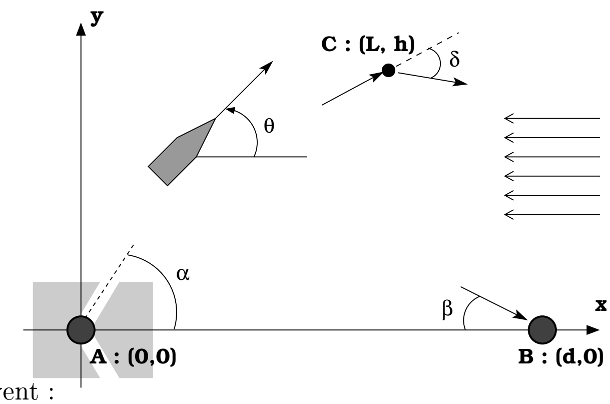
Mécanique Analytique

Examen du 22 janvier 2009 ; durée : 14h15-18h00 ; sans document ni calculatrice

Le symbole ► indique que ce point peut être résolu indépendamment des précédents.

Exercice 1 : Voilier contre le vent *(12 points)*



Un voilier doit se déplacer sur un plan d'eau (x, y) d'un point $A = (0, 0)$ à un point $B = (d, 0)$ aussi vite que possible. La disposition des installations portuaires en A force le bateau à sortir avec un angle α vers le haut ou le bas.

Le vent souffle selon $-\hat{e}_x$, et avec un force dépendant de y :

$$\text{Force du vent } = w(y) = We^{y/\xi}$$

La vitesse à laquelle se déplace le bateau dépend évidemment de la force du vent, mais également de l'angle d'attaque θ entre la vitesse du bateau et la direction du vent :

$$\text{Vitesse du bateau} = v(\theta, y) = \frac{w(y)}{\cos(\theta)h\big(\tan(\theta)\big)} \quad \text{où} \quad h\big(\tan(\theta)\big) = \left|\tan(\theta) + \frac{1}{\tan(\theta)}\right|$$

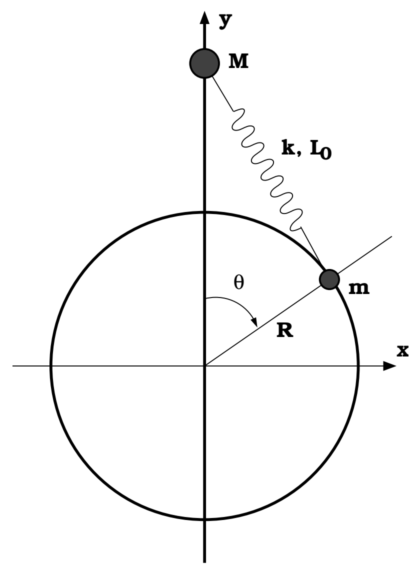
Vu que $v(\theta = 0, y) = 0$, le mouvement ne peut pas changer le signe de θ et la valeur absolue ci-dessus vaut $+$ si le mouvement va vers le haut et $-$ si le mouvement va vers le bas. De plus, cela implique que le bateau devra virer de bord en un point $C = (L, h)$ pour pouvoir accomplir son trajet.

Afin de définir la trajectoire idéale, procéder par étapes :

1. Introduction : Au vu du vent, est-ce qu'il vaut mieux sortir avec $\theta = +\alpha$ ou $\theta = -\alpha$
2. Fonctionnelle : Trouver la fonctionnelle qui décrit le temps pour se rendre d'un point avec $x = x_1$ à un point avec $x = x_2$ et avec $y_2 > y_1$:
   – Paramétriser le trajet avec $y = y(x)$. Trouver la relation entre y' et θ.
   – Exprimer la fonctionnelle $T[y]$ qui décrit le temps qu'il faut pour parcourir cette trajectoire :
   $$T[y] = \int \mathrm{d}t = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \mathcal{F}(y', y)$$
3. Trajectoire optimale : Montrer que la trajectoire idéale peut s'écrire :
   $$y_{\text{optimal}}(x) = \xi \ln (a + bx)$$
   où a et b sont des constantes d'intégration qui seront fixées plus tard.
   Pour cette trajectoire, calculer le temps $T[y_{\text{optimal}}]$.
4. ►$A \to C$: En utilisant le résultat ci-dessus :
   – Définir x_1, x_2 et imposer les conditions initiales pour trouver $y_{A\to C}(x)$.
   – En utilisant le résultat précédent, trouver $T_{A\to C} \equiv T[y_{A\to C}]$.
   – Donner la hauteur $h(L)$ à laquelle aura lieu le virement de bord.
5. $C \to B$:
   – Définir x_1, x_2 et imposer les conditions aux bords pour trouver $y_{C\to B}(x)$.
   – En utilisant le résultat précédent, trouver $T_{C\to B} \equiv T[y_{C\to B}]$.
6. Angle d'arrivée : Donner l'angle $\beta(L)$ avec lequel le bateau arrive en B.
7. Virement de bord : Calculer l'angle $\delta(L)$ de combien le bateau doit virer.
8. Représentation : Dessiner schématiquement la trajectoire que suit le bateau.
9. Minimiser le temps : Donner le temps total $T_{A\to C\to B}(L)$, et trouver l'équation qui définit la distance optimale au bout de laquelle virer.

