

**Sol. ex. 15.9.3**

a) Axe neutre plastique. Puisque l'effort normal est nul et la section homogène, l'axe neutre plastique partage la section en deux surfaces égales.

Aire totale :  $A = 30 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 15 \cdot 2 = 150 \text{ cm}^2$

Position de l'axe neutre plastique : 
$$\begin{cases} 2 \cdot 30 + 2y = \frac{A}{2} \\ \rightarrow y = 7,5 \text{ cm} \end{cases}$$

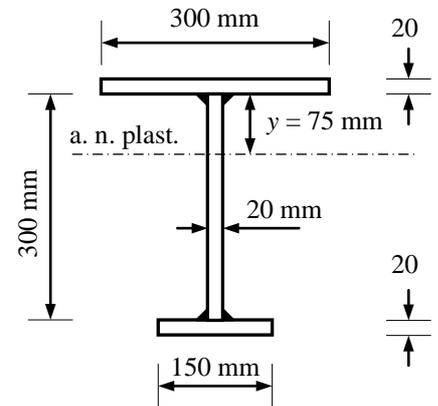
b) Module plastique:  $Z = \int_A |y| dA$

$$Z = 2 \cdot 15 (31 - 7,5) + 2 \frac{(30 - 7,5)^2}{2} + 2 \frac{7,5^2}{2} + 30 \cdot 2 (7,5 + 1)$$

$$Z = 1'777,5 \text{ cm}^3$$

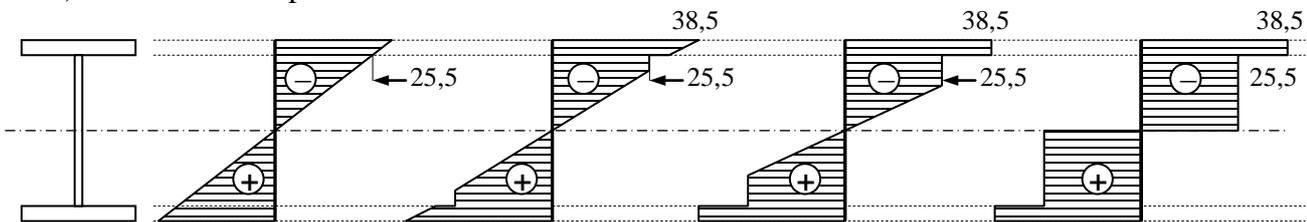
c) Moment plastique :

$$M_{pl} = Z \sigma_e = 1'777,5 \cdot 25 = 44'437,5 \text{ kNcm} = 444,37 \text{ kNm}$$



**Sol. ex. 15.9.4**

a) Evolution de la plastification de la section.



b) Moment plastique. L'axe neutre plastique est sur l'axe de symétrie. Le moment plastique s'obtient en sommant les moments produits par les résultantes des contraintes  $F_1 = F_4$  et  $F_2 = F_3$ .

$$M_{pl} = 2(22F_1 + 10F_2) = 2[22(38,5 \cdot 30 \cdot 4) + 10(25,5 \cdot 20 \cdot 2)] = 223'680 \text{ kNcm}$$

c) Facteur de forme.

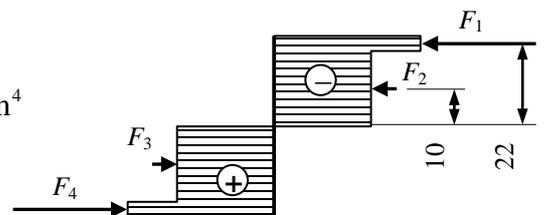
• Moment élastique maximal.

Le premier point de la section à se plastifier se situe à l'extrémité de l'âme pour  $\sigma_e = 25,5 \text{ kN/cm}^2$ .

$$M_e = \frac{\sigma_e I}{z} = \frac{25,5 \cdot 127'147}{20} = 162'112 \text{ kNcm}$$

$$\text{avec } I = \frac{2 \cdot 40^3}{12} + 2 \left( \frac{30 \cdot 4^3}{12} + 30 \cdot 4 \cdot 22^2 \right) = 127'147 \text{ cm}^4$$

• Facteur de forme :  $\alpha = \frac{M_{pl}}{M_e} = \frac{223'680}{162'112} = 1,38$



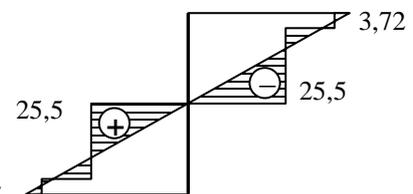
d) Déchargement élastique.

