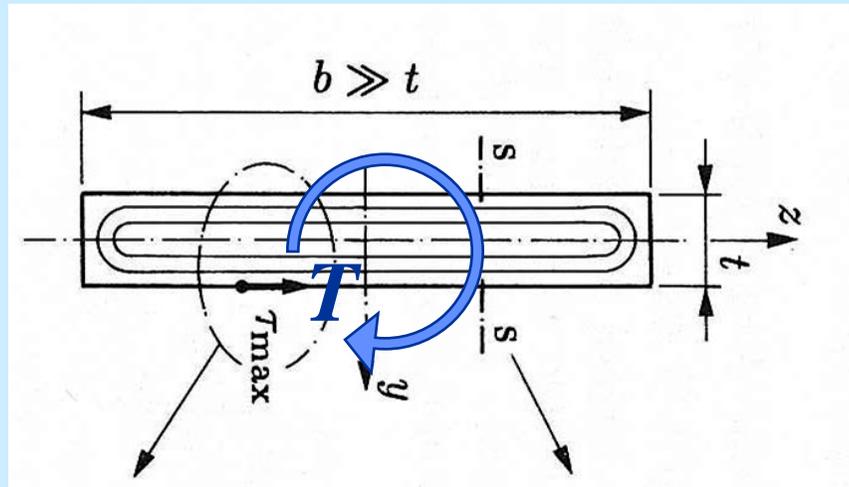
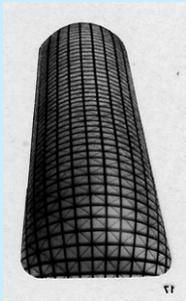
(vol. 3, sect. 6.4)

$$\Phi_{\max} = G \chi \frac{t^2}{4}$$

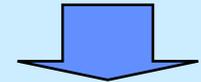
TORSION : sections ouvertes à parois minces



Considérons une section rectangulaire ($b \gg t$, $b \geq 10 t$)



$$\Phi_{\max} = G \chi \frac{t^2}{4}$$



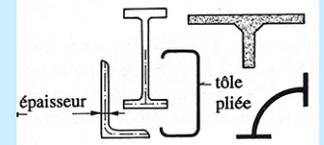
- 2) On fait l'hypothèse (membrane cylindrique) et que le moment de torsion T vaut le double du volume :

(vol. 3, sect. 6.3.2, page 113)

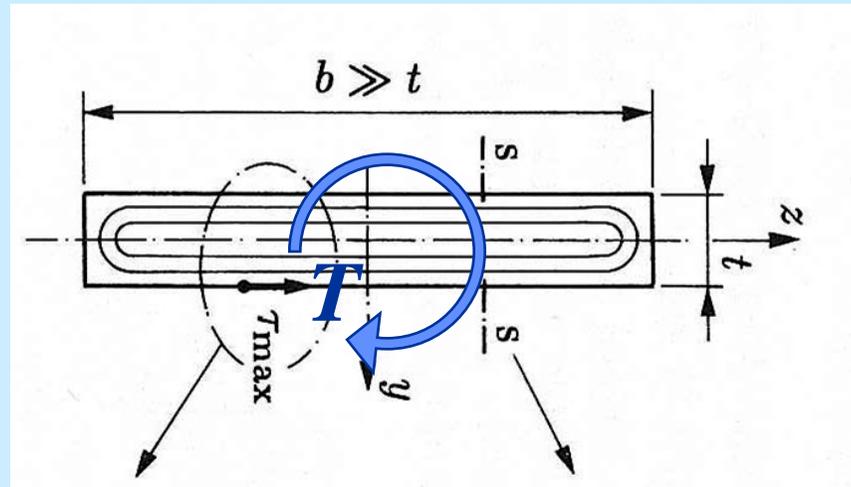
$$T = 2 \frac{2}{3} t \Phi_{\max} b = \frac{4}{3} t \Phi_{\max} b \Rightarrow T = \frac{4}{3} t G \chi \frac{t^2}{4} b$$

$$T = G \chi J \quad \text{avec} \quad J = \frac{1}{3} b t^3$$

TORSION : sections ouvertes à parois minces



Considérons une section rectangulaire ($b \gg t$, $b \geq 10 t$)

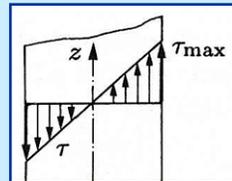


- 3) On a une pente maximale sur les bords, lieu des contraintes maximales :

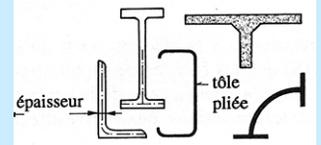
$$\tau_{\max} = \frac{2 \Phi_{\max}}{t/2} = \frac{4 \Phi_{\max}}{t} = G \chi t$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{J} t \quad \text{sachant que} \quad G \chi = \frac{T}{J}$$

(répartition linéaire des contraintes tangentielles)



TORSION : sections ouvertes à parois minces



Comparaison section massive – section ouverte mince :

Section massive

$$\tau_{\max} = \tau_A = \frac{T}{\alpha b c^2}$$

$$\tau_B = \frac{T}{\beta b c^2}$$

$$J = \gamma b c^3$$

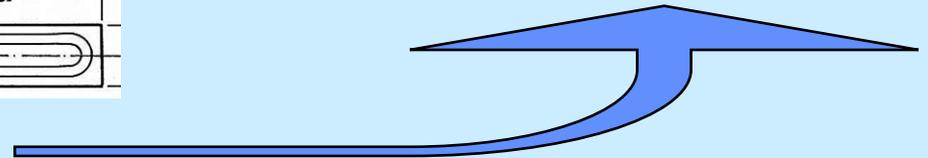


avec $b/c \gg 10 (\infty)$, $\gamma = 1/3$

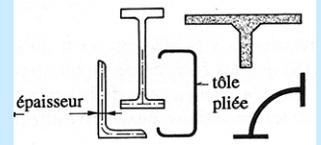
Section ouverte mince

$$\tau_{\max} = \frac{T}{J} t \quad \text{sachant que} \quad G \chi = \frac{T}{J}$$