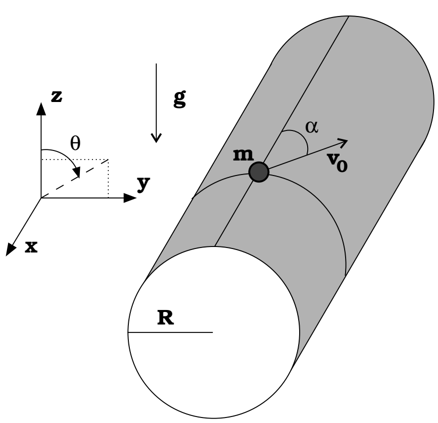
Exercice 2 : Φ *(12 points)*

Deux billes dans un plan (x, y) sont reliées par un ressort de longueur au repos L_0 et de constante k. La première bille, de masse M se déplace uniquement selon l'axe y. La seconde bille, de masse m, est contrainte à se mouvoir sur un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon R.



1. Combien de degrés de liberté ce système possède-t-il ? Choisir (et définir !) des coordonnées généralisées et donner le Lagrangien du système.
2. Pour les différents cas, $R < L_0$, $R = L_0$, $R > L_0$, trouver tous les points d'équilibre et les décrire précisément. Etudier a priori (calculs pas nécessaires) leur stabilité.
3. Soit un point d'équilibre où la première bille se trouve en $(0, \bar{y})$ et la deuxième en $(R\sin\bar{\theta}, R\cos\bar{\theta})$ tel que le ressort soit au repos.
   – Trouver les fréquences des petites oscillations autour de cette position d'équilibre.
   – Quelle est sa stabilité ? Donner une interprétation.
   – Pour $\bar{\theta} = 0$, donner les différentes positions d'équilibre possibles. Pour chacune d'elle, trouver les coordonnées normales et donner le Lagrangien en coordonnées normales.
4. ► Considérer le cas $L_0 = 3R$. La bille de masse M est maintenue immobile en $(0, 3R)$.
   – Ecrire le Lagrangien pour ce système et trouver le Hamiltonien correspondant.
   – Dessiner le potentiel, ainsi que l'espace de phase. Donner les positions d'équilibre. Le système peut se trouver dans différents régimes, les décrire (donner les niveaux d'énergie pour chacun) et dessiner au moins une orbite type pour chaque cas ainsi que les cas limites.

Exercice 3 : Bille qui roule *(6 points)*

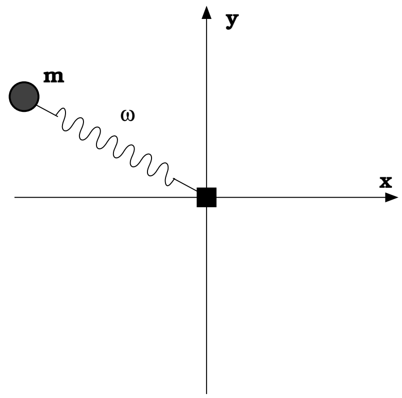


Considerer une bille de masse m se mouvant sur un cylindre de rayon R dirigé le long de l'axe x sous l'action de la pesanteur. On la lance en haut du cylindre (au point $(0, 0, R)$) avec une vitesse v_0 formant un angle α avec l'axe x.

Trouver, en utilisant la notion de force généralisée, à quel angle $\theta = \theta^*$ la bille décolle du cylindre.

Exercice 4 : Encore des oscillateurs harmoniques *(12 points)*

Considérer un oscillateur harmonique en deux dimensions (longueur au repos nulle, fréquence ω) de masse m.



1. Ecrire le Lagrangien du système.
2. Trouver les symétries du Lagrangien ainsi que toutes les quantités conservées (préciser pour quelle raison elles sont conservées).
3. Donner le Hamiltonien correspondant.
4. Transformation donnée : Cette partie doit être faite en coordonnées cartésiennes (x, y).
   - Montrer que la transformation suivante est canonique :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & X\cos(\alpha) + \dfrac{P_y}{m\omega}\sin(\alpha) \\ p_x & = & -m\omega Y\sin(\alpha) + P_x\cos(\alpha) \end{array} \right. \qquad \begin{array}{rcl} y & = & Y\cos(\alpha) + \dfrac{P_x}{m\omega}\sin(\alpha) \\ p_x & = & -m\omega Y\sin(\alpha) + P_y\cos(\alpha) \end{array}$$

   où p_x et p_y sont respectivement les impulsions conjuguées de x et y.
   - Ecrire le nouvel Hamiltonien.
5. ►Hamilton-Jacobi :
   - Résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi.
   - Donner les nouvelles coordonnées et impulsions (P_1, P_2, Q_1, Q_2) en fonction des anciennes.
   - Donner le nouvel Hamiltonien.
   - Pour les conditions initiales :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix}$$

   donner les trajectoires dans les nouvelles et anciennes coordonnées.