• Aux fibres extrêmes de la section, on a

$$\sigma_{dec} = \frac{M_{pl}}{I} z_{max} = \frac{223'680}{127'147} 24 = 42,22 \text{ kN/cm}^2$$

d'où

$$\sigma_{rsd} = \mp(\sigma_e - \sigma_{dec}) = \mp(38,5 - 42,22) = \pm 3,72 \text{ kN/cm}^2$$



**Sol. ex. 8.11.3**

- Calcul de  $\tau_{\max}$  :  $\tau_{\max} = \frac{T}{J} t_{\max}$

$$J = \frac{1}{3} \sum b t^3 = \frac{1}{3} (120 \cdot 10^3 + 120 \cdot 8^3 + 90 \cdot 12^3) = 112'320 \text{ mm}^4$$

$$T = 842 \text{ Nm} = 842'000 \text{ Nmm}$$

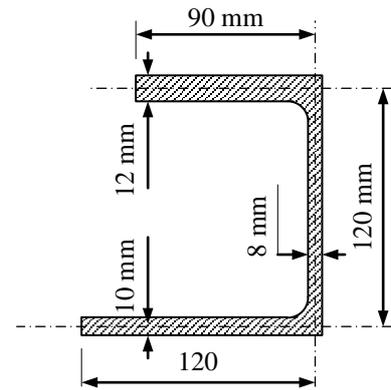
$$\text{d'où } \tau_{\max} = \frac{842'000}{112'320} 12 \cong 90 \text{ N/mm}^2$$

- Calcul de  $\chi$  :  $\chi = \frac{T}{GJ}$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{70'000}{2(1+0,33)} = 26'316 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{d'où } \chi = \frac{842'000}{26'316 \cdot 112'320} = 2,85 \cdot 10^{-4} \text{ rad/mm} = 0,285 \text{ rad/m} = 16,3^\circ/\text{m}$$

- Constatation : l'alliage Al 6061 T6 possède la même résistance que l'acier doux, mais il est trois fois ( $E_{ac}/E_{al}$ ) plus déformable.

**Sol. ex. 8.11.4**

- Moment de torsion maximal  $T_e$ :

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2\Omega t_{\min}} = \tau_e = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} = \frac{255}{\sqrt{3}} = 147 \text{ N/mm}^2$$

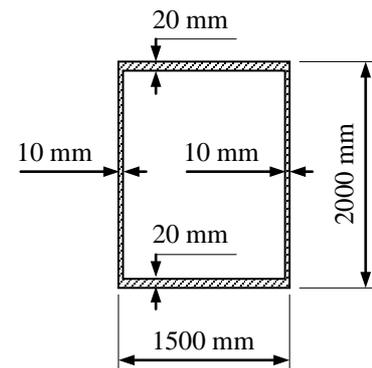
$$T_e = 2\Omega t_{\min} \tau_e = 2(1490 \cdot 1980) \cdot 10 \cdot 147 = 8,69 \cdot 10^9 \text{ Nmm}$$

- Angle de torsion  $\theta_{xe}$ :  $\theta_{xe} = \frac{T_e L}{GJ}$  avec  $L = 22'000 \text{ mm}$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{205'000}{2(1+0,3)} = 78'846 \text{ N/mm}^2$$

$$J = \frac{4\Omega^2}{\int \frac{ds}{t}} = \frac{4(1490 \cdot 1980)^2}{2\left(\frac{1490}{20} + \frac{1980}{10}\right)} = 6,388 \cdot 10^{10} \text{ mm}^4$$

$$\theta_{xe} = \frac{8,69 \cdot 10^9 \cdot 22'000}{78'846 \cdot 6,388 \cdot 10^{10}} = 0,038 \text{ rad} = 2,17^\circ \text{ (pour 22m)}$$

**Sol. ex. 8.11.14**

- Détermination de la courbe intrinsèque de la fonte à partir des essais à la rupture en traction et en compression:  $\sigma_t = 20 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\sigma_c = 80 \text{ kN/cm}^2$ , voir tableau 23.1 du TGC 2.