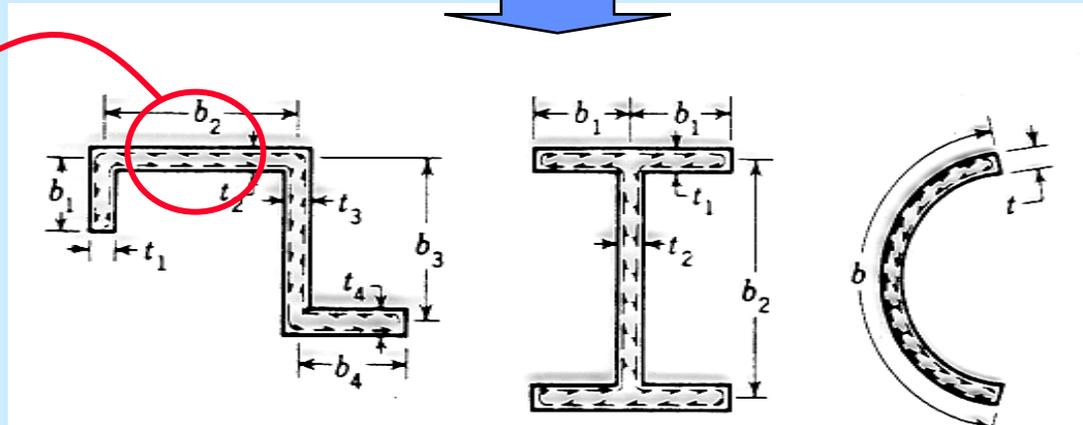
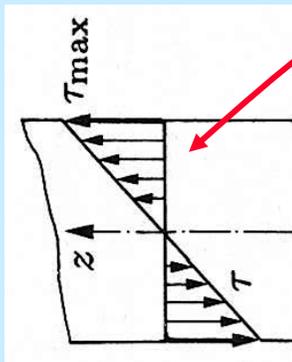
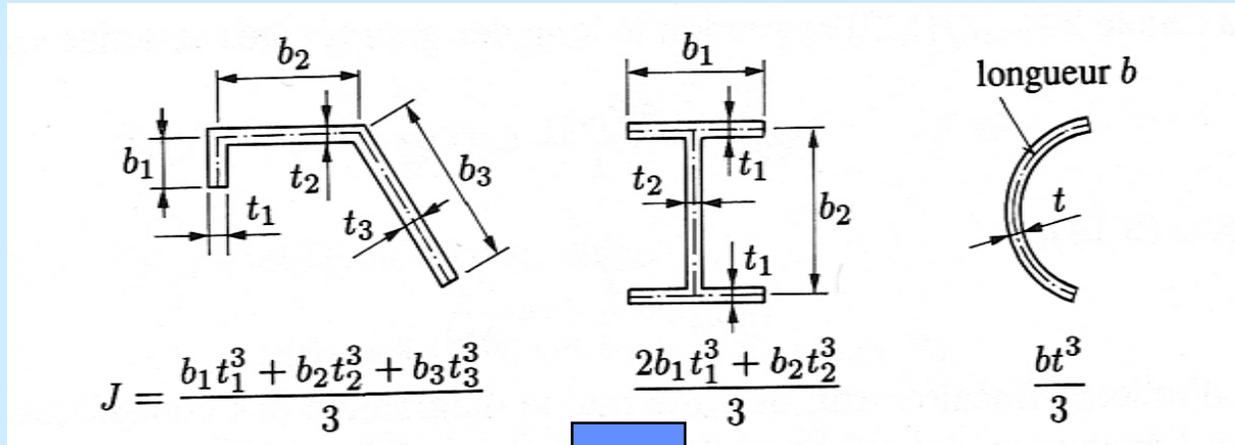
$$T = G \chi J \quad \text{avec} \quad J = \frac{1}{3} b t^3$$



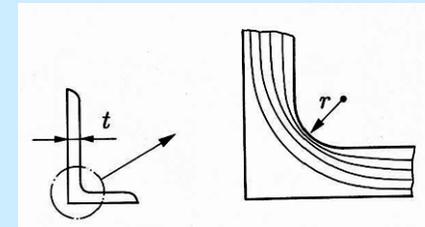
TORSION : sections ouvertes à parois minces



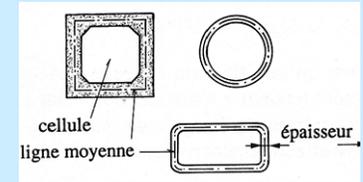
Sections ouvertes à parois minces quelconques :



Concentrations de contraintes



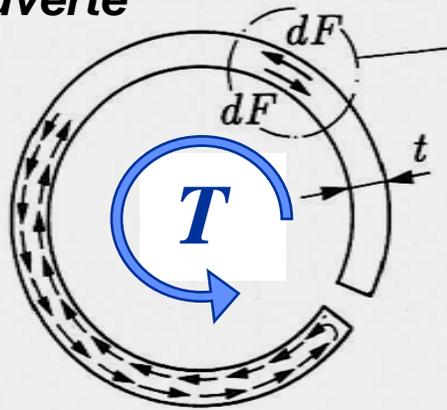
TORSION : sections fermées à parois minces



Différence fondamentale de comportement :

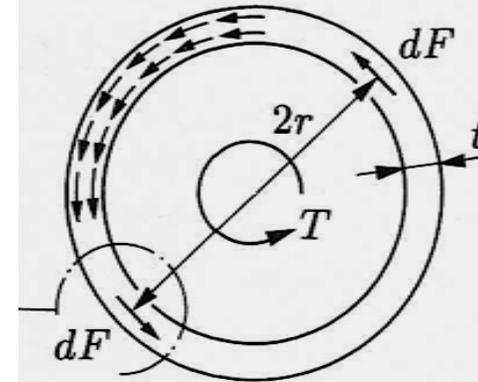
Beaucoup plus résistante
à la torsion

Section ouverte



(a) $dT = \frac{2}{3} t dF$

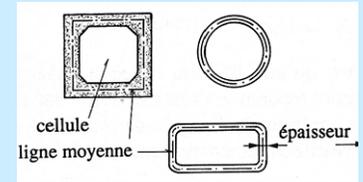
Section fermée



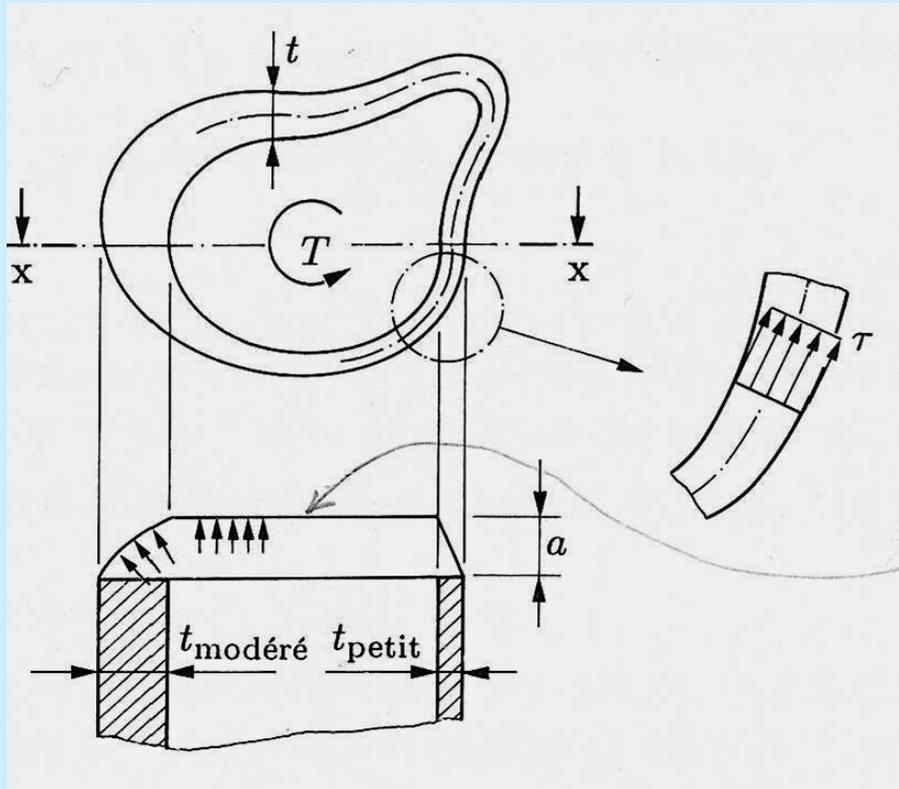
(b) $dT = 2 r dF$

$J_{\text{fermée}} \gg J_{\text{ouverte}}$

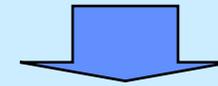
TORSION : sections fermées à parois minces