Formulaire

– Dérivées des fonctions trigonométriques inverses :

$$\begin{aligned} \arccos(x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & \qquad \operatorname{arccosh}(x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\ \arcsin(x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \operatorname{arcsinh}(x)' &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \arctan(x)' &= \frac{1}{1+x^2} & \operatorname{arctanh}(x)' &= \frac{1}{1-x^2} \\ \operatorname{arccot}(x)' &= \frac{-1}{1+x^2} & \operatorname{arccoth}(x)' &= \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

– Quelques intégrales :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(x) \\ \int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(x) \\ \int \sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\ \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\mathrm{d}x &= \sqrt{1-x^2} - \ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x}\right| \end{aligned}$$

– Liste de fonctions génératrices élémentaires :

$$1: \quad F = F_1(q_i, Q_i, t) \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ P_i &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \end{aligned} \right.$$

$$2: \quad F = -\sum Q_i P_i + F_2(q_i, P_i, t) \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \\ Q_i &= \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \end{aligned} \right.$$

$$3: \quad F = \sum q_i p_i + F_3(p_i, Q_i, t) \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} q_i &= -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \\ P_i &= -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \end{aligned} \right.$$

$$4: \quad F = \sum q_i p_i - \sum Q_i P_i + F_4(p_i, P_i, t) \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} q_i &= -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \\ Q_i &= \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \end{aligned} \right.$$

Dans tous les cas :

$$K(P_i, Q_i, t) = H(p_i(P_j, Q_j, t), q_i(P_j, Q_j, t), t) + \frac{\partial F_\alpha(P_i, Q_i, t)}{\partial t}$$

Mécanique Analytique

Examen du 22 janvier 2009 ; durée : 14h15-18h00 ; sans document ni calculatrice

Solution exercice 1 :

1. Introduction : La vitesse du bateau est d'autant plus grande que le vent est fort, il est donc préférable de partir dans la partie supérieure du plan d'eau.
2. Fonctionnelle :
   - On paramétrise le chemin par $y(x)$. L'analogie avec la mécanique est donc $x \leftrightarrow t$, $y \leftrightarrow q$ et $y' \leftrightarrow \dot{q}$. L'angle θ est aisément exprimé en fonction de y' :
   $$y'(x) = \tan(\theta) \tag{1}$$
   - Pour trouver la fonctionnelle, on part de la forme naïve $T = \int \mathrm{d}t$. Ensuite, on relie $\mathrm{d}t$ à $\mathrm{d}s$ par la vitesse :
   $$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{v} \tag{2}$$
   où $\mathrm{d}s$ est l'élément de chemin parcouru. Finalement, on veut tout exprimer par rapport à x, et donc :
   $$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x \tag{3}$$
   En insérant l'expression pour la vitesse on obtient :
   $$T[y] = \int \mathrm{d}x W^{-1} e^{-y/\xi} \cos(\theta) \sqrt{1 + y'^2} h(y') \tag{4}$$
   A l'aide de relations trigonométriques on trouve au final :
   $$\boxed{T[y] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \; W^{-1} e^{-y/\xi} \left(y' + \frac{1}{y'} \right)} \tag{5}$$
3. Trajectoire optimale : Pour trouver la trajectoire qui minimise la fonctionnelle ci-dessus, on peut exploiter le fait que x n'apparaît pas explicitement dans $\mathcal{F}$; la fonction hamiltonienne est donc conservée :
   $$\pi = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'} = W^{-1} e^{-y/\xi} \left(1 - \frac{1}{y'^2} \right) \tag{6}$$
   $$h = \pi y' - \mathcal{F} = 2W^{-1} \frac{e^{-y/\xi}}{y'} = \text{const.} \tag{7}$$
   Par séparation de variables on trouve l'équation :
   $$C e^{y/\xi} \mathrm{d}y = \mathrm{d}x \tag{8}$$
   avec $C = \dfrac{hW}{2}$. Dont l'intégration donne :
   $$\xi C e^{y/\xi} = x + x_0 \tag{9}$$
   qui conduit à la forme demandée :
   $$\boxed{y(x) = \xi \ln(a + bx)} \quad a = \frac{x_0}{\xi C}, \quad b = \frac{1}{\xi C} \tag{10}$$
   Pour cette solution on a :
   $$y'(x) = \frac{\xi b}{a + bx} \tag{11}$$

et donc :

$$\mathcal{F}(y',y) = \frac{1}{\xi b W}\left[1+\left(\frac{\xi b}{a+bx}\right)^2\right] \tag{12}$$

Il faut l'intégrer, ce qui conduit à :

$$\boxed{T[y] = \frac{x_2-x_1}{W\xi b}\left[1+\frac{(\xi b)^2}{(a+bx_1)(a+bx_2)}\right]} \tag{13}$$

4. ▶ $\underline{A \to C}$:
   - Pour cette partie on a $x_1 = 0$ et $x_2 = L$. Les conditions initiales sont de partir de A avec un angle α :

     $$y(x=0) = 0 \quad , \quad y'(x=0) = \tan(\alpha) \tag{14}$$

     qui donnent :

     $$a = 1 \quad , \quad b = \frac{\tan(\alpha)}{\xi} \tag{15}$$

   - En insérant dans (13) :

     $$\boxed{T_{A\to C} = \frac{L}{W\tan(\alpha)}\left[1+\frac{\tan^2(\alpha)}{1+\tan(\alpha)\frac{L}{\xi}}\right]} \tag{16}$$

   - La hauteur à laquelle arrive le bateau est simplement donnée par $h = y(L)$:

     $$\boxed{h = \xi \ln\left(1+\tan(\alpha)\frac{L}{\xi}\right)} \tag{17}$$

5. $\underline{C \to B}$:
   - Ici on a $x_1 = L$ et $x_2 = d$. Quant aux conditions aux bords on veut que le bateau parte de A pour arriver à C :

     $$y(L) = h \quad , \quad y(d) = 0 \tag{18}$$

     ce qui conduit à :

     $$a = 1+\tan(\alpha)\frac{d}{\xi}\frac{L}{d-L} \quad , \quad b = -\frac{\tan(\alpha)}{\xi}\frac{L}{d-L} \tag{19}$$

   - Avec (13) :

     $$\boxed{T_{C\to B} = \frac{L}{W\tan(\alpha)}\left[\frac{(d-L)^2}{L^2}+\frac{\tan^2(\alpha)}{1+\tan(\alpha)\frac{L}{\xi}}\right]} \tag{20}$$

6. <u>Angle d'arrivée</u> : Avec (1), (11) et (19) on obtient :

   $$\boxed{\tan(\beta) = \frac{L}{d-L}\tan(\alpha)} \tag{21}$$

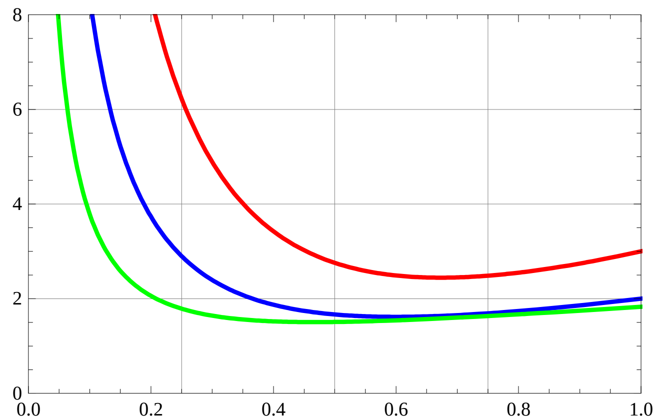
7. <u>Virement de bord</u> : Avec (1), (11), (15) et (19) on obtient :

   $$\boxed{\delta = \arctan\left(\frac{\tan(\alpha)}{1+\tan(\alpha)\frac{L}{\xi}}\right) + \arctan\left(\frac{\tan(\alpha)}{1+\tan(\alpha)\frac{L}{\xi}}\cdot\frac{L}{d-L}\right)} \tag{22}$$

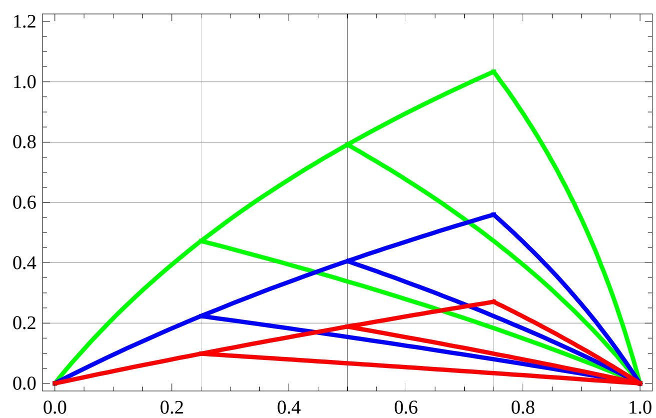
8. Représentation : Les fonctions à dessiner sont :

$$\begin{aligned} y_{AC}(x) &= \xi \ln\left(1+\tan(\alpha)\frac{x}{\xi}\right) \\ y_{CB}(x) &= \xi \ln\left(1+\tan(\alpha)\frac{L}{d-L}\frac{x}{\xi}\right) \end{aligned} \tag{23}$$

On pose $W = d = \xi = 1$. Voici le temps de parcours en fonction de L pour $\alpha = \pi/8, \pi/4, 3\pi/8$ (rouge, bleu, vert) :



et voici les trajectoires correspondantes pour $L = 0.25, 0.5, 0.75$:



9. Minimiser le temps : Le temps total est simplement la somme des deux temps précédents et il est donné par :

$$\boxed{T_{A\to C\to B}(L) = \frac{L}{W\tan(\alpha)}\left[\frac{L^2+(d-L)^2}{L^2} + 2\frac{\tan^2(\alpha)}{1+\tan(\alpha)\dfrac{L}{\xi}}\right]} \tag{24}$$

La distance optimale au bout de laquelle virer est donnée par les minima de $T_{A\to C\to B}(L)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}L}T_{A\to C\to B}(L) = \frac{1}{W\tan(\alpha)}\left[\frac{2L^2-d^2}{L^2} + 2\frac{\tan^2(\alpha)}{\left(1+\tan(\alpha)\frac{L}{\xi}\right)^2}\right] = 0 \tag{25}$$

Solution exercice 2 :

1. Le système possède deux degrés de liberté, un pour chaque masse. On va les paramétriser avec la coordonnée y pour M et l'angle θ pour m. Le Lagrangien est alors donné par :

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k[L(y,\theta) - L_0]^2} \tag{1}$$

avec :

$$L(y,\theta) = \sqrt{R^2 + y^2 - 2Ry\cos(\theta)} \tag{2}$$

2. Commençons par calculer la force (sous-entendu la dérivée du potentiel) :

$$F \equiv \begin{pmatrix}\partial_y \\ \partial_\theta\end{pmatrix} V(y,\theta) = k(L - L_0)\begin{pmatrix}\partial_y \\ \partial_\theta\end{pmatrix} L = k\frac{L - L_0}{L}\begin{pmatrix}y - R\cos(\theta) \\ Ry\sin(\theta)\end{pmatrix} \tag{3}$$

A ce moment on trouve deux types de points d'équilibre. Soit le préfacteur s'annule, $L(y,\theta) = L_0$, ce qui implique :

$$y^2 - 2Ry\cos(\theta) - (L_0^2 - R^2) = 0 \tag{4}$$

Le discriminant de cette équation en y est :

$$\Delta = 4\left\{L_0^2 - \left[1 - \cos^2(\theta)\right]R^2\right\} = 4\left\{L_0^2 - \sin^2(\theta)R^2\right\} \tag{5}$$

Il faut à présent distinguer les cas :
– $L_0 > R$: toujours deux solutions données par :

$$y_\pm(\theta) = R\cos(\theta) \pm \sqrt{L_0^2 - \sin^2(\theta)R^2} \tag{6}$$

– $L_0 = R$: les deux solutions de (6) sont valables, mais sont égales pour $\theta = \pm\pi/2$. $y = 0$, $\forall\theta$ est également est une solution.
– $L_0 < R$: les deux solutions de (6) sont valables tant que $\sin^2(\theta) < \frac{L_0^2}{R^2}$. A l'angle limite (ce qui fait quatre positions différentes), les deux solutions sont égales, et au-delà elles n'existent plus. Le cas limite correspond au ressort positionné à l'horizontale, selon $\hat{e}_x$.

Tous ces points d'équilibre sont semi-stables[1] ; à savoir qu'ils ont une fréquence propre nulle correspondant à un déplacement combiné de y et θ qui laisse la longueur du ressort inchangée et une fréquence réelle ($\omega^2 > 0$) qui est associée à un déplacement qui modifie la longeur du ressort.
Si le préfacteur est non-nul, la "force" peut toujours être nulle dû à la partie vectorielle, ce qui implique :

$$\begin{pmatrix}y - R\cos(\theta) \\ Ry\sin(\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix} \tag{7}$$

En partant de la deuxième composante on voit qu'il y a deux possibilités :
– $y = 0$, pour annuler la première il faut donc $\cos(\theta) = 0$, et donc $\theta = \pm\pi/2$. Cette position est instable sauf pour $L_0 = R$.
– $\sin(\theta) = 0$, $\theta = 0, \pi$. Il faut alors que $y = \pm R$, en d'autres mots, il faut que les deux masses soient superposées. Cette position est toujours instable.

3. On se trouve donc dans un cas décrit par (6).
– Il faut commencer par trouver les deuxièmes dérivées du potentiel. Mais on n'en a pas besoin en toute généralité, uniquement évalué dans les cas $L = L_0$. Dans (3) il faut donc à nouveau dériver

[1] Dire qu'ils sont stables à ce stade est évidemment considéré comme une réponse juste.

$L - L_0$: [2]

$$\begin{aligned}
K = V^{(2)}(\bar{y},\bar{\theta}) &= \begin{pmatrix} \partial_y\partial_y & \partial_y\partial_\theta \\ \partial_y\partial_\theta & \partial_\theta\partial_\theta \end{pmatrix} V(y,\theta)\Big|_{L=L_0} = k\begin{pmatrix}\partial_y \\ \partial_\theta\end{pmatrix} L(y,\theta)\Big|_{L=L_0} \cdot \Big(\partial_y, \partial_\theta\Big) L(y,\theta)\Big|_{L=L_0} \\
&= \frac{k}{L_0^2}\begin{pmatrix} \bar{y} - R\cos(\bar{\theta}) \\ R\bar{y}\sin(\bar{\theta})\end{pmatrix} \cdot \Big(\bar{y} - R\cos(\bar{\theta}), R\bar{y}\sin(\bar{\theta})\Big) \\
&= \frac{k}{L_0^2}\begin{pmatrix} [\bar{y} - R\cos(\bar{\theta})]^2 & \bar{y}R\sin(\bar{\theta})[\bar{y} - R\cos(\bar{\theta})] \\ \bar{y}R\sin(\bar{\theta})[\bar{y} - R\cos(\bar{\theta})] & [\bar{y}R\sin(\bar{\theta})]^2 \end{pmatrix} \equiv \frac{k}{L_0^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2\end{pmatrix} \qquad (8)
\end{aligned}$$

