Corrigé 9

Exercice 1

a) Exposant α: On a que:

$$C(t,B) = -T\frac{\partial^2 f(T,B)}{\partial T^2} = \frac{-T}{T_c^2}\frac{\partial^2 f(t,B)}{\partial t^2}$$

En prenant la forme du scaling de l'énergie libre et en dérivant deux fois, on obtient:

$$\lambda^d \frac{1-t}{T_c}\frac{\partial^2 f(t,B)}{\partial t^2} = \lambda^{2s}\frac{1-t}{T_c}\frac{\partial^2 f(\lambda^s t, \lambda^r B)}{(\partial \lambda^s t)^2}$$

A ce stade il est judicieux de prendre $\lambda = |t|^{\frac{-1}{s}}$ et de poser $B = 0$:

$$C(t,0) = \lambda^{2s-d}C(\pm 1, 0) \sim |t|^{\frac{-2s+d}{s}}$$

Le coefficients $(1-t)$ n'importe pas car il ne diverge pas si $t \to 0$. Donc $\alpha = \frac{2s-d}{s}$

b) Exposant β: La magnétisation est donnée par:

$$m(t,B) = -\frac{\partial f(t,B)}{\partial B}$$

On en tire que:

$$\lambda^d m(t,B) = \lambda^r m(\lambda^s t, \lambda^r B)$$

On prend à nouveau $\lambda = |t|^{\frac{-1}{s}}$ et $B = 0$

$$m(t,0) = \lambda^{r-d}m(\pm 1, 0) = |t|^{\frac{d-r}{s}}m(\pm 1, 0)$$

Donc $\beta = \frac{d-r}{s}$.

c) Exposant γ: On sait que:

$$\chi(t,B) = \left.\frac{\partial^2 f(t,B)}{\partial B^2}\right|_{B=0}$$

On en déduit que:

$$\chi(t,B) = \lambda^{2r-d}\chi(\lambda^s t, \lambda^r B)$$

On prend à nouveau $\lambda = |t|^{\frac{-1}{s}}$ et $B = 0$ et on obtient que $\gamma = \frac{2r-d}{s}$.

d) Exposant δ: Dans ce cas il est préférable de poser $\lambda = |B|^{\frac{-1}{r}}$ et $t = 0$

$$m(0,B) = \lambda^{r-d}m(\pm 1, 0) = |t|^{\frac{d-r}{r}}m(\pm 1, 0)$$

Donc $\delta = \frac{r}{d-r}$. On en déduit immédiatement les des relations de Rushbrooke et de Griffin.

Exercice 2

On considère un paramètre d'échelle λ pour les longueurs et μ pour le temps.

$$r \to \lambda r$$

$$t \to \mu t$$

Le but est de laisser l'équation de Newton $F = ma$ invariante sous le changement d'échelle.

On a:

$$a(r,t) = \frac{\Delta r}{\Delta t^2} \to a(\lambda r, \mu t) = \frac{\lambda \Delta r}{\mu^2 \Delta t^2} = \frac{\lambda}{\mu^2} a(r,t)$$

$$F(r) = -\nabla_r U(r) \to F(\lambda r) = -\nabla_{\lambda r} U(\lambda r) = \frac{1}{\lambda} \nabla_r (\lambda^d U(r)) = \lambda^{d-1} F(r)$$

Au final on obtient:

$$\lambda^{d-1} F(r) = \frac{\lambda}{\mu^2} a(r,t) \Leftrightarrow \lambda^{d-2} = \mu^{-2}$$

En utilisant la loi de Kepler on voit que $\lambda^3 = \mu^2$. Donc:

$$d = -1$$

Ce qui donne:

$$U(\lambda r) = \frac{1}{\lambda} U(r)$$

En prenant $\lambda = \frac{1}{r}$, on obtient que $U(r) \sim \frac{1}{r}$.

De même pour une force constante, on a que: $F(r) = F(\lambda r)$, donc $d = 1$. On en conclut que $\lambda \sim \mu^2$, ce qui donne la loi de Gallilée.