
Mécanique Analytique , Série d'exercices 5

Assistants : jaap.kroes@epfl.ch & benjamin.audren@epfl.ch

Exercice 1 : Problème de la brachistochrone

Sous l'action de la pesanteur un point matériel glisse sans frottement sur un rail de masse négligeable situé dans le plan vertical (x, y) . Si le point matériel est initialement immobile à l'origine \mathcal{O} , trouver la courbe donnant la forme du rail pour que le point matériel se déplace de l'origine au point $\mathcal{P}(x_0, y_0)$ en un temps minimal.

Indications :

- Utiliser la conservation de l'énergie pour obtenir la vitesse v de la masse en un point quelconque de la trajectoire en fonction de y .
- Choisir la paramétrisation $(x(y), y)$ ou $(x, y(x))$.
- Utiliser une quantité conservée pour résoudre le système.
- Est-il possible que la forme idéale du rail passe par un point plus bas que y_0 ?

Exercice 2 : Problème de la surface minimale de révolution

Considérer la surface de révolution obtenue en prenant une courbe dans un plan (x, y) passant par deux points extrêmes donnés, $\mathcal{P}(1, 0)$ et $\mathcal{Q}(\cosh(2), 2)$, et en la faisant tourner autour de l'axe y . Trouver la courbe pour laquelle l'aire de la surface est minimale. Tout comme dans l'exercice précédent, paramétriser la courbe selon $(x(y), y)$ ou $(x, y(x))$, et utiliser une quantité conservée pour résoudre le système.

Exercice 3 : Rotateurs couplés

Un point matériel de masse m_1 est contraint de se déplacer sur un cercle de rayon a . Un deuxième point matériel de masse m_2 est contraint de se déplacer sur un cercle de rayon b . Les deux cercles appartiennent à deux plans parallèles éloignés d'une distance z , tels que la ligne joignant les deux centres est perpendiculaire aux deux plans. Les deux masses sont attachées aux deux bouts d'un ressort de constante élastique k et de longueur au repos nulle.

1. Ecrire le Lagrangien du système et déterminer les constantes du mouvement à l'aide des symétries du problème.
2. Trouver le changement de coordonnées qui amène à une coordonnée cyclique correspondant à une des quantités conservées.