La matrice de masses est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & R^2 m\end{pmatrix} \tag{9}$$

Et donc la matrice des fréquences :

$$\Omega = M^{-1}K = \frac{k}{L_0^2}\begin{pmatrix} \dfrac{a^2}{M} & \dfrac{ab}{M} \\ \\ \dfrac{ab}{R^2m} & \dfrac{b^2}{R^2m}\end{pmatrix} \tag{10}$$

Pour se simplifier on peut noter que $\det(\Omega) = 0$, et donc une des valeurs propres est nulle :

$$\omega_1 = 0 \tag{11}$$

La deuxième peut alors facilement se trouver par la trace : [3]

$$\omega_2^2 = \mathrm{Tr}(\Omega) = \frac{k}{L_0^2}\left(\frac{a^2}{M} + \frac{b^2}{mR^2}\right) \tag{12}$$

qui peut s'écrire :

$$\omega_2^2 = \frac{k}{M}\left[1 - \sin^2(\bar{\theta})\frac{R^2}{L_0^2}\left(1 - \frac{\bar{y}^2}{R^2}\frac{M}{m}\right)\right] \tag{13}$$

en utilisant $\bar{y}^2 - 2R\bar{y}\cos(\bar{\theta}) = L_0^2 - R^2$.

- On a une valeur propre nulle qui est associée à un mouvement qui laisse la longueur du ressort instable ; l'autre direction est stable.
- Les positions d'équilibre sont $\bar{y} = R \pm L_0$. La matrice Ω est donnée par :

$$\Omega = \frac{k}{M}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{14}$$

Elle est déjà diagonale, avec les vecteurs propres :

$$v_1 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \tag{15}$$

Pour trouver les coordonnées normales il faut encore changer la norme pour que $v_i^T M v_i = 1$. Ce qui donne :

$$v_1 = \frac{1}{R\sqrt{m}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{M}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \tag{16}$$

[2] La méthode "compacte" présentée ici peut sembler étonnante. Si on calcule les composantes une à une on peut toujours utiliser la même propriété, par exemple $\partial_y\partial_y V|_{L=L_0}$:

$$\partial_y\partial_y V|_{L=L_0} = \partial_y k\frac{L - L_0}{L}\left[y - R\cos(\theta)\right]\Big|_{L=L_0} = k\frac{\bar{y} - R\cos(\bar{\theta})}{L_0}\ \partial_y(L - L_0)|_{L=L_0} = k\frac{[\bar{y} - R\cos(\bar{\theta})]^2}{L_0^2}$$

[3] A nouveau, pas besoin de passer par ce "truc" pour avoir un calcul facile. Si on fait le calcul explicitement on obtient :

$$\det(\Omega - \lambda\mathbb{1}) = \left(\frac{k}{L_0^2}\frac{a^2}{M} - \lambda\right)\left(\frac{k}{L_0^2}\frac{b^2}{R^2m} - \lambda\right) - \frac{k}{L_0^2}\frac{a^2}{M}\cdot\frac{k}{L_0^2}\frac{b^2}{R^2m} = \lambda\left[\lambda - \frac{k}{L_0^2}\left(\frac{a^2}{M} + \frac{b^2}{R^2m}\right)\right] = 0$$

Le changement de base est donc donné par :

$$\begin{pmatrix} y \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\sqrt{M}} \\ \dfrac{1}{R\sqrt{m}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

et le nouveau Lagrangien est :

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2\right) - \frac{1}{2}\frac{k}{M}Q_2^2 \tag{18}$$

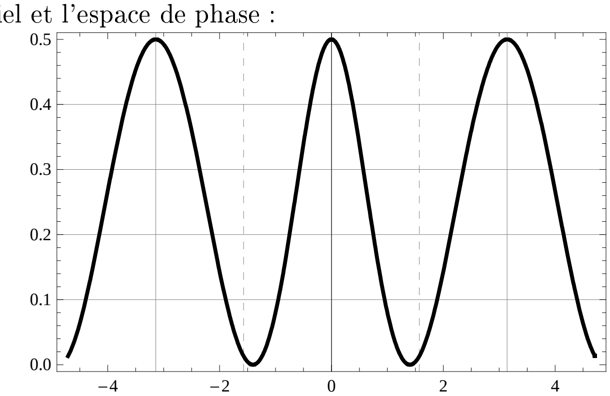
4. – Le Lagrangien est le même qu'avant avec les substitions $y = L_0 = 3R$:

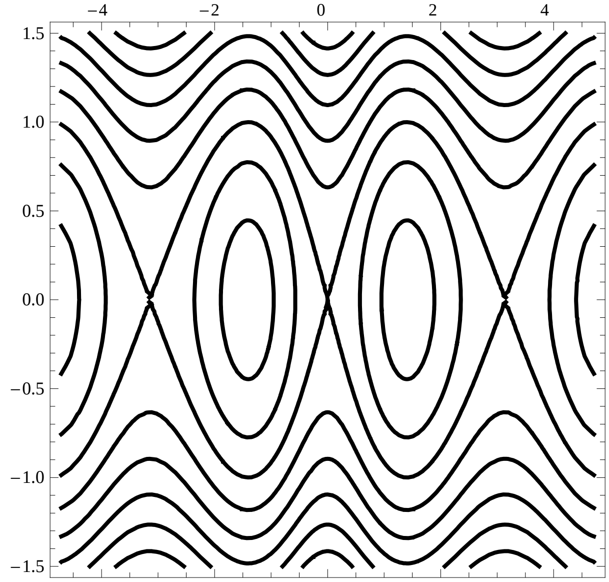
$$L = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kR^2\left[3 - \sqrt{10 - 6\cos(\theta)}\right]^2 \tag{19}$$

et le Hamiltonien est :

$$H = \frac{p^2}{2mR^2} + \frac{1}{2}kR^2\left[3 - \sqrt{10 - 6\cos(\theta)}\right]^2 \tag{20}$$

– On a deux points d'équilibre stables en $\theta = \pm\arccos(1/6)$ ($V = 0$), deux points d'équilibre instables en $\theta = 0, \pi$ ($V = \frac{1}{2}kR^2$).
Les régimes sont donc deux états "liés" pour $0 < E < \frac{1}{2}kR^2$ et un état "libre" pour $E > \frac{1}{2}kR^2$.
Ci-dessous, le potentiel et l'espace de phase :





Solution exercice 3 :

La stratégie est de résoudre le problème contraint, puis de trouver les forces de réaction en injectant les solutions de l'équation du mouvement dans le terme de gauche des équations d'Euler-Lagrange du problème non-contraint.

Le Lagrangien est donné par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2\right) - mgR\cos\theta \tag{1}$$

Les équations du mouvement associées sont donc

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \dfrac{g}{R}\sin\theta \\ \ddot{x} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Avant d'essayer de résoudre les équations du mouvement, voyons ce dont on a besoin pour trouver les forces de réaction. Le Lagrangien non-contraint est

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2\right) - mgr\cos\theta \tag{3}$$

On a alors

$$\begin{cases} R_r = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta \\ R_\theta = m(2r\dot{r} + r^2\ddot{\theta}) - mgr\sin\theta \\ R_x = m\ddot{x} \end{cases} \tag{4}$$

Afin de trouver R_r, R_θ et R_x, on doit les évaluer sur la solution des équations du mouvement du Lagrangien contraint $\mathcal{L}$. Commençons par x : son équation du mouvement contrainte est $\ddot{x} = 0$ et donc on a immédiatement $R_x = 0$. Ceci correspond au fait que x est une coordonnée généralisée. Voyons maintenant r : son équation du mouvement contrainte est simplement $r = R$, et donc toutes les dérivées de r s'annulent dans les R_i. La situation est donc maintenant la suivante :

$$\begin{cases} R_r = -mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta \\ R_\theta = mR^2\ddot{\theta} - mgR\sin\theta = 0 \\ R_x = 0 \end{cases} \tag{5}$$

On voit donc que R_θ s'annule aussi en injectant son équation du mouvement contrainte. Ceci est également le reflet du fait que θ est une coordonnée généralisée. Il nous reste donc plus qu'à calculer R_r. On s'attendait à ce que cette seule composante soit non-nulle puisque seul r n'est pas une coordonnée généralisée, en effet $r + \delta r$ ne satisfait pas à la contrainte. Afin de calculer R_r, il faut connaitre $\dot{\theta}$ du système contraint, ce qui n'implique pas de connaitre la trajectoire $\theta(t)$!

Reprenons donc l'équation du mouvement pour θ du système contraint et multiplions la par $\dot{\theta}$. On peut donc l'intégrer :

$$\ddot{\theta}\dot{\theta} = \frac{g}{R}\sin\theta\dot{\theta} \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{g}{R}\cos\theta + \xi \tag{6}$$

En injectant les conditions initiales ($\theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = v_0\sin\alpha/R$) on obtient :

$$\xi = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2R^2} + \frac{g}{R} \tag{7}$$

Finalement R_r est donc donné par

$$R_r = 3mg\cos\theta - 2mg - \frac{mv_0^2\sin^2\alpha}{R} \tag{8}$$

La particule décolle donc dès que R_r change de signe et donc θ^* est donné par

$$\theta^* = \arccos\left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{3gR}\right) \tag{9}$$

Voyons quelques cas particuliers pour vérifier notre résultat : si $v_0 = 0$ on retrouve le résultat du cours (p. 36), si $v_0^2\sin^2\alpha/R = g$, c'est-à-dire si l'accélération due à la rotation compense exactement celle due à la gravité, alors $\theta^* = \arccos(1) = 0$, comme on s'y attend !

Solution exercice 4 :

1. Le Lagrangien du système, en coordonnées cartésiennes, est donné par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2\right) \tag{1}$$

2. Le Lagrangien ne dépendant pas explicitement du temps, la fonction hamiltonienne est conservée :

$$h = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}\dot{y} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2\right) = \text{const} \tag{2}$$

De plus le Lagrangien ne dépend que de la combinaison x^2+y^2, il est donc invariant sous rotation :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \vec{x}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M\vec{x} \tag{3}$$

Ceci peut être vérifié de la manière suivante :

$$x(s)^2 + y(s)^2 = \vec{x}(s)^T\vec{x}(s) = \vec{x}^T M^T M\vec{x} = \vec{x}^T\vec{x} = x^2+y^2 \tag{4}$$

Ceci traduit le fait que $M \in \mathrm{SO}(2)$. La quantité conservée associée est donnée par le théorème de Noether :

$$\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\frac{\partial x(s)}{\partial s} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}\frac{\partial y(s)}{\partial s}\right]_{s=0} = m(\dot{x}y - \dot{y}x) = L_z \tag{5}$$

Il s'agit bien entendu du moment cinétique !

3. Afin de déterminer le Hamiltonien, trouvons tout d'abord les impulsions : $p_i = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}_i = m\dot{x}_i$. On a donc simplement

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} - \frac{1}{2}\omega^2\left(x^2+y^2\right) \tag{6}$$

4. Afin de démontrer la canonicité de la transformation, nous allons utiliser la symplecticité de la matrice Jacobienne. Celle-ci est donnée par

$$N = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & \frac{\sin\alpha}{m\omega} \\ 0 & \cos\alpha & \frac{\sin\alpha}{m\omega} & 0 \\ 0 & -m\omega\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -m\omega\sin\alpha & 0 & & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{7}$$

Il est alors aisé de montrer que $N^T J N = J$ avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ -\mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Si on veut utiliser les crochets de Poisson il faut vérifier que :

$$\begin{array}{rcl} \{x,y\} & = & 0 \;\; ; \;\; \{x,p_x\} \;=\; 1 \\ \{x,p_y\} & = & 0 \;\; ; \;\; \{y,p_x\} \;=\; 0 \\ \{y,p_y\} & = & 1 \;\; ; \;\; \{p_x,p_y\} \;=\; 0 \end{array} \tag{9}$$

Le nouvel Hamiltonien se calcule tout aussi aisément et est donné par

$$H = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(X^2+Y^2\right) \tag{10}$$

5. L'équation de Hamilton-Jacobi s'écrit

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{11}$$

Comme le Hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, et que les parties en x et y sont bien séparées, on injecte $f(x,y,t) = f_t(t) + f_x(x) + f_y(y)$. On aboutit alors au système suivant :

$$\begin{cases} f_t(t) = -\alpha t \\ \left(\dfrac{\partial f_x}{\partial x}\right)^2 + m^2\omega^2 x^2 = 2m\beta \\ \left(\dfrac{\partial f_y}{\partial y}\right)^2 + m^2\omega^2 y^2 = 2m(\alpha-\beta) \end{cases} \tag{12}$$

On obtient donc

$$f(x,y,t) = \pm \int^x \sqrt{2m\beta - m^2\omega^2\bar{x}^2}d\bar{x} \pm \int^y \sqrt{2m(\alpha-\beta) - m^2\omega^2\bar{y}^2}d\bar{y} - \alpha t \tag{13}$$

et donc la fonction génératrice est donnée par $F_2(x,y,P_1,P_2,t)$:

$$F_2(x,y,P_1,P_2,t) = \pm \int^x \sqrt{2mP_2 - m^2\omega^2\bar{x}^2}d\bar{x} \pm \int^y \sqrt{2m(P_1-P_2) - m^2\omega^2\bar{y}^2}d\bar{y} - P_1 t \tag{14}$$

En appliquant les règles de transformations de F_2 on trouve

$$\begin{cases} p_x = \dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \pm\sqrt{2mP_2 - m^2\omega^2x^2} \\ p_y = \dfrac{\partial F_2}{\partial y} = \pm\sqrt{2m(P_1-P_2) - m^2\omega^2y^2} \\ Q_1 = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_1} = \pm\displaystyle\int^y \frac{m}{\sqrt{2m(P_1-P_2) - m^2\omega^2\bar{y}^2}}d\bar{y} - t = \pm\frac{1}{\omega}\arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2(P_1-P_2)}}y\right) - t \\ Q_2 = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_2} = \pm\dfrac{1}{\omega}\arcsin\left(\sqrt{\dfrac{m\omega^2}{2P_2}}x\right) \mp \dfrac{1}{\omega}\arcsin\left(\sqrt{\dfrac{m\omega^2}{2(P_1-P_2)}}y\right) \end{cases} \tag{15}$$

Comme les Q_i et les P_i sont des constantes du mouvement, on tire de l'équation pour Q_1 que $y(t) = \xi\sin(\omega t + \phi)$ et donc en injectant dans l'équation pour Q_2 on a $x(t) = \zeta\sin(\omega t + \varphi)$. Avec les conditions initales données, on fixe les constantes ξ, ζ, ϕ et φ :

$$\begin{cases} x(t) = L\sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ y(t) = \dfrac{v}{\omega}\sin(\omega t) \end{cases} \tag{16}$$