

Probabilités et Statistique pour SIC:

Corrigé des problèmes à rendre pour le 2 mai 2011

Corrigé 67 On note X la variable aléatoire égale à la quantité de précipitation sur un été.

1) Il s'agit de calculer $P(X \leq 4) = P\left(\frac{X-10}{4} \leq -3/2\right) = 1 - 0.9332 = 0.0668$.

2) Par indépendance des quantités de précipitations d'un été à l'autre, la probabilité de 10 années sans sécheresse vaut $0.9332^{10} = 0.5009$.

3) On note D le nombre d'années entre deux sécheresses consécutives. D suit un loi géométrique de paramètre $p = 0.0668$: $P(D = k) = 0.9332^{k-1} \times 0.0668$.

4) L'espérance de D est $1/p = 14.97$, donc il se passe en moyenne environ 15 années entre deux sécheresses.

Corrigé 77 Nous supposons dans cet exercice que les timbres restent toujours carré. Cela revient à supposer que l'erreur commise sur les deux côtés du timbre est égale.

1) Puisque toutes les valeurs sont équiprobables, on modélise les longueurs mesurées par une loi uniforme entre 1.3 et 1.7 cm, de fonction de répartition

$$F_L(l) = \begin{cases} 0 & \text{si } l < 1.3 \\ (l - 1.3)/0.4 & \text{si } 1.3 \leq l \leq 1.7 \\ 1 & \text{si } l > 1.7 \end{cases}$$

2) On cherche la loi de $S = L^2$. $P(S \leq s) = P(L \leq \sqrt{s}) = F_L(\sqrt{s})$, soit

$$F_S(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < 1.69 \\ (\sqrt{s} - 1.3)/0.4 & \text{si } 1.69 \leq s \leq 2.89 \\ 1 & \text{si } s > 2.89 \end{cases}$$

Corrigé 78 1) La densité conditionnelle de X sachant Y est $f_{X|Y} = f_{X,Y}/f_Y$ donc la densité du couple (X, Y) est donnée par

$$f_{X,Y}(x, y) = f_Y(y)f_{X|Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}e^{-y(1+x^2)}, & y > 0, x \in \mathbb{R} \\ 0, & y \leq 0, x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

2) On a $f_X(x) = \int_0^\infty f_{X,Y}(x, y)dy = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ (loi de Cauchy de paramètres 0 et 1).

3) $f_{Y|X}(x, y) = f_{X,Y}(x, y)/f_X(x)$, donc

$$f_{Y|X}(x, y) = \begin{cases} (1+x^2)e^{-y(1+x^2)}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

Donc Y sachant X suit la loi exponentielle de paramètre $1 + X^2$.