Section unicellulaire de forme quelconque :



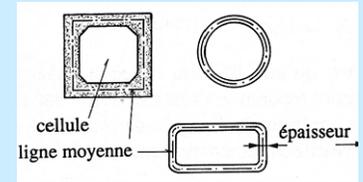
Si t petite (courbure \sim nulle)
vis-à-vis des dimensions de la section



$$\tau = \text{constante sur } t$$

Résoudre avec l'analogie de la membrane
(avec a constant et membrane peu bombée)

TORSION : sections fermées à parois minces



Section fermée à une cellule :

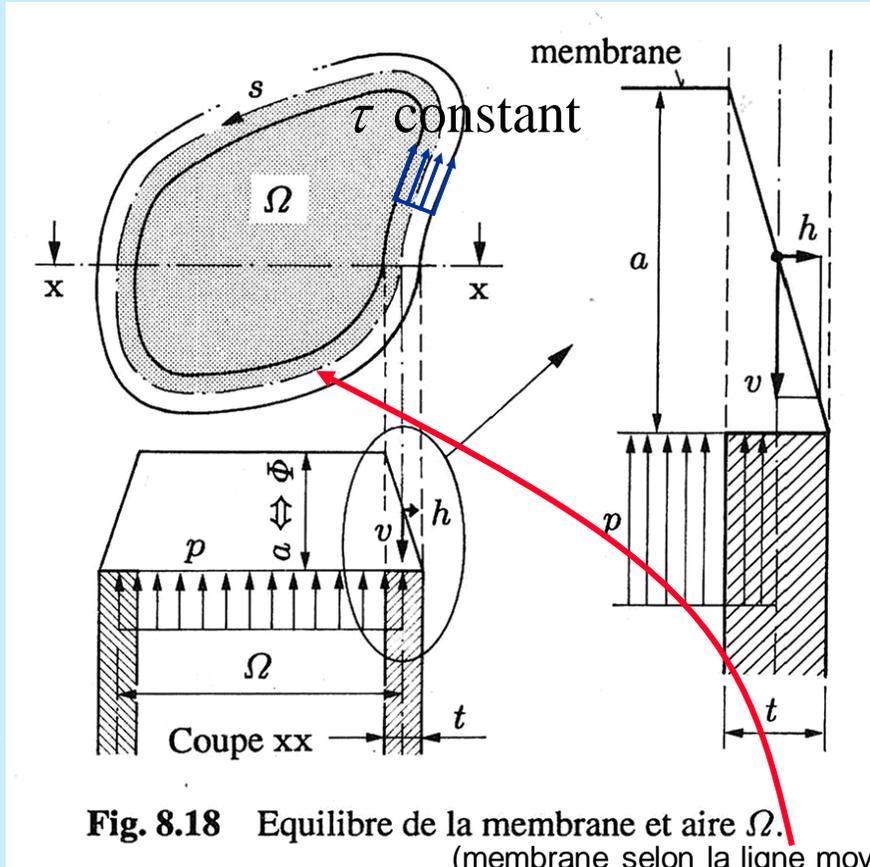


Fig. 8.18 Equilibre de la membrane et aire Ω .
(membrane selon la ligne moyenne)

Si on considère l'équilibre de la membrane :

$$\frac{v}{h} = \frac{a}{t}$$

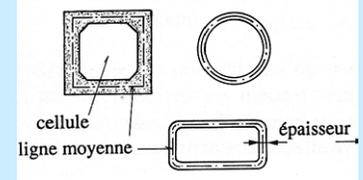
Si s est l'abscisse curviligne le long de la ligne moyenne :

$$p \Omega = \oint v ds = \oint \frac{a h}{t} ds = a h \oint \frac{ds}{t}$$

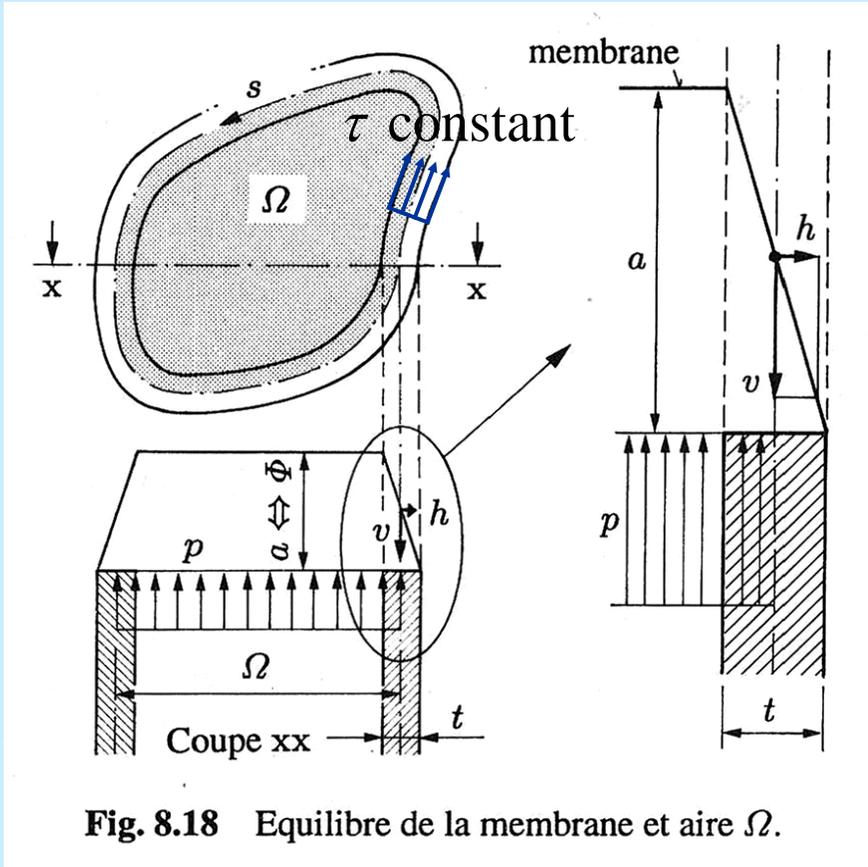
Ainsi, la flèche a vaut :

$$a = \frac{p \Omega}{h \oint \frac{ds}{t}} = \Phi$$

TORSION : sections fermées à parois minces



Section fermée à une cellule :



$$a = \frac{p \Omega}{h \int \frac{ds}{t}} = \Phi$$

membrane \Rightarrow $\frac{p}{h} = 2G\chi$ torsion

$$\Phi = \frac{2G\chi \Omega}{\int \frac{ds}{t}}$$

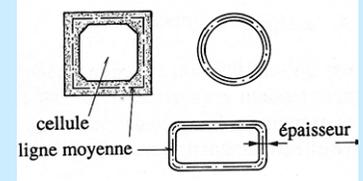
Ainsi, la moment de torsion T vaut :

$$T = 2\Omega\Phi = G\chi \frac{4\Omega^2}{\int \frac{ds}{t}}$$

(surface cylindrique)

Fig. 8.18 Equilibre de la membrane et aire Ω .

