Introduction au Calcul des Variations

Bernard Dacorogna

Table des matières

Préface à la deuxième édition française

Le présent ouvrage a maintenant une longue histoire. La première édition française est parue en 1992 aux Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (PPUR). Elle a été suivie de trois éditions anglaises en 2004, 2009 et 2015 publiées par Imperial College Press (World Scientific). La structure du livre est restée la même, mais sa taille a doublé.

Après de nombreuses années d'expérience, je pense que le livre peut servir de manière adéquate comme une présentation suffisamment générale du calcul des variations. Il peut être et a été utilisé aussi bien au niveau d'un cours de maîtrise que de doctorat. A un niveau plus avancé il devra évidemment être complété par d'autres livres plus spécialisés et dont certains sont explicitement recommandés dans chacun des chapitres. Une des caractéristiques du présent ouvrage est le nombre important d'exercices (maintenant 128) qui sont proposés dans chaque chapitre et qui sont intégralement résolus dans le chapitre 7.

Le calcul des variations est un des sujets classiques des mathématiques. De nombreux grands noms des mathématiques ont contribué, et ceci depuis des temps anciens, à son développement. C'est un sujet toujours très actif et en pleine évolution. Outre son importance purement mathématique et ses liens avec de nombreux sujets comme les équations différentielles ou la géométrie, il est beaucoup utilisé en physique, en ingénierie, en économie ou en biologie. Il est évidemment impossible dans un tel ouvrage de parler de ces nombreuses applications ; mais je suis sûr qu'un lecteur motivé, qu'il soit physicien, ingénieur, économiste ou biologiste, verra facilement comment appliquer les résultats présentés ici à son sujet propre.

Le présent ouvrage ne doit pas être vu comme un livre de référence mais plutôt, comme son titre l'indique, comme une introduction détaillée au calcul des variations. Chaque chapitre pourrait faire à lui seul l'objet d'un livre et, de fait, il existe de nombreux ouvrages consacrés à chacun des chapitres. Par exemple, j'ai écrit un livre qui couvre essentiellement le sujet du chapitre 3 sur les méthodes directes. Par ailleurs plusieurs aspects du calcul des variations ne sont même pas discutés ici. Le but principal du présent ouvrage est de permettre aux non spécialistes, qu'ils soient mathématiciens, physiciens, ingénieurs, étudiants ou chercheurs de découvrir les problèmes et les techniques les plus importants du sujet. Avec ce but en tête, j'ai souvent, par exemple, démontrer les théorèmes sous des hypothèses plus fortes mais suffisamment significatives.

Les différents chapitres peuvent être lus plus ou moins indépendamment. J'ai rappelé au chapitre 1 certains résultats de base sur les espaces fonctionnels (espaces de Hölder, L^p ou espaces de Sobolev) et sur l'analyse convexe. Le lecteur, qu'il soit familier ou non avec ces sujets, pourra dans un premier temps omettre la lecture de ce chapitre. Puis à mesure, dès que nécessaire, il pourra s'y référer. La chapitre 1 est surtout utilisé dans les chapitres 3 et 4, mais beaucoup moins dans les autres. Tous les chapitres, outre de nombreux exemples, contiennent, comme déjà dit, de nombreux exercices intégralement corrigés dans le chapitre 7.

Tout au cours des différentes éditions, j'ai bénéficié de nombreuses discussions avec des étudiants et collègues. Je voudrais particulièrement remercier S. Bandyopadhyay, S. Basterrechea, O. Besson, B. Buffoni, S.D. Chatterji, G. Csato, G. Cupini, C. Hebeisen, O. Kneuss, M. M. Marques, F. Meylan, K.D. Semmler, J. Sesiano, S. Sil, D. Strütt et F. Weissbaum.

Chapitre 0

Introduction

0.1 Quelques commentaires historiques

Le calcul des variations est un des sujets classiques des mathématiques. C'est Euler, qui, au vu des travaux de Lagrange, a donné son nom à ce sujet des mathématiques.