- Détermination de  $\tau_u$  : voir la solution de l'exercice 7.11.8;

$$\tau_u = \frac{\sigma_t \sigma_c}{\sigma_t + \sigma_c} = \frac{20 \cdot 80}{20 + 80} = 16 \text{ kN/cm}^2$$

- Détermination de  $T_u$  : avec  $\tau_{\max} = \tau_u$  et  $\alpha$  tiré du tableau 8.11 pour  $b/c = 1$ ,

$$T_u = \alpha c^2 b \tau_{\max} = \alpha c^2 b \tau_u = 0,208 \cdot 20^3 \cdot 16 = 26'624 \text{ kNcm}$$

- Orientation des facettes de rupture: (2 points de tangence d'où 2 facettes de ruptures)

- méthode analytique: on calcule l'état de contrainte dans les facettes de rupture (cf. fig. p. suivante);

$$\sigma_{x'} = \tau_u \sin \beta = 16 \cdot 0,6 = 9,6 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{x'y'} = \pm \tau_u \cos \beta = \pm 16 \cdot 0,8 = \pm 12,8 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{avec } \sin \beta = \frac{\sigma_c - \sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t} = 0,6$$

les contraintes principales sont orientées à  $+45^\circ$  pour la traction et à  $-45^\circ$  pour la compression (par rapport à l'axe  $x$ ). L'orientation  $\Delta\alpha$  des facettes de rupture par rapport à la direction de la contrainte de traction principale vaut (cf. TGC vol. 3, (2.27)) :

$$\tan \Delta\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_{x'}}{\tau_{x'y'}} = \frac{16 - 9,6}{\pm 12,8} = \pm 0,5 \rightarrow \Delta\alpha = \pm 26,56^\circ$$

$$\text{orientation } \alpha \text{ par rapport à } x : \quad \alpha = 45^\circ \pm 26,56^\circ \rightarrow \begin{aligned} \alpha_1 &= 18,44^\circ \\ \alpha_2 &= 71,56^\circ \end{aligned}$$

- méthode graphique: voir graphique de la page suivante.

### Sol. ex. 8.11.15

Voir également la figure Sol. 8.11.15 du TGC 2.

$$\text{Contraintes normales : } \sigma_y = \frac{N}{A} = -\frac{125}{19,635} = -6,366 \text{ kN/cm}^2 \text{ et } \sigma_x = 0$$

$$\text{Contrainte tangentielle maximale : } \tau_{\max} = \frac{T}{I_p} r = \frac{140}{61,359} 2,5 = 5,704 \text{ kN/cm}^2 \text{ et } \tau_{yx} = -\tau_{\max}$$

a) On détermine la courbe intrinsèque du verre:

dans notre cas, la courbe intrinsèque est constituée de 2 droites symétriques par rapport à l'axe des  $\sigma$  et tangentes aux cercles de Mohr représentant la ruine à la traction,  $\sigma_t = 6 \text{ kN/cm}^2$ , et à la compression,  $\sigma_c = 45 \text{ kN/cm}^2$ , (voir tableau 23.2 des annexes du TGC 2).

b) On trace le cercle de Mohr correspondant à l'état de contrainte donné (cercle de service 3).

c) Le coefficient de sécurité à la rupture de la barre est déterminé par le coefficient de multiplication des contraintes pour obtenir un cercle tangent aux droites intrinsèques (cercle à la rupture 4); comme  $\sigma$  et  $\tau$  augmentent proportionnellement, les cercles 3 et 4 sont homothétiques par rapport à l'origine des axes. Le centre C' du cercle de rupture s'obtient graphiquement en menant du point D'une parallèle à CD. D'où le coefficient de sécurité:

$$\gamma = \frac{OD'}{OD} = \frac{C'D'}{CD} = \dots$$

$$\text{On lit sur la figure : } \gamma \cong \frac{5,92}{4,58} \cong 1,29$$

Par le critère de la plus grande contrainte de traction  $\sigma_1$ :