TORSION : sections fermées à parois minces



Section fermée à une cellule :

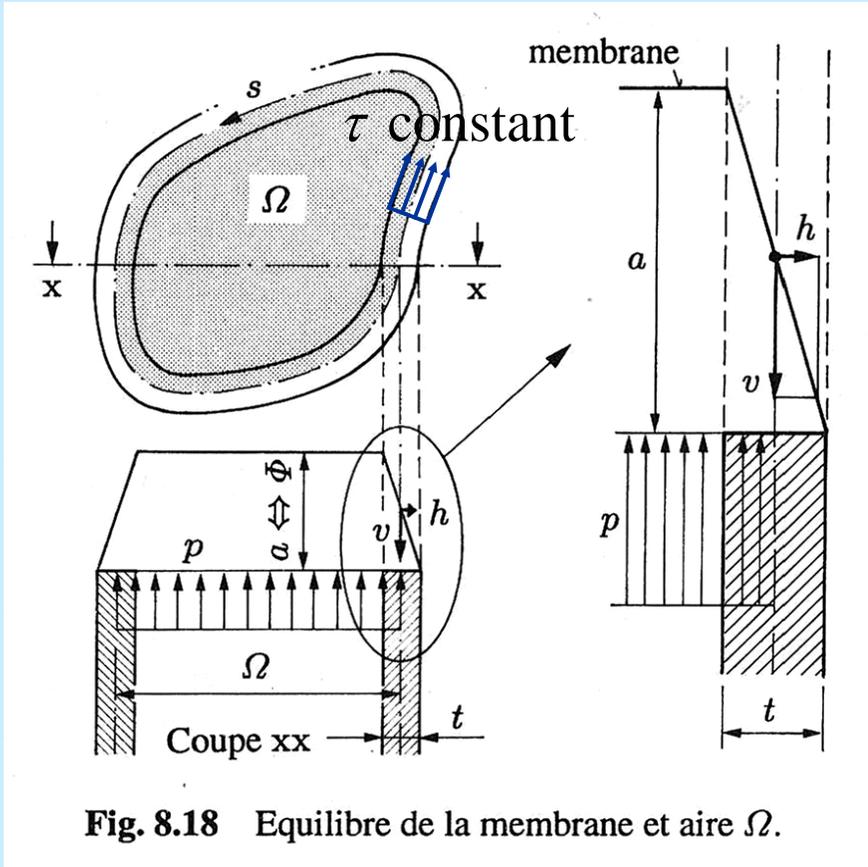


Fig. 8.18 Equilibre de la membrane et aire Ω .

Ainsi, la constante de torsion J vaut :

$$J = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{t}} \text{ selon Bredt (1876)}$$

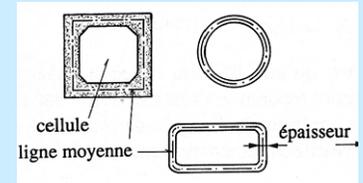
La pente donne la contrainte tangentielle:

$$\tau = \frac{\Phi}{t} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{T}{2\Omega t} \quad (\tau_{\max} \text{ pour } t_{\min})$$

Le **flux de cisaillement** est la résultante des contraintes tangentielles, noté f :

$$\Phi = f = \tau t = \frac{T}{2\Omega} = \text{constante (N/m)}$$

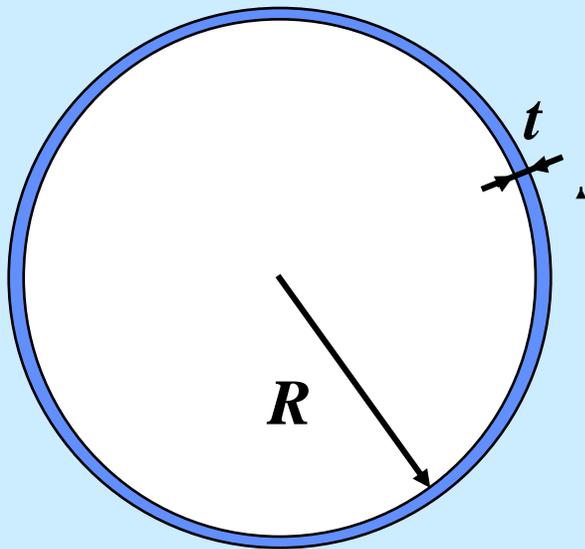
TORSION : sections fermées à parois minces



Application au cas du **TUBE** d'épaisseur $t \ll$ au Rayon R :

Ainsi, la constante de torsion J vaut :

$$J = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{t}} \text{ selon Bredt (1876)}$$



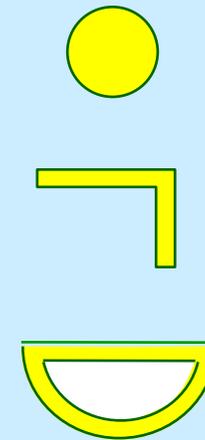
$$J = \frac{4\left(\pi\left(R + \frac{t}{2}\right)^2\right)^2}{\frac{2\pi}{t}\left(R + \frac{t}{2}\right)} = 2\pi t\left(R + \frac{t}{2}\right)^3 \approx 2\pi t R^3$$



TORSION : sections - synthèse

**En torsion
ne jamais oublier
l'importance de
la forme de la section !**

$$\tau = \begin{cases} \frac{T}{I_p} r \\ \frac{T}{J} t \\ \frac{T}{2\Omega t} \end{cases}$$



Mécanique des structures I

TORSION : synthèse

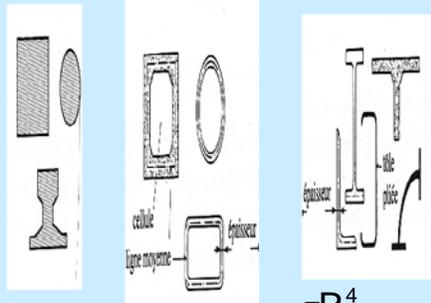
$$T = GJ\chi \quad \text{avec} \quad \chi = \frac{d\theta_x}{dx}$$

Séjos massifs

Séjos à parois minces

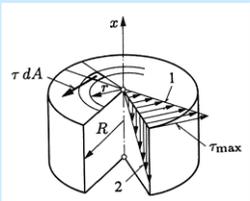
fonés

ovets

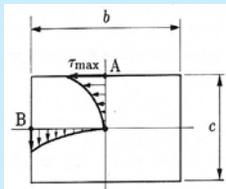


$$T = GI_p\chi \quad \text{avec} \quad I_p = \frac{\pi R^4}{2}$$

$$\text{et} \quad \tau = \frac{T}{I_p}r \quad \text{avec} \quad \tau_{\max} = \frac{T}{I_p}R$$



$$\tau = G\gamma = f(T, b/c, \alpha\beta\gamma)$$

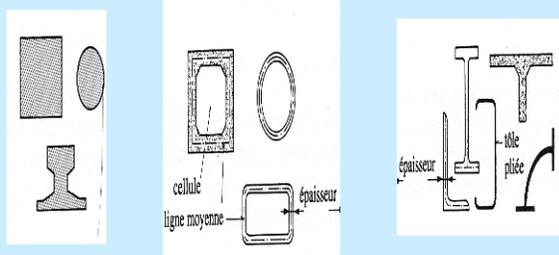


Séjos massifs

Séjos à parois minces

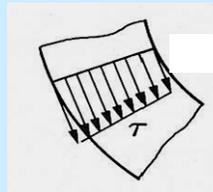
fonés

ovets



$$T = 2\Omega\phi = G\chi \frac{4\Omega^2}{t} ds$$

$$\text{et} \quad \tau = \frac{\phi}{t} = \frac{T}{2\Omega t} \quad \text{si "t" petit} \Rightarrow \tau = \text{cte}$$

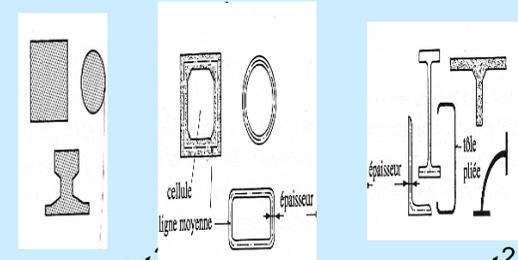


Séjos massifs

Séjos à parois minces

fonés

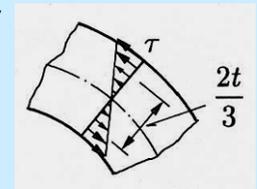
ovets



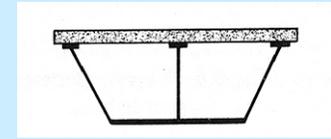
$$a = \frac{pt^2}{8h} \Leftrightarrow \phi = G\chi \frac{t^2}{4}$$

$$T = GJ\chi \quad \text{avec} \quad J = \frac{bt^3}{3}$$

$$\text{et} \quad \tau_{\max} = \frac{T}{J}t$$



TORSION : Plusieurs cellules adjacentes



Problème hyperstatique de $d^{\circ} (n-1)$, n étant le nombre de cellules



Bonne approximation : *en calculant avec la plus grande des cellules et en négligeant les parois internes*

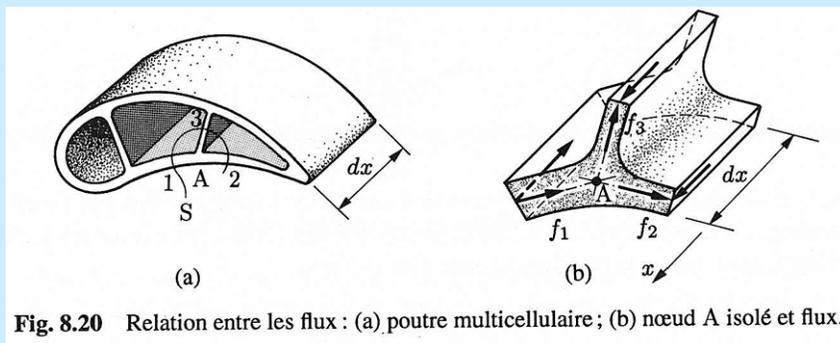


Fig. 8.20 Relation entre les flux : (a) poutre multicellulaire ; (b) nœud A isolé et flux.

Les flux de cisaillement concourants sont en équilibre :

$$\sum f_{\text{noeud}} = 0$$

(analogie hydrodynamique)

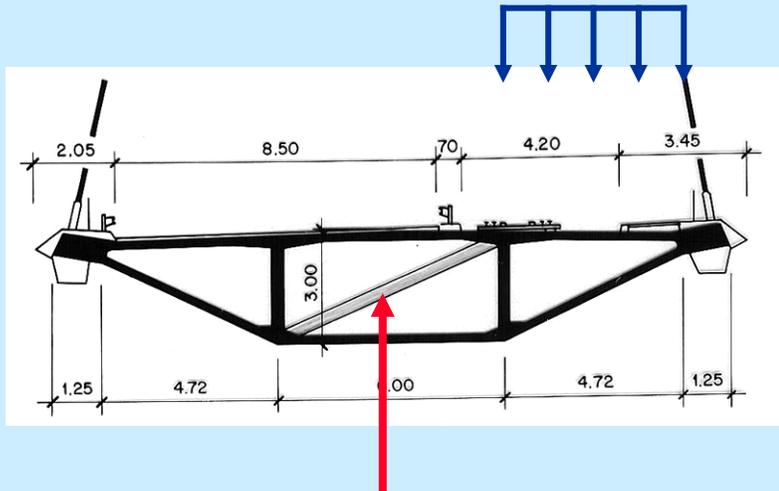
TORSION : sections fermées

Exemple du pont de St Nazaire (France)

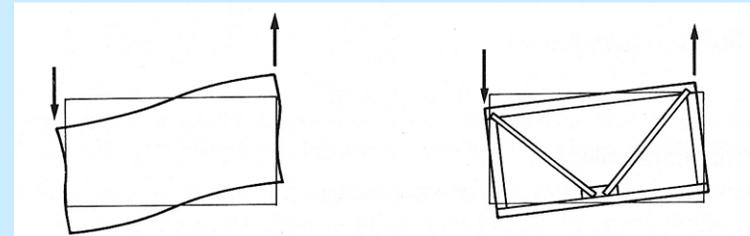


TORSION : sections fermées

Entretoisement, pourquoi? :



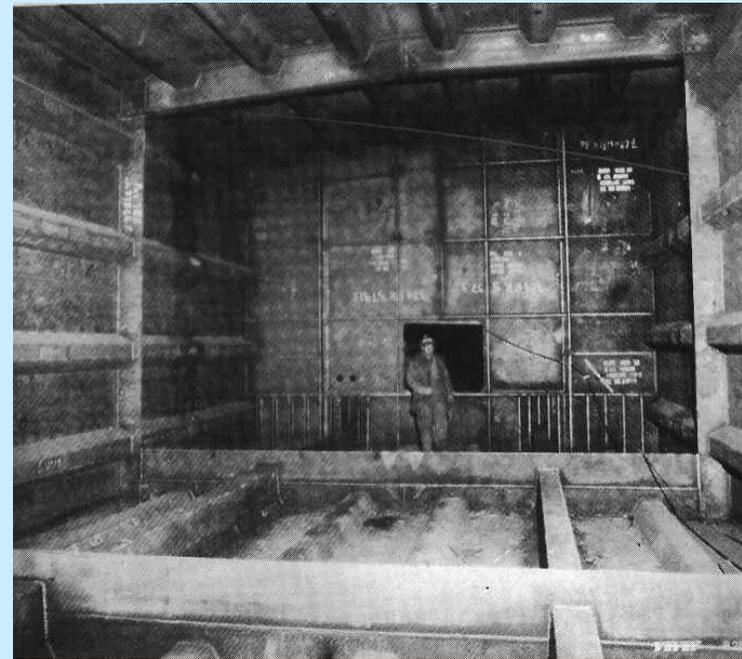
Entretoises ou diaphragmes



On veut **conserver la forme de la section**
(*théorie de St-Venant, section tourne en bloc!*)

TORSION : sections fermées

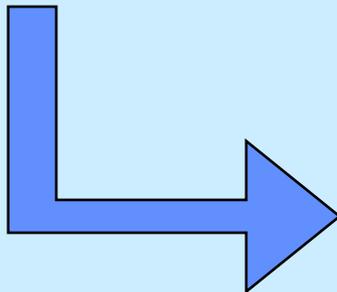
Exemples d'entretoisement ou de raidissement



TORSION : sections composées

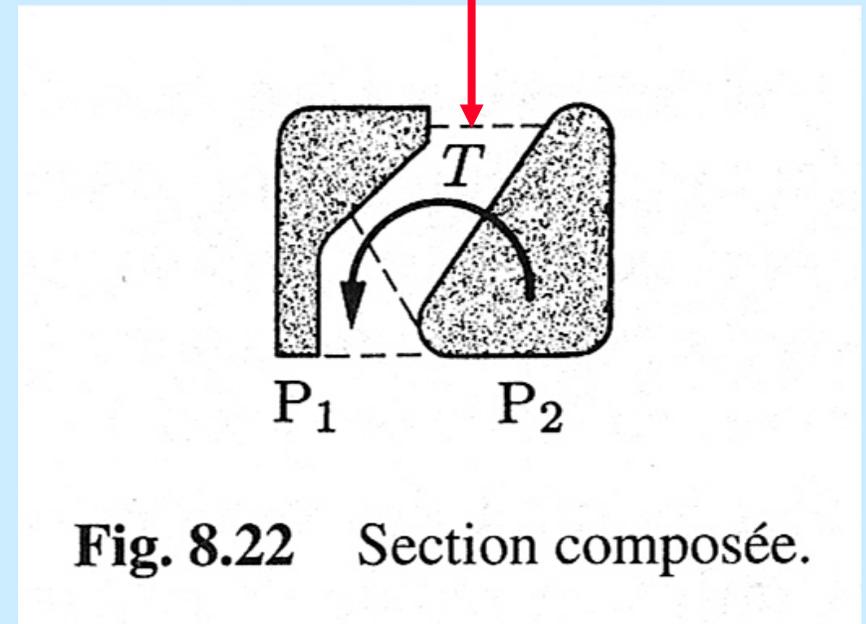
En torsion, **différentes formules** :

- section droite, type **massif**
- section droite, type **ouvert**
- section droite, type **fermé**



Nouvelles formules si **composition**

**Système
d'entretoises ou de diaphragmes**



TORSION : sections composées de type quelconque

Hyperstaticité de d°1

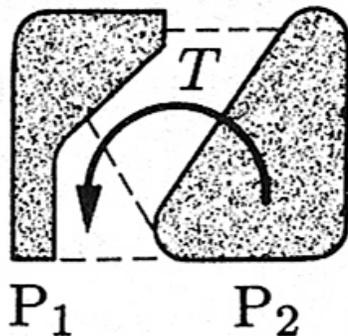


Fig. 8.22 Section composée.

a) Équilibre statique :

$$T = T_1 + T_2$$

b) Cinématique (rotation en bloc) :

$$\chi = \chi_1 = \chi_2$$

c) Loi constitutive (Hooke) :

$$T = GJ \chi \quad T_1 = GJ_1 \chi_1 \quad T_2 = GJ_2 \chi_2$$

TORSION : sections composées de type quelconque

Hyperstaticité de d°1

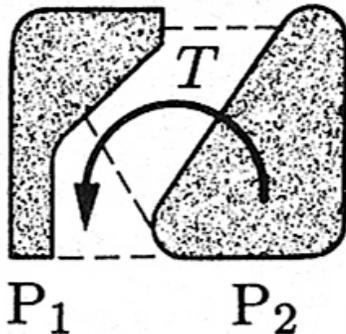


Fig. 8.22 Section composée.

$$T = T_1 + T_2 \quad \text{et} \quad \chi = \chi_1 = \chi_2$$

$$T = \cancel{GJ} \chi = GJ_1 \chi_1 + GJ_2 \chi_2 \\ = \cancel{GJ_1} \chi + \cancel{GJ_2} \chi$$

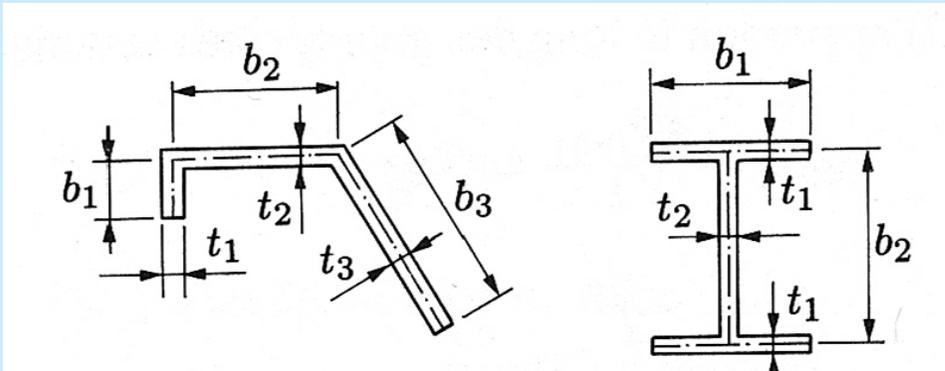
$$J = J_1 + J_2$$

de même,

$$\frac{T}{GJ} = \frac{T_1}{GJ_1} = \frac{T_2}{GJ_2}$$

$$T_1 = \frac{J_1}{J} T \quad T_2 = \frac{J_2}{J} T$$

TORSION : section ouverte en multi rectangles

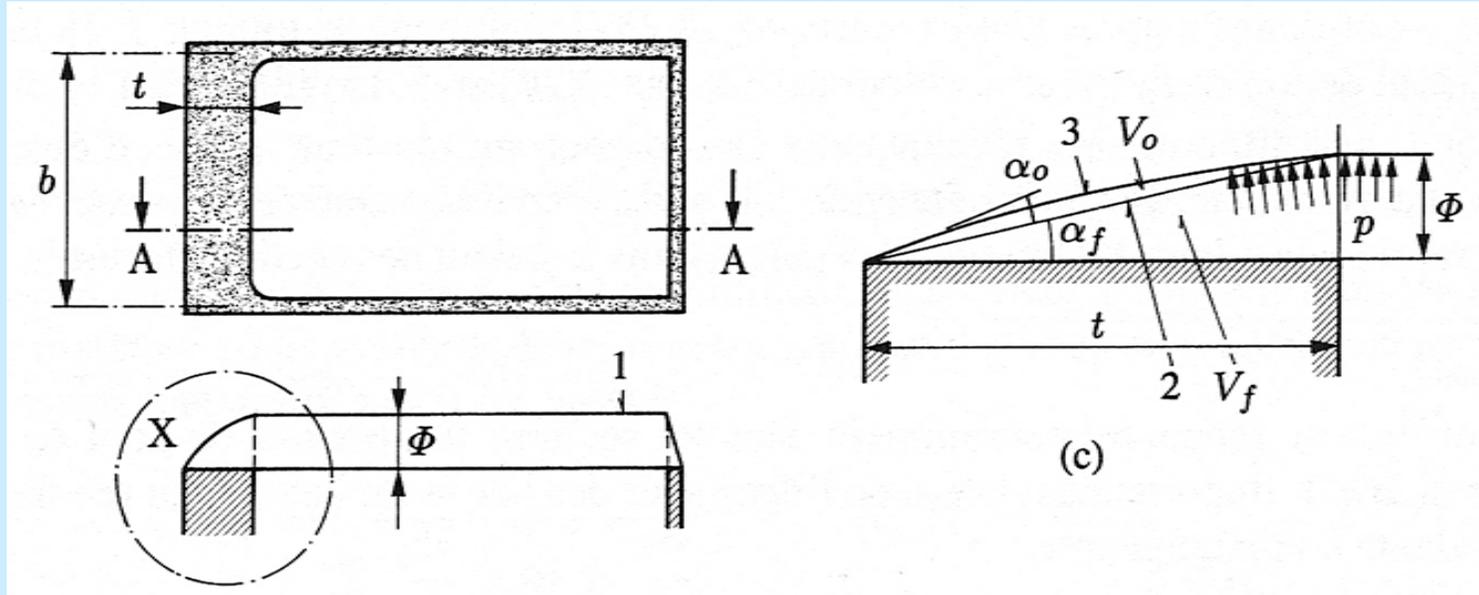


$$J = J_1 + J_2 = \sum_i J_i$$

$$T_i = \frac{J_i}{J} T$$

$$\tau_{\max i} = \frac{T_i}{J_i} t_i = \frac{T}{J} t_i$$

TORSION : section fermée à paroi d'épaisseur modérée

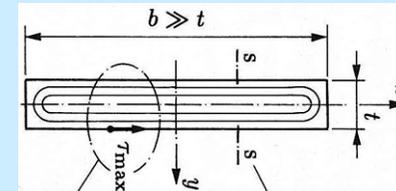
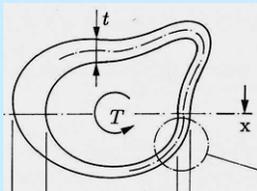


On est dans une situation de **superposition** :

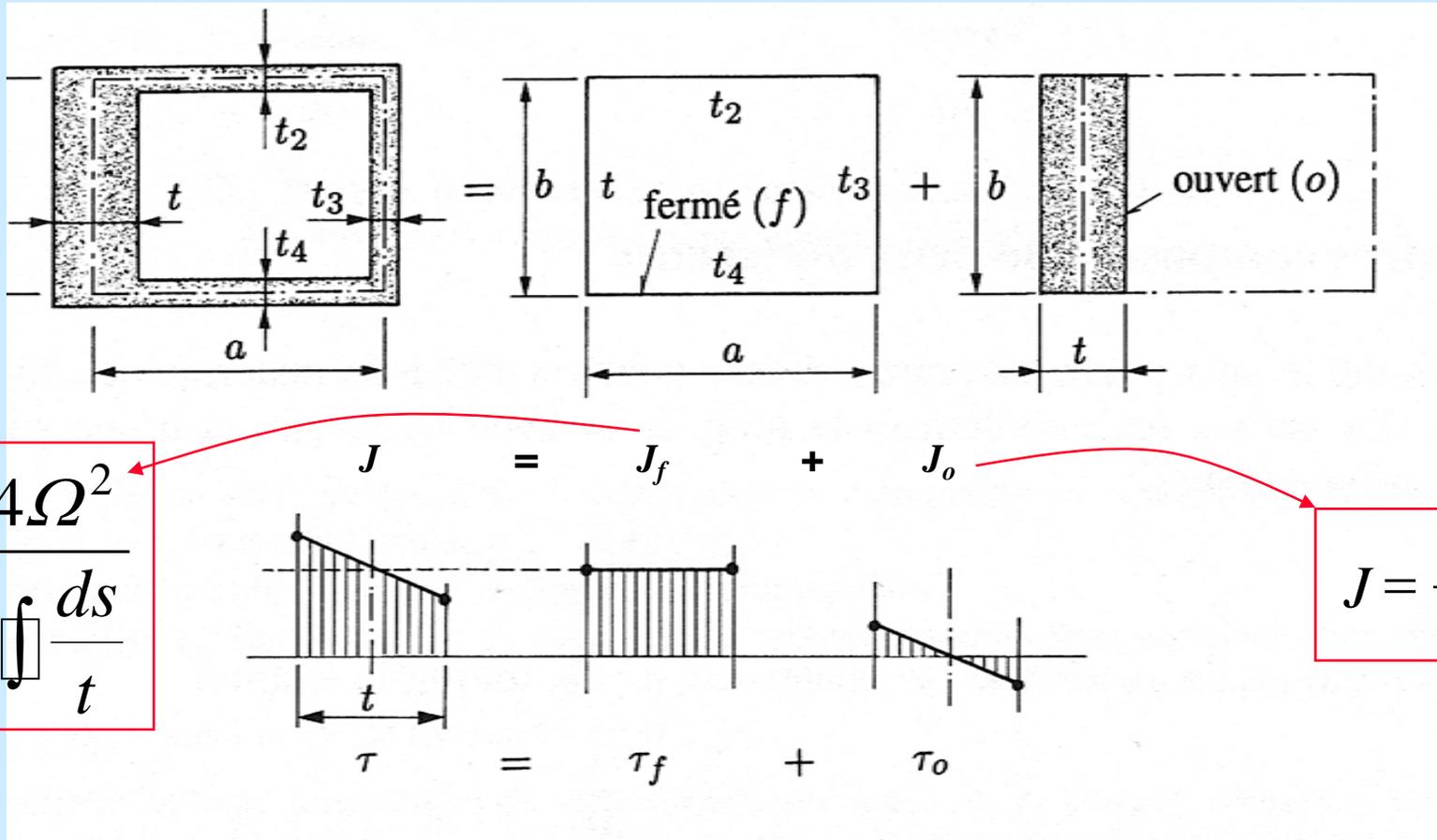
Section fermée plan (8.7.2)

+

section rectangulaire mince (8.6.1)



TORSION : section fermée à paroi d'épaisseur modérée

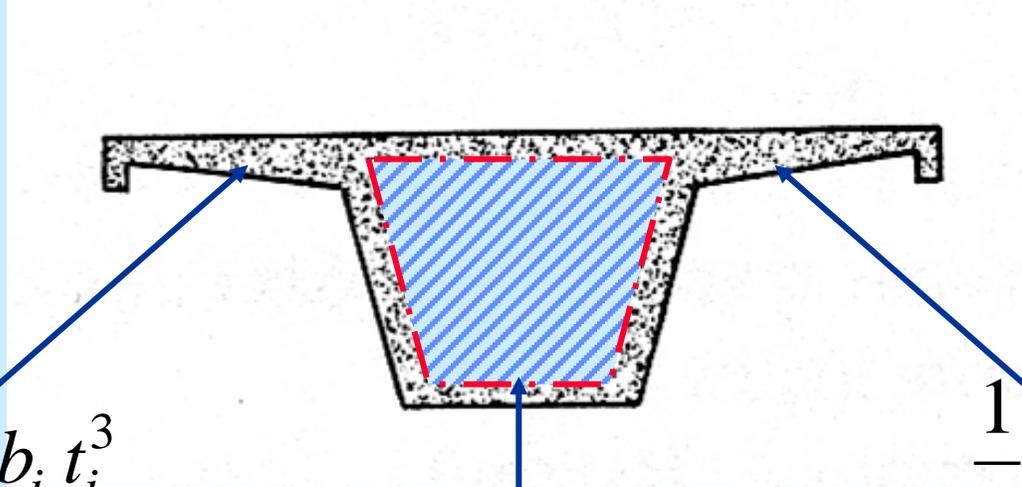


$$J = \frac{4\Omega^2}{\int \frac{ds}{t}}$$

$$J = \frac{1}{3}bt^3$$

TORSION : section fermée à paroi d'épaisseur modérée

Application à une section de pont en caisson creux

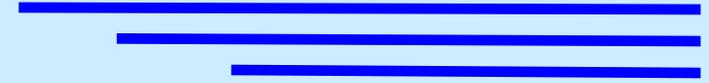


$$\frac{1}{3} \sum_i b_i t_i^3$$

$$\frac{1}{3} \sum_i b_i t_i^3$$

$$J = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{t}}$$

$$J = J_f + J_o$$



TORSION : section fermée à paroi d'épaisseur modérée

1) Calcul **sans tenir compte de l'épaisseur des parois** (t concentrée à la ligne moyenne)

- acceptable si t mince
- sinon approximation !!!
- calcul simplifié

2) Calcul **en tenant compte de l'épaisseur des parois** (section composée)

- ~ exact
- contraintes plus précises, surtout dans paroi d'épaisseur modérée

TORSION : Poutre composée de deux matériaux

$$\gamma_a = \gamma_b$$

$$m = \frac{G_a}{G_b} \quad \text{coefficient d'équivalence}$$

$$T = T_a + T_b$$

Section ouverte

$$GJ = G_a J_a + G_b J_b = G_a \left(J_a + \frac{1}{m} J_b \right) = G_a J_{\sim a}$$

$$J_{\sim a} = J_a + \frac{1}{m} J_b$$

$$\tau_{\max a} = \frac{T}{J_{\sim a}} t_a \quad \tau_{\max b} = \frac{T}{m J_{\sim a}} t_b$$

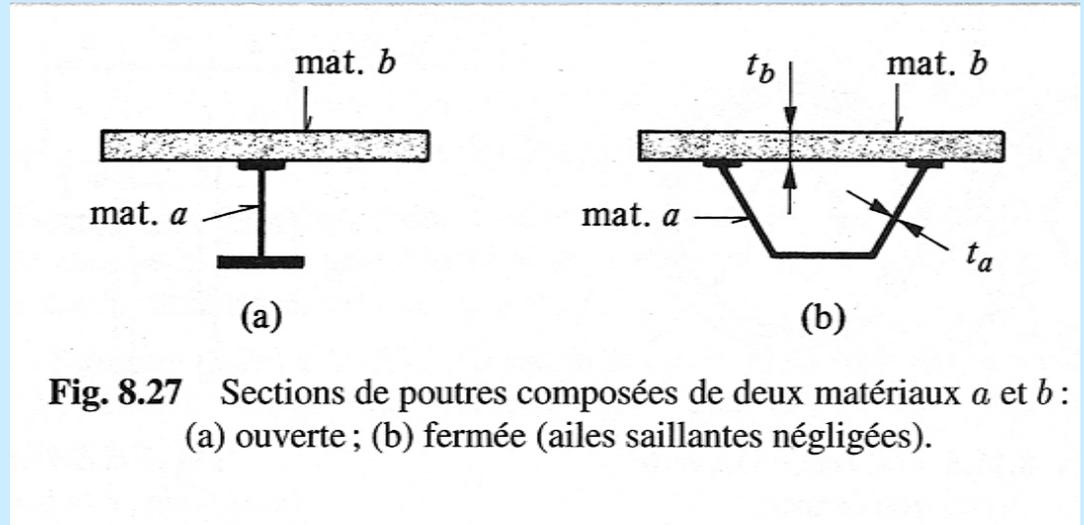


Fig. 8.27 Sections de poutres composées de deux matériaux *a* et *b* : (a) ouverte ; (b) fermée (ailes saillantes négligées).

Section fermée

$$\text{Le flux} = f = \tau_a t_a = \tau_b t_b \quad (\text{formule 8.21})$$

$$J_{\sim a} = \frac{4\Omega^2}{\oint_{s_a} \frac{ds}{t_a} + m \oint_{s_b} \frac{ds}{t_b}} \quad \tau_a = \frac{T}{J_{\sim a}} t_a$$

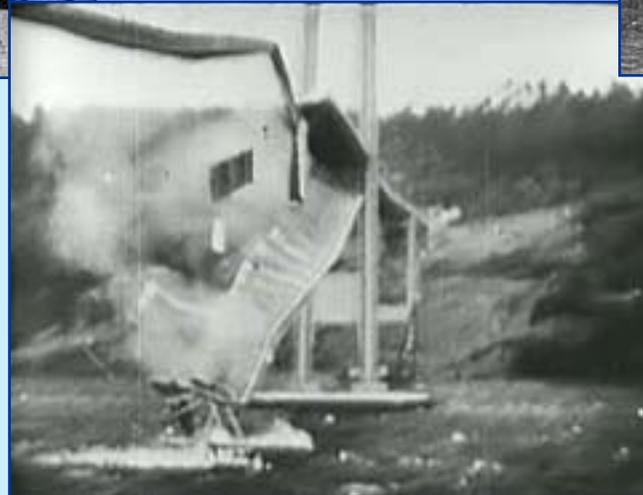
Exemple de rupture d'ouvrage



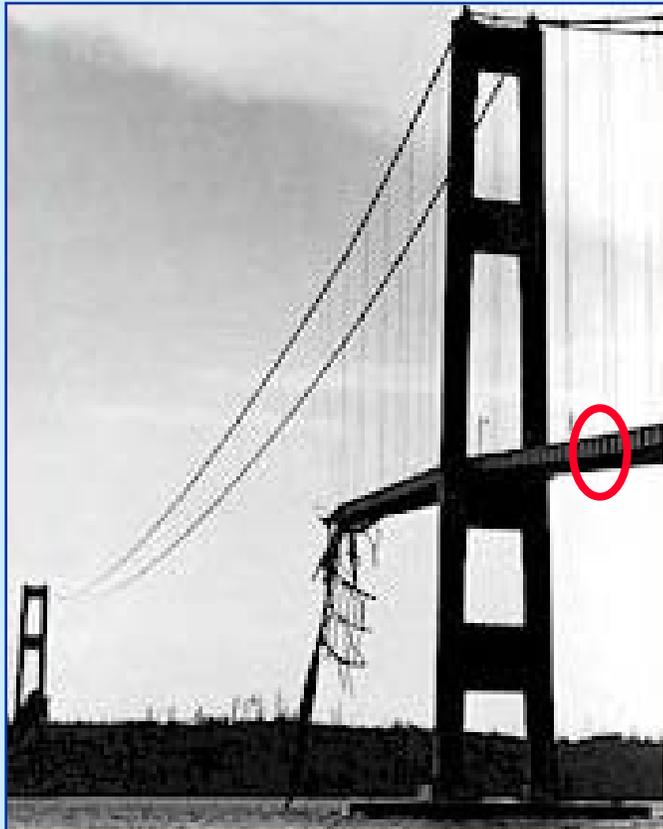
**Pont de Tocama
(USA, 1940)**



Novembre 1940



Exemple de rupture d'ouvrage



**Nouveau pont de Tocama
(USA, 1950)**