En fait le sujet est beaucoup plus ancien. Il commence avec un des plus vieux problèmes des mathématiques : l'inégalité isopérimétrique. Une variante de cette inégalité est connue comme le problème de Didon (Didon est supposée être une princesse phénicienne et plus tard une reine carthaginoise). Plusieurs démonstrations plus ou moins rigoureuses sont connues depuis déjà 200 avant J-C, grâce aux travaux d'Archimède, Pappus et surtout Zénodore qui a montré l'inégalité pour des polygones. Des contributions postérieures notables sont dues à Euler, Galilée, Legendre, L'Huilier, Riccati, Simpson et Steiner. La première démonstration, au sens moderne du terme, est due à Weierstrass et a été généralisée ou redémontrée de différentes manières notamment par Blaschke, Bonnesen, Carathéodory, Edler, Frobenius, Hurwitz, Lebesgue, Liebmann, Minkowski, H.A. Schwarz, Sturm et Tonelli entre autres. On peut consulter l'article de Porter [99] pour une présentation historique de cette inégalité.

D'autres problèmes importants du calcul des variations ont été étudiés au 17ème siècle en Europe On peut citer, par exemple, le travail de Fermat sur l'optique géométrique (1662), le problème de Newton (1685) sur le mouvement des corps dans un fluide (voir aussi Huygens en 1691 sur le même problème) ou le problème de la brachistochrone formulé par Galilée en 1638. Ce dernier problème a eu une grande influence sur le développement du calcul des variations. Il a été résolu par Jean Bernoulli en 1696 et presque simultanément par son frère Jacques, Leibniz et Newton. L'étape décisive dans l'histoire du calcul des variations a été réalisée par Euler et Lagrange, qui ont découvert une manière systématique de traiter ces problèmes en introduisant l'équation que l'on nomme maintenant l'équation d'Euler-Lagrange. Ce travail a été étendu notamment par Bliss, Bolza, Carathéodory, Clebsch, Hahn, Hamilton, Hilbert, Kneser, Jacobi, Legendre, Mayer et Weierstrass, parmi de nombreux autres. Pour un historique intéressant sur les problèmes unidimensionnels du calcul des variations, on peut consulter le livre de Goldstine [63].

Au 19ème siècle et en parallèle avec certains des travaux mentionnés ci dessus, probablement le problème le plus célèbre du calcul des variations, à savoir l'intégrale de Dirichlet, a commencé à être étudié ; un problème d'intégrale multiple. Son importance est en partie due à sa relation avec l'équation de Laplace. Plusieurs contributions importantes ont été apportées notamment par Dirichlet, Gauss, Thompson et Riemann. C'est Hilbert qui, au tournant du 20ème siècle, a résolu le problème et immédiatement après il a été imité par Lebesgue et Tonelli. Leurs méthodes pour résoudre ce problème sont, essentiellement, ce que nous appelons maintenant les méthodes directes du calcul des variations. On doit aussi insister sur le fait que ce problème a eu une influence considérable sur le développement de l'analyse ; on pourra consulter sur ce sujet le livre de Monna [86].

Le problème des surfaces minimales a aussi eu, à peu près au même moment, une grande influence sur le développement du calcul des variations. Le problème a été formulé par Lagrange en 1762. Plusieurs contributions significatives sont dues, entre autres, à Ampère, Beltrami, Bernstein, Bonnet, Catalan, Darboux, Enneper, Haar, Korn, Legendre, Lie, Meusnier, Monge, Müntz, Riemann, H.A. Schwarz, Serret, Weierstrass, Weingarten. Indépendamment Douglas et Rado en 1930 sont les premiers à avoir résolu le problème complètement. Une des deux premières médailles Fields a été attribuée à Douglas en 1936 pour sa solution du problème. Immédiatement après les travaux de Douglas et Rado, plusieurs généralisations et améliorations sont dues à Courant, Leray, MacShane, Morrey, Morse, Tonelli et plusieurs autres après. Pour des références historiques sur ce problème, on peut consulter les livres de Dierkes-Hildebrandt-Küster-Wohlrab [41] et Nitsche [91].

En 1900 au congrès international des mathématiciens à Paris, Hilbert a formulé 23 problèmes qu'il considérait comme importants pour le développement des mathématiques au 20ème siècle. Trois d'entre eux (les 19ème, 20ème et 23ème) sont consacrés au calcul des variations. Ces "prédictions" de Hilbert ont été amplement justifiées au cours du 20ème siècle et le sujet est encore à l'heure actuelle extrêmement actif.

Finalement mentionnons que nous ne parlerons pas ici de plusieurs sujets importants du calcul des variations, tels que les théories de Morse ou de Liusternik-Schnirelman. Le lecteur intéressé pourra consulter avec profit les livres de Ekeland [44], Mawhin-Willem [85], Struwe [107], Willem [113] ou Zeidler [116].

0.2 Le problème modèle et quelques exemples

Décrivons maintenant plus en détails les problèmes que nous allons considérer. Le cas modèle s'écrit comme

$$(P) \quad \inf \left\{ I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx : u \in X \right\} = m.$$

En d'autres termes on cherche à minimiser l'intégrale, $I(u)$, parmi toutes les fonctions $u \in X$ (et on dénote par m la valeur minimale que peut prendre l'intégrale), où

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, est un ouvert borné, un point de Ω est noté $x = (x_1, \cdots, x_n)$;
- $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $u = \left(u^1, \cdots, u^N\right)$, et donc

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq n}^{1 \leq j \leq N} \in \mathbb{R}^{N \times n}$$

on écrira souvent $\partial u^j / \partial x_i = u^j_{x_i}$;

- $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N \times n} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x, u, \xi)$, est continue ;
- X est l'espace des fonctions admissibles (par exemple, $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ avec $u = u_0$ sur $\partial\Omega$).

On cherche un *minimiseur* $\overline{u} \in X$ de (P), ce qui veut dire que

$$I(\overline{u}) \leq I(u), \quad \forall\, u \in X.$$

De nombreux problèmes provenant de l'analyse, la géométrie ou des mathématiques appliquées (à la physique, l'économie ou la biologie) peuvent être formulés comme ci-dessus. Certains autres problèmes, même s'ils n'entrent pas dans notre formalisme, peuvent être traités par exactement les mêmes techniques. Tournons nous maintenant vers les exemples classiques.

Exemple : principe de Fermat. On cherche la trajectoire d'un rayon lumineux se déplaçant dans un milieu d'indice de réfraction non constant. On peut formuler le problème dans le formalisme ci dessus. On a $n = N = 1$,

$$f(x, u, \xi) = g(x, u) \sqrt{1 + \xi^2}$$

et

$$(P) \quad \inf \left\{ I(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx : u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta \right\} = m.$$

Exemple : problème de Newton. On cherche une surface de révolution se déplaçant dans un fluide de manière que la résistance soit minimale. Le problème peut être formulé comme suit. Soient $n = N = 1$,

$$f(x,u,\xi) = f(u,\xi) = 2\,\pi\,u\,\frac{\xi^3}{1+\xi^2}$$

et

$$(P) \quad \inf\left\{ I(u) = \int_a^b f(u(x), u'(x))\,dx : u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta \right\} = m.$$

Nous ne traiterons pas ce problème dans le présent ouvrage et nous référons à Buttazzo-Kawohl [18] pour de plus amples développements.

Exemple : brachistochrone. Le but est de trouver un chemin que suit un point matériel, soumis à l'influence de la gravité, reliant l'origine à un point $(b, -\beta)$, avec $b, \beta > 0$ en un temps minimal. Le chemin est représenté par $(x, -u(x))$, $0 \le x \le b$. Dans nos notations, on a que $n = N = 1$ et la fonction considérée est

$$f(x,u,\xi) = f(u,\xi) = \frac{\sqrt{1+\xi^2}}{\sqrt{2\,g\,u}}$$

et

$$(P) \quad \inf\left\{ I(u) = \int_0^b f(u(x), u'(x))\,dx : u \in X \right\} = m$$

où

$$X = \left\{ u \in C^1((0,b]) : u(0) = 0,\ u(b) = \beta \text{ et } u(x) > 0,\ \forall\, x \in (0,b] \right\}.$$

La trajectoire la plus courte est une *cycloïde*.

Exemple : surface minimale de révolution. On veut déterminer parmi toutes les surfaces de révolution de la forme

$$v(x,y) = (x, u(x)\cos y, u(x)\sin y),$$

et dont les extrémités sont fixées $u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta$, une d'aire minimale. On a toujours $n = N = 1$,

$$f(x,u,\xi) = f(u,\xi) = 2\,\pi\,u\sqrt{1+\xi^2}$$

et

$$(P) \quad \inf\left\{ I(u) = \int_a^b f(u(x), u'(x))\,dx : u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta,\ u > 0 \right\} = m.$$

Les solutions de ce problème, quand elles existent, sont des *caténoïdes*. Plus précisément, le minimiseur est donné, $\lambda > 0$ et μ dénotant des constantes, par

$$u(x) = \lambda \cosh \left[\frac{x+\mu}{\lambda} \right].$$

Exemple : système mécanique. Soit un système mécanique de M particules dont les masses respectives sont m_i et leurs positions au temps t sont

$$u^i(t) = \left(x^i(t), y^i(t), z^i(t) \right) \in \mathbb{R}^3, \quad 1 \leq i \leq M.$$

Soit

$$T(u') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M} m_i \left| (u^i)' \right|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M} m_i \left(\left((x^i)' \right)^2 + \left((y^i)' \right)^2 + \left((z^i)' \right)^2 \right)$$

l'énergie cinétique. On note l'énergie potentielle par $U = U(t, u)$. Soit

$$f(t, u, \xi) = T(\xi) - U(t, u)$$

le lagrangien. Dans notre formalisme nous avons $n = 1$ et $N = 3M$.

Exemple : intégrale de Dirichlet. Il s'agit du problème le plus célèbre du calcul des variations. Ici on a $n > 1$, $N = 1$ et

$$(P) \quad \inf \left\{ I(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx : u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

Comme pour tout problème variationnel, on lui associe une équation différentielle qui ici n'est rien d'autre que l'*équation de Laplace*, à savoir $\Delta u = 0$.

Exemple : surfaces minimales. Ce problème est presque aussi célèbre que le précédent. On cherche à trouver parmi toutes les surfaces $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ (ou plus généralement dans $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$) une d'aire minimale, sachant que le bord $\partial\Sigma = \Gamma$ est prescrit, Γ étant une courbe simple et fermée. Une variante de ce problème est connue comme le *problème de Plateau*. On peut réaliser expérimentalement de telles surfaces en plongeant un fil de fer dans de l'eau savonneuse ; lorsque l'on retire le fil de l'eau on observe alors une surface minimale.

La formulation précise du problème dépend du type de surfaces que l'on considère. Nous avons déjà vu ci dessus le cas des surfaces minimales de révolution. Voyons ensuite comment formuler le problème pour des surfaces plus générales.

Cas 1 : surface non paramétrée. Soit une (hyper) surface de la forme

$$\Sigma = \left\{ v(x) = (x, u(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \overline{\Omega} \right\}$$

avec $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ et où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné connexe. Ces surfaces sont donc des graphes de fonctions. Le fait que $\partial\Sigma$ est une courbe donnée, Γ, se traduit par $u = u_0$ sur $\partial\Omega$, où u_0 est une fonction donnée. L'aire d'une telle surface est donnée par

$$\text{Aire}\,(\Sigma) = I\,(u) = \int_\Omega f\,(\nabla u\,(x))\,dx$$

où, pour $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a posé

$$f\,(\xi) = \sqrt{1 + |\xi|^2}\,.$$

Le problème est ainsi écrit sous la forme habituelle

$$(P) \qquad \inf \left\{ I\,(u) = \int_\Omega f\,(\nabla u\,(x))\,dx : u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

On associe à (P) une équation aux dérivées partielles appelée *équation des surfaces minimales*

$$(E) \qquad \mathrm{M}u \equiv \left(1 + |\nabla u|^2\right)\Delta u - \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j} = 0$$

qui est l'équation que tout minimiseur u de (P) doit vérifier. En termes géométriques, cette équation exprime que la surface correspondante Σ a une *courbure moyenne* nulle partout.

Cas 2 : surface paramétrée. Les surfaces non paramétrées sont du point de vue géométrique clairement trop restrictives. On est donc conduit à considérer des surfaces paramétrées. Ce sont des ensembles $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tels qu'il existe un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et une application $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^{n+1}$ avec

$$\Sigma = v\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{ v\,(x) : x \in \overline{\Omega} \right\}.$$

Par exemple, quand $n = 2$ et $v = v\,(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$, si on note par $v_{x_1} \times v_{x_2}$ la normale à la surface (où $a \times b$ dénote le produit vectoriel de $a, b \in \mathbb{R}^3$ et $v_{x_1} = \partial v / \partial x_1$, $v_{x_2} = \partial v / \partial x_2$) on déduit que l'aire est donnée par

$$\text{Aire}\,(\Sigma) = J\,(v) = \iint_\Omega |v_{x_1} \times v_{x_2}|\,dx_1 dx_2\,.$$

Dans notre formalisme on a donc ici $n = 2$ et $N = 3$.

Exemple : inégalité isopérimétrique. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné dont le bord, ∂A, est une courbe simple fermée suffisamment régulière. Soit $L\,(\partial A)$ le périmètre de ∂A et $M(A)$ l'aire de A. L'inégalité isopérimétrique s'énonce alors comme

$$[L(\partial A)]^2 - 4\,\pi\, M(A) \geq 0.$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si A est un disque (i.e. ∂A est un cercle). Dans notre formalisme (ici $n = 1$ et $N = 2$), le problème revient à montrer que

$$(P) \quad \inf\{L(u) : M(u) = 1;\ u(a) = u(b)\} = 2\sqrt{\pi}$$

où

$$\partial A = \left\{u(x) = \left(u^1(x), u^2(x)\right) : x \in [a,b]\right\}$$

$$L(\partial A) = L(u) = \int_a^b \sqrt{\left((u^1)'\right)^2 + \left((u^2)'\right)^2},$$

$$M(A) = M(u) = \frac{1}{2}\int_a^b \left(u^1 \left(u^2\right)' - u^2 \left(u^1\right)'\right) = \int_a^b u^1 \left(u^2\right)'.$$

Ce problème peut être généralisé à des ensembles $A \subset \mathbb{R}^n$ dont le bord, ∂A, est suffisamment régulier. L'inégalité est alors

$$[L(\partial A)]^n - n^n\, \omega_n\, [M(A)]^{n-1} \geq 0$$

où ω_n est la mesure de la boule unité de $\mathbb{R}^n$, $M(A)$ est la mesure de A et $L(\partial A)$ la mesure $(n-1)$ dimensionnelle de ∂A. De plus, si A est suffisamment régulier (par exemple, convexe), il y a égalité si et seulement si A est une boule.

0.3 Présentation du contenu de l'ouvrage

Les problèmes rencontrés dans la section précédente seront traités de deux façons différentes que nous appelons les méthodes classiques et directes. Avant de décrire plus en détails ces deux approches, il peut être utile de commencer par discuter les problèmes de minimisation dans $\mathbb{R}^N$.

Soient $X \subset \mathbb{R}^N$, $F : X \to \mathbb{R}$ et

$$(P) \quad \inf\{F(x) : x \in X\}.$$

La première méthode (dite classique) consiste, si F est continûment différentiable, à trouver des solutions $\overline{x} \in X$ de

$$F'(x) = 0, \quad x \in X.$$

Puis, en analysant le comportement des dérivées d'ordre supérieur de F, on détermine si $\overline{x}$ est un minimum (global ou local), un maximum (global ou local) ou seulement un point stationnaire.

La seconde méthode (dite directe) considère une suite minimisante $\{x_\nu\} \subset X$, i.e.

$$F(x_\nu) \to \inf\{F(x) : x \in X\}.$$

Sous des hypothèses appropriées sur F, on peut montrer que la suite est compacte dans X, ou en d'autres termes

$$x_\nu \to \overline{x} \in X, \quad \text{quand } \nu \to \infty.$$

Finalement, si F est semi continue inférieurement, à savoir

$$\liminf_{\nu \to \infty} F(x_\nu) \geq F(\overline{x}),$$

on a que $\overline{x}$ est un minimiseur de (P).

On procède de manière semblable dans le calcul des variations. Toutefois le problème est maintenant considérablement plus difficile, car nous travaillons dans des espaces de dimension infinie.

Rappelons que le problème considéré est

$$(P) \quad \inf\left\{ I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx : u \in X \right\} = m$$

où

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, est un ouvert borné, $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega$;

- $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $u = (u^1, \cdots, u^N)$ et $\nabla u = \left(u^j_{x_i}\right)^{1 \leq j \leq N}_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{N \times n}$;

- $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N \times n} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x, u, \xi)$, est continue ;

- X est un espace de fonctions admissibles qui satisfont $u = u_0$ sur $\partial\Omega$, où u_0 est une fonction donnée.

Ici, contrairement au cas de $\mathbb{R}^N$, on rencontre un problème préliminaire, à savoir : quel espace X de fonctions admissibles doit-on choisir ? Le plus naturel semble être $X = C^1(\overline{\Omega})$. Plusieurs raisons, qui deviendront plus claires tout au long des développements que nous ferons, indiquent que ce n'est pas le meilleur choix. L'*espace de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$, $p \geq 1$, est plus approprié. On dit que $u \in W^{1,p}(\Omega)$, si u est (faiblement) dérivable et si

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left[\int_\Omega \left(|u(x)|^p + |\nabla u(x)|^p\right) dx \right]^{1/p} < \infty.$$

Les propriétés les plus importantes de ces espaces sont rappelées au chapitre 1.

Au chapitre 2, on présente brièvement les *méthodes classiques* introduites par Euler, Hamilton, Hilbert, Jacobi, Lagrange, Legendre, Weierstrass et d'autres. L'outil le plus important est l'équation *d'Euler-Lagrange*, l'équivalent de $F'(x) =$

0 dans le cas de dimension finie. Elle donne une condition nécessaire que doit satisfaire un minimiseur $\overline{u} \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ de (P), à savoir (on écrit ici l'équation dans le cas $N = 1$)

$$(E) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_{\xi_i}\left(x, \overline{u}, \nabla \overline{u}\right)\right] = f_u\left(x, \overline{u}, \nabla \overline{u}\right), \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}$$

où $f_{\xi_i} = \partial f / \partial \xi_i$ et $f_u = \partial f / \partial u$.

Dans le cas de l'intégrale de Dirichlet

$$(P) \quad \inf\left\{I\left(u\right) = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|\nabla u\left(x\right)\right|^2 dx : u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}$$

l'équation d'Euler-Lagrange n'est rien d'autre que l'équation de Laplace

On remarque immédiatement que trouver une solution C^2 de (E) est, en général, une tâche difficile, sauf éventuellement quand $n = 1$ ou quand l'équation (E) est linéaire. L'étape suivante est alors de savoir si une solution $\overline{u}$ de (E), parfois appelée un point stationnaire de I, est, en fait, un minimiseur de (P). Si $(u, \xi) \to f\left(x, u, \xi\right)$ est convexe, pour tout $x \in \Omega$, alors $\overline{u}$ est bien un minimiseur de (P); dans les exemples ci dessus, c'est le cas de l'intégrale de Dirichlet ou du problème de surfaces minimales sous forme non paramétrée. Si $(u, \xi) \to f\left(x, u, \xi\right)$ n'est pas convexe, plusieurs critères, surtout dans le cas $n = 1$, peuvent être utilisés pour déterminer la nature du point stationnaire. Ces critères sont, par exemple, les conditions de Jacobi, Legendre, Weierstrass, Weierstrass-Erdmann ou les théories des champs.

Aux chapitres 3 et 4 nous présentons les *méthodes directes* qui trouvent leurs origines dans les travaux de Hilbert, Lebesgue et Tonelli. L'idée est de diviser la discussion du problème en deux parties : l'*existence* de minimiseurs dans un espace de Sobolev et puis la *régularité* des solutions. Au chapitre 3, l'existence de minimiseurs de (P) dans l'espace de Sobolev $W^{1,p}\left(\Omega\right)$ est discutée Dans le chapitre 4 on montre que, parfois, les minimiseurs de (P) appartiennent à des espaces de fonctions plus régulières que celles dans un espace de Sobolev, par exemple ils sont C^1 ou même C^∞, si les données Ω, f et u_0 sont suffisamment régulières.

Décrivons maintenant brièvement les idées qui permettent de montrer l'existence de minimiseurs dans les espaces de Sobolev. Comme dans le cas de dimension finie, on commence par choisir une suite minimisante $\{u_\nu\} \subset W^{1,p}\left(\Omega\right)$, ce qui veut dire que

$$I\left(u_\nu\right) \to \inf\left\{I\left(u\right) : u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ et } u \in W^{1,p}\left(\Omega\right)\right\} = m, \quad \text{quand } \nu \to \infty.$$

La première étape consiste à montrer que la suite est compacte, c'est à dire que la suite converge vers un élément $\overline{u} \in W^{1,p}\left(\Omega\right)$. Ceci, évidemment, dépend de la topologie que nous mettons sur $W^{1,p}$. La topologie naturelle est celle induite par la norme, qu'on appelle *convergence forte* et qui est notée

$$u_\nu \to \overline{u} \quad \text{dans } W^{1,p}.$$

Toutefois il est, en général, difficile de montrer que la suite converge dans une telle topologie. Il vaut souvent mieux affaiblir la notion de convergence et considérer une *convergence faible*, notée $\rightharpoonup$. Obtenir que

$$u_\nu \rightharpoonup \overline{u} \quad \text{dans } W^{1,p}$$

est nettement plus facile et il suffit, par exemple si $p > 1$, d'établir (à l'extraction d'une sous suite près) que

$$\|u_\nu\|_{W^{1,p}} \leq \gamma$$

où γ est une constante indépendante de ν. Une telle estimation suit, par exemple, si on impose une hypothèse de *coercitivité* sur la fonction f de type

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \frac{f(x,u,\xi)}{|\xi|} = +\infty, \quad \forall (x,u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

On observe que l'intégrale de Dirichlet, avec

$$f(x,u,\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2,$$

satisfait l'hypothèse, mais pas celle des surfaces minimales non paramétrées, où

$$f(x,u,\xi) = \sqrt{1+|\xi|^2}.$$

La deuxième étape consiste à montrer que la fonctionnelle I est semi continue inférieurement par rapport à la convergence faible, en d'autres termes

$$u_\nu \rightharpoonup \overline{u} \text{ dans } W^{1,p} \quad \Rightarrow \quad \liminf_{\nu\to\infty} I(u_\nu) \geq I(\overline{u}).$$

On verra que la conclusion est vraie si

$$\xi \to f(x,u,\xi) \text{ est convexe}, \quad \forall (x,u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Comme $\{u_\nu\}$ est une suite minimisante, on déduit que $\overline{u}$ est bien un minimiseur de (P).

Dans le chapitre 5, on considère le problème des surfaces minimales. Les méthodes du chapitre 3 ne s'appliquent pas telles quelles. En fait, c'est l'étape de compacité de la suite minimisante qui est nettement plus difficile à obtenir, et ceci pour des raisons que nous expliquerons dans le chapitre 5. Il y a aussi des difficultés liées à la nature géométrique du problème ; par exemple, le choix du type de surfaces considérées ou la notion d'aire. Dans le chapitre 5, nous présentons une méthode due à Douglas et développée par Courant et Tonelli pour traiter le problème des surfaces minimales. En fait, les techniques utilisées sont aussi, par essence, des méthodes directes.

Dans le chapitre 6, on discute l'inégalité isopérimétrique dans $\mathbb{R}^n$. Suivant la dimension, la façon de résoudre le problème est très différente. Quand $n = 2$, nous présentons une méthode, essentiellement due à Hurwitz, qui utilise des techniques semblables à celle développées dans le chapitre 2. En dimensions supérieures la démonstration que nous donnons est plus géométrique ; elle utilise, comme outil principal, le *théorème de Brunn-Minkowski*.