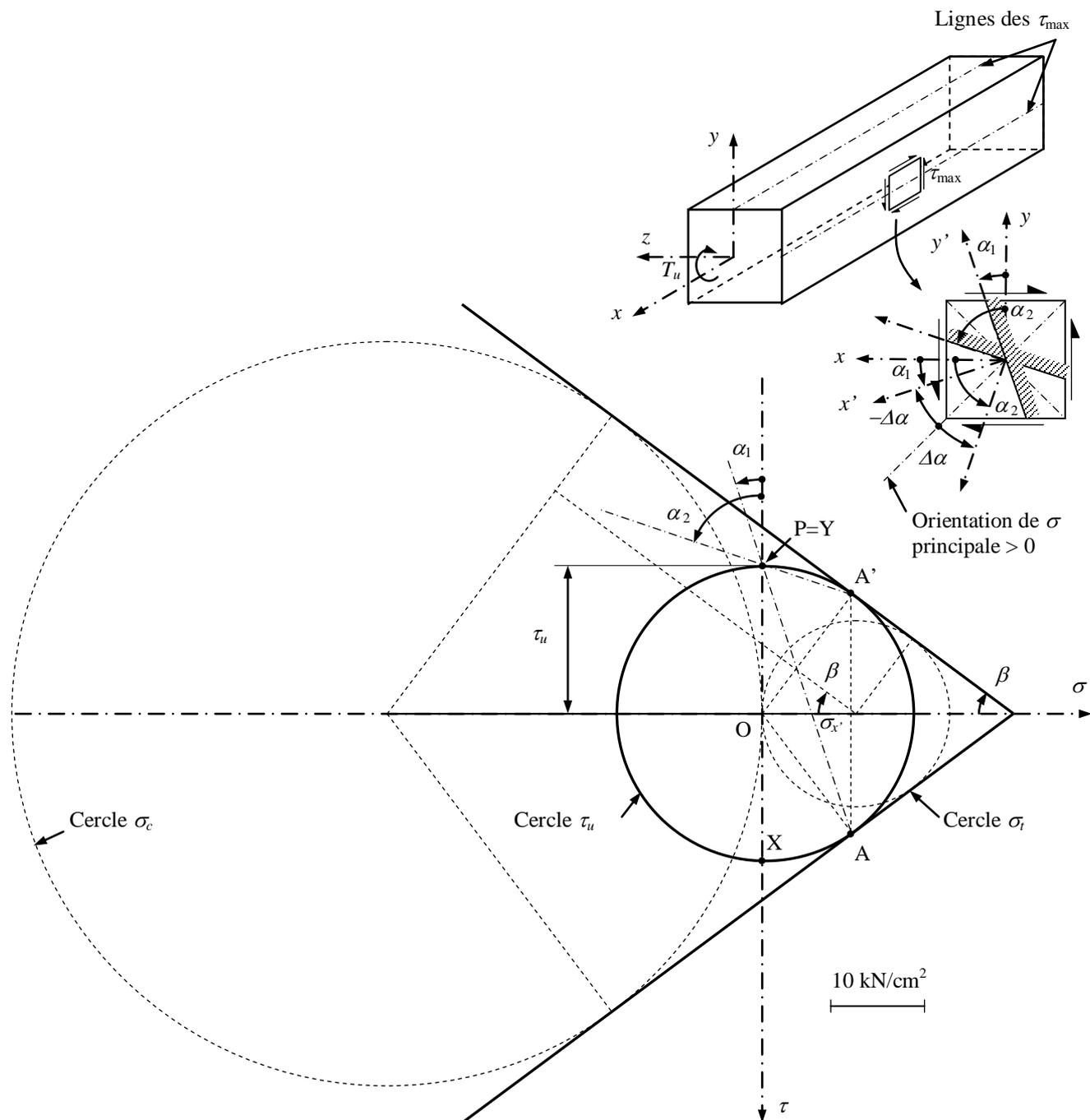
$$\gamma = \frac{\sigma_t}{\sigma_1} \cong \frac{6}{3,35} \cong 1,8$$

Ce critère simplifié est **dangereux**, car il donne l'**illusion** d'une grande sécurité.

d) Facettes de rupture: approximativement  $\alpha' \cong 10^\circ$  et  $\alpha' \cong 51^\circ$ .

Sol. ex. 8.11.14 (suite)

- méthode graphique:



Notes :

- Sur le petit élément, on lit le signe des contraintes tangentielles selon la convention de signe du cercle de Mohr (cf. TGC vol. 3, fig. 2.12, page 32).
- Si le matériau est parfaitement homogène, la fissuration sur la face latérale de la poutre prismatique s'opère simultanément selon les deux directions définies par